

一种抗冲击噪声的高精度波达方向估计算法

单泽彪^{1,2}, 姚瑞广¹, 刘小松¹, 薛泓焱¹, 刘云清¹

(1. 长春理工大学电子信息工程学院, 130022, 长春; 2. 吉林大学通信工程学院, 130022, 长春)

摘要: 针对现有波达方向(DOA)估计算法在冲击噪声下估计精度较低的问题,提出了一种基于相控分数低阶矩和指数族分布函数的离格近似 l_0 范数 DOA 估计算法。首先,利用相控分数低阶矩抑制冲击噪声,构建稀疏 DOA 模型;其次,通过对平滑函数的平滑性和陡峭性进行研究,构造了一类平滑性和陡峭性可变的函数族,并利用该函数族求解初始支撑集;然后,提出了一种前向展望和后向延拓策略,对初始支撑集进行扩展,并从中选择出可以使残差最小化的一组支撑集为最优支撑集,从而确定在格 DOA 估计;最后,为了解决网格失配效应,利用 DOA 粗估计与离格偏差之间的联合稀疏性,通过交替方向迭代联合求解 DOA 粗估计与离格偏差,获得离格 DOA 估计值。仿真结果表明:与正交匹配追踪算法相比,在信噪比为 -8 dB 时,所提算法的 DOA 估计精度提高了 66.36%。此外,当冲击噪声特征指数大于 0.6 时,所提算法对目标 DOA 的估计误差可以控制在 1° 以内。仿真结果充分说明了所提算法可在冲击噪声下实现高精度的 DOA 估计。

关键词: 波达方向估计;近似 l_0 范数;冲击噪声;指数族分布函数;前向展望;后向延拓

中图分类号: TN911 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202504018 **文章编号:** 0253-987X(2025)04-0193-10

A High-Accuracy Direction of Arrival Estimation Algorithm for Impact Noise Resistance

SHAN Zebiao^{1,2}, YAO Ruiguang¹, LIU Xiaosong¹, XUE Hongyao¹, LIU Yunqing¹

(1. School of Electronic and Information Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China; 2. College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: To address the issue of low estimation accuracy in existing direction of arrival (DOA) estimation algorithms under impulsive noise, an off-grid approximation l_0 -norm DOA estimation algorithm based on phased fractional low-order moments (PFLOM) and exponential family distribution functions is proposed. Firstly, PFLOM is employed to suppress impulsive noise and construct a sparse DOA model. Secondly, by analyzing the smoothness and steepness of smoothing functions, a family of functions with variable smoothness and steepness is constructed. This function family is used to solve the initial support set. Then, a forward-looking and backward-extending strategy is introduced to expand the initial support set, selecting a group of support sets that minimizes the residual to determine the optimal support set for grid-based DOA estimation. Finally, to address grid mismatch effects, the joint sparsity between DOA coarse estimates and off-grid

收稿日期: 2024-11-07。 作者简介: 单泽彪(1986—),男,副教授,硕士生导师;刘小松(通信作者),女,讲师,硕士生导师。
基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2022YFC220390);吉林省自然科学基金资助项目(YDZJ202301ZYTS412)。

网络出版时间: 2024-12-31

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20241230.0857.002>

deviation is used to jointly solve DOA coarse estimates and off-grid deviations through alternating direction iterative methods to obtain off-grid DOA estimate. Simulation results show that, compared to the orthogonal matching pursuit algorithm, the proposed algorithm improves the DOA estimation accuracy by 66.36% at a signal-to-noise ratio of -8 dB. Furthermore, when the impulsive noise characteristic index exceeds 0.6, the estimation error of the target DOA by the proposed algorithm can be controlled within 1° . These results demonstrate that the proposed algorithm can achieve high-precision DOA estimation under impulsive noise.

Keywords: direction of arrival estimation; approximate l_0 -norm; impulsive noise; exponential family distribution function; forward exploration; backward extension

波达方向(DOA)估计是阵列信号处理中的主要研究内容,其在多个领域都具有重要的意义和广泛的应用,包括雷达定位、移动通信、电子侦察和自动驾驶等领域^[1-4]。其中在电子侦察领域,DOA估计可以用于确定电磁信号的入射方向,进行目标定位或电磁干扰。在自动驾驶领域,DOA估计可以用于环境感知,利用阵列天线感知周围车辆和行人的位置及运动方向,从而实现更安全的自动驾驶。

DOA估计算法主要有最大似然算法以及子空间类算法等^[5-7],其中子空间类算法通常需要较多的阵元和采样数据才能实现更高精度的估计,这在资源受限的情况下是难以实现的。压缩感知技术^[8-9]的提出,为解决这一问题提供了新的思路。由于目标信号在空域内具有稀疏性,因此可以利用压缩感知的方法对目标信号进行DOA估计。基于压缩感知的DOA估计算法主要有3类:第1类是以正交匹配追踪(OMP)算法为代表的贪婪类算法^[10];第2类是稀疏贝叶斯学习(SBL)算法^[11];第3类是以近似 l_0 范数(SL0)为代表的凸优化类算法^[12]。其中,SL0算法相较于OMP算法和SBL算法具有明显的优势。一方面,SL0算法通过优化平滑化的 l_0 范数,直接逼近稀疏解,能够在稀疏性较强的信号中展现更高的重构精度。另一方面,SL0算法避免了复杂的超参数优化过程,其迭代计算相对简单,因此在处理大规模稀疏问题时表现出更高的效率。

压缩感知类算法多是将连续的空域离散为网格,当目标信号精准落在网格内时,可以得到较高精度的DOA估计值。然而当网格与目标信号存在偏差时,便会出现网格失配效应^[13],算法性能严重下降。由于网格划分过于密集会导致导向矢量矩阵中的原子相关度提高,破坏有限等距条件^[14],导致算法性能进一步降低。因此,并不能通过密集划分网格的方法解决网格失配问题。为此,文献[15]将离格偏差引入到阵列输出的二阶矩模型中,并利用

OMP算法对方向角和网格误差进行联合估计。文献[16]提出迭代相位偏移校正算法,利用虚拟阵的等效单快拍数据结构增大阵列自由度的同时减小算法复杂度。文献[17]提出了一种基于协方差拟合的离格DOA估计方法,通过纠正共形阵列数据与假设模型之间的相位偏移,补偿了角度偏差。文献[18]提出了一种适用于球形声传感器阵列的压缩波束形成算法,克服了网格失配问题,提高了估计精度。文献[19]提出了基于动态压缩感知的DOA跟踪算法,可以实现移动目标波达角的高精度动态估计。

在实际应用中环境噪声并非都是高斯噪声,其中表现出脉冲冲击特性和厚重拖尾现象的非高斯噪声称为冲击噪声,使用Alpha稳定分布予以描述。针对冲击噪声下DOA估计算法性能下降甚至失效的问题,文献[20]将稀疏恢复理论与分数低阶矩(FLOM)相结合,构造了基于FLOM的稀疏DOA估计算法。然后,通过凸优化方法求解模型,获得DOA估计值。文献[21]通过分数低阶协方差(FLOC)和Khatri-Rao(KR)子空间方法,抑制冲击噪声。所提重构OMP(R-OMP)算法和重构离格OMP(R-OGOMP)算法,有效提高了冲击噪声下DOA估计精度。但该算法只能抑制特征指数 $\alpha > 1$ 的冲击噪声,适用范围较小。且该算法重构性能容易受到原子相关性影响,算法精度较差。

为解决上述问题,本文提出适用于在格场景条件下基于相控分数低阶矩(PFLOM)和指数族分布(EFD)函数的近似 l_0 范数DOA估计算法(P-ESL0)以及适用于离格场景下基于PFLOM和EFD函数的离格近似 l_0 范数DOA估计算法(P-EOGSL0)。首先,利用PFLOM抑制冲击噪声,并结合KR子空间,构建基于PFLOM的稀疏DOA模型。其次,通过分析平滑函数平滑性与陡峭性的关系,构造了一种平滑性和陡峭性可变的EFD函数,以提高近似 l_0 范数的效果。然后,利用EFD函

数近似 l_0 。波数算法求解信号初始支撑集,并对初始支撑集进行前向展望和后向延拓,获得待测支撑集。从待测支撑集中选择出可使拟合残差最小化的最优支撑集,从而确定在格 DOA 估计值。最后,对导向矢量求一阶泰勒展开,将离格偏差引入稀疏 DOA 模型,利用交替迭代求解 DOA 粗估计和离格偏差,从而得到离格 DOA 估计值。本文的主要贡献如下。

(1)在分析平滑函数的陡峭性和平滑性基础上,构造了一种陡峭性和平滑性可变函数族,即 EFD 函数。该函数族可以通过调节其中的参数,构造出具有不同平滑性和陡峭性的函数,使得算法可以应对更加复杂的应用场景。

(2)提出了前向展望和后向延拓策略。该策略将对初始支撑集进行前向展望和后向延拓,并依据最小二乘准则,选择出最优支撑集,以保证拟合误差的最小化。

(3)为解决网格失配问题,本文提出了离格 SL0 算法。该算法利用 DOA 粗估计与离格偏差的联合稀疏性,通过交替迭代最终可以得到较高精度的 DOA 估计值。

1 信号和噪声模型

假设阵列是由 M 个间距为 d 的阵元组成的均匀线性阵列, K 个远场窄带信号以平面波的形式入射到阵列上,方向分别为 $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_K\}$ 。在 t 时刻,阵列接收数据可表示^[22]为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{g}(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ 为接收数据矢量; $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$ 为目标信号矢量; $\mathbf{g}(t) = [g_1(t), g_2(t), \dots, g_M(t)]^T$ 为冲击噪声矢量; $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ 为导向矢量矩阵; $\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta_k}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d \sin \theta_k}]^T$ 为第 k 个导向矢量; λ 表示信号的波长。

冲击噪声可用 Alpha 稳定分布予以描述,其特征函数可表示^[23]为

$$\varphi(t) = \exp(j\alpha t - \gamma |t|^\alpha [1 + j\beta \operatorname{sgn}(t)\omega(t, \alpha)]) \quad (2)$$

$$\text{式中: } \omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \lg |t|, & \alpha = 1 \end{cases}; \operatorname{sgn}(t) =$$

$$\begin{cases} 1, & t > 1 \\ 0, & t = 1; \alpha (0 < \alpha \leq 2) \text{ 为特征指数,表示噪声冲击} \\ -1, & t < 1 \end{cases}$$

程度; $\beta(-1 < \beta < 1)$ 为对称参数,用于确定分布的对称性; $\gamma(\gamma > 0)$ 为分散系数,其值用来描述样本偏离均值的程度; $\alpha(-\infty < \alpha < \infty)$ 为位置参数。值得注意的是,当 $\alpha=2$ 时,Alpha 稳定分布会退化为高斯分布。

2 基于 PFLOM 的稀疏 DOA 模型

在阵列信号接收模型基础上,将 KR 子空间方法与 PFLOM 矩阵结合,构造稀疏 DOA 模型。首先,定义一种更接近二阶采样协方差矩阵形式的 PFLOM 矩阵,记为 $\mathbf{V}$ 。 $\mathbf{V}$ 中第 (i, k) 个元素 $v_{i,k}$ 定义为

$$v_{i,k} = E\{x_i(t) |x_i(t)|^{b-1} x_i^*(t) |x_k(t)|^{b-1}\} \quad (3)$$

式中: $b(0 < b < \alpha/2)$ 为 PFLOM 参数; $(\cdot)^*$ 表示取共轭; $|\cdot|$ 表示取模值; $E\{\cdot\}$ 表示数学期望。对 $\forall i, k, v_{i,k}$ 有界,矩阵 $\mathbf{V}^{[24]}$ 可表示为

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{\Psi}_s\mathbf{A}^H(\theta) + \kappa\mathbf{I}_M \quad (4)$$

式中: $\mathbf{\Psi}_s = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\eta}_s)$ 为对角矩阵,其主对角元素 $\boldsymbol{\eta}_s = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_K]^T$ 为等效信号源列向量; κ 为矩阵 $\mathbf{V}$ 的 $M-K$ 个较小特征值的平均值; $\mathbf{I}_M$ 为 M 维单位矩阵; $(\cdot)^H$ 表示共轭转置。

对式(4)应用向量化算子,可得

$$\mathbf{y}_{\text{PFLOM}} = \operatorname{vec}(\mathbf{V}) = \tilde{\mathbf{A}}(\theta)\boldsymbol{\eta}_s + \kappa\operatorname{vec}(\mathbf{I}_M) \quad (5)$$

式中: $\operatorname{vec}(\cdot)$ 为向量化算子; $\tilde{\mathbf{A}}(\theta)$ 为 Khatri-Rao 积重构导向矢量矩阵,其表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\theta) &= \mathbf{A}^*(\theta) \underset{\text{KR}}{\otimes} \mathbf{A}(\theta) = \\ &[\mathbf{a}^*(\theta_1) \otimes \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}^*(\theta_K) \otimes \mathbf{a}(\theta_K)] = \\ &[\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1), \tilde{\mathbf{a}}(\theta_2), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(\theta_K)] \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)$ 为重构造导向矢量; $\otimes$ 为 Kronecker 积; $\underset{\text{KR}}{\otimes}$ 为 Khatri-Rao 积。由于 κ 可通过特征值分解获得,因此式(5)可整理为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\text{PFLOM}} - \kappa\operatorname{vec}(\mathbf{I}_M) = \tilde{\mathbf{A}}(\theta)\boldsymbol{\eta}_s \quad (7)$$

进而在式(7)的基础上,构造稀疏 DOA 估计模型。首先,将阵列可接收的角度范围 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 按一定间距均匀等分为 Q 个网格。 Q 要远大于目标信号数量 K ,以保证信号在空域内的稀疏性。然后,按划分的网格 $\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_Q\}$ 定义过完备字典 $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\theta})$ 和稀疏信号列向量 $\mathbf{s}$ 如下

$$\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\theta}) = [\tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\theta}_1), \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\theta}_2), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\theta}_Q)] \quad (8)$$

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_Q]^T \quad (9)$$

式中:向量 $\mathbf{s}$ 中仅有 K 个非零元素,若第 i 个非零元素 s_i 的值为 η_k ,则 s_i 对应的角度 $\tilde{\theta}_i$ 就为 θ_k 。

根据上述定义,式(7)可表示为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\theta})\mathbf{s} \quad (10)$$

由于式(10)是一个非确定性多项式难题(NP-hard)问题,难以直接求解。因此,通过连续的平滑函数去近似离散的 l_0 范数,将离散的 l_0 范数优化问题等价于连续函数的优化问题。求解该优化问题,获得稀疏解 $\mathbf{s}$ 及对应的支撑集,从而根据支撑集中的原子在导向矢量矩阵中的位置确定 DOA 估计值。

3 一种近似 l_0 范数的 EFD 函数

近似 l_0 范数方法的关键在于构造一种平滑函数,去近似 l_0 范数的特性,进而将离散的 l_0 范数优化问题转化为连续平滑函数的优化问题。所构造的平滑函数 $f_\sigma(s_i)$ 应当在递减序列 $\{\sigma_i\}$ 的控制下,逐渐逼近稀疏向量的 l_0 范数,并且当逼近因子 σ 趋近于 0 时, $f_\sigma(s_i)$ 应满足

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(s_i) = \begin{cases} 1, & s_i \neq 0 \\ 0, & s_i = 0 \end{cases} \quad (11)$$

对于任意的 $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^Q$, 令 $F_\sigma(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^Q f_\sigma(s_i)$, 可得

$\|\mathbf{s}\|_0 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} F_\sigma(\mathbf{s})$, 则式(10)可转换为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{s}} F_\sigma(\mathbf{s}) \\ & \text{s. t. } \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\theta})\mathbf{s}\|_2 \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $\|\cdot\|_2$ 表示 l_2 范数; ε 表示拟合误差上界。

平滑函数的平滑性和陡峭性对近似 l_0 范数算法的估计精度起着重要作用。平滑函数的陡峭性越好,即函数在 $[-1, 0)$ 和 $(0, 1]$ 区间内的积分面积越大,函数对 l_0 范数的近似效果越好,相应算法的估计精度会更高。此外,在求解 $F_\sigma(\mathbf{s})$ 的极值时,需用到凸优化算法,所构造函数平滑性越好,局部极值点则越少,越易于求得全局最优解。

为了提高平滑函数近似 l_0 范数的效果,本文构造了一种 EFD 函数。该类函数可以在参数 q 的控制下,构造出具有不同平滑性和陡峭性的平滑函数。EFD 函数的具体形式为

$$f_\sigma(s_i) = 1 - \exp\left(-\frac{\ln h}{\sigma^q} \lg h^{s_i^2+1}\right) \quad (13)$$

式中: $h(h>0)$ 和 $q(q>0)$ 为常数。

研究表明^[25],迭代初期选择较大的逼近因子 σ 和合适的初始解 $\mathbf{s}$ 能有效缓解梯度下降法带来的锯齿效应,从而避免陷入局部最优解。在 $h=10$ 的条件下,当式(13)选取 $q=1, q=2, q=4$ 以及 $q>4$ 时,可得到 4 种平滑性和陡峭性不同的 EFD 函数。图 1 为 4 种 EFD 函数分别在 $\sigma=10$ 和 $\sigma=0.1$ 时的近似效果图。

由图 1 可知,平滑函数的平滑性和陡峭性会受到逼近因子 σ 及初始解 $\mathbf{s}$ 的影响。当逼近因子 σ 取值较大时,平滑函数的平滑性较好,函数幅值变化较为平缓,且变化率较小。因此,相邻点的函数幅值差异较小,局部极值点较少,可以避免算法陷入局部最小值。反之,当逼近因子 σ 较小时,平滑函数更为陡峭,则有利于提高平滑函数近似 l_0 范数的效果。

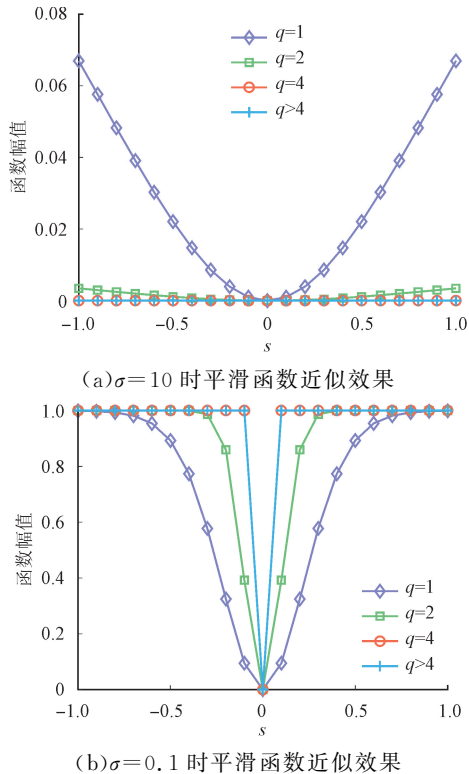


图 1 平滑函数近似效果图

Fig. 1 Approximation effect of the smoothing function

为使近似 l_0 范数算法取得更好的近似效果,同时又避免使其陷入局部最小值。当逼近因子 σ 较大时,平滑函数应展现出较好的平滑性。这有利于为后续迭代求解出合适的初始解 $\mathbf{s}$,并避免陷入局部最小值。而当逼近因子 σ 逐渐趋于 0 时,平滑函数应有较好的陡峭性,以提高对 l_0 范数的近似效果。从图 1 可以看出,所提指数族分布函数在 $q=4$ 时,平滑性和陡峭性较好,有利于提高算法的精确度。

4 在格近似 l_0 范数 DOA 估计算法

基于第 3 节的 EFD 函数,构造稀疏 DOA 估计模型 $\min_{\mathbf{s}} F_\sigma(\mathbf{s})$, s. t. $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\theta})\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{y}}$ 。该模型可以拆分为两部分求解,其表达式为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{s}} F_\sigma(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^Q f_\sigma(s_i) \\ \min_{\mathbf{s}} G(\mathbf{s}) = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\theta})\mathbf{s} \end{cases} \quad (14)$$

对于式(14)的第 1 个问题,可通过梯度下降法求解。对构造的平滑函数求导,可得函数的梯度为

$$\mathbf{d}_l = \frac{2s_l}{\sigma^q s_l^2 + \sigma^q} h^{\frac{\log s_l^2 + 1}{\sigma^q}} \quad (15)$$

进而可得到迭代计算公式为

$$s_{l+1} = s_l - u_l \mathbf{d}_l \quad (16)$$

式中: u_l 表示梯度下降的步长。随着逼近因子 σ 的降低, u_l 的值也应随之变化。本文将步长设置为

$$u_l = u_0 \sigma_l^q / 2 \quad (17)$$

式中: $u_0 (u_0 > 0)$ 为初始步长。针对式(14)的第 2 个问题,可通过牛顿-拉夫逊法求解,其第 l 次迭代公式为

$$s_{l+1} = s_l - \frac{G(s_l)}{G'(s_l)} \quad (18)$$

为了避免 $1/G'(s_l)$ 可能产生的病态问题,式(18)可转换为

$$s_{l+1} = s_l - \tilde{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^T)^{-1} (\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}} s_l) \quad (19)$$

为分析式(18)的收敛性,可将其记为

$$v(s) = s - \frac{G(s)}{G'(s_l)} \quad (20)$$

对式(20)求导可得

$$v'(s) = \frac{G(s)G''(s)}{[G'(s)]^2} \quad (21)$$

假设 s^* 是 $G(s^*) = 0$ 的最优解,且 $G'(s^*) \neq 0$,在 s^* 的邻域内,存在 $|v'(s)| < 1$,根据定点定理可证式(18)是收敛的。

为进一步提高算法的精度,给出了一种前向展望和后向延拓策略。该策略的核心是将 SL0 算法求解出的稀疏解的支撑集 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_K}]$ 作为初始支撑集。通过前向展望和后向延拓,将初始支撑集原子 $\mathbf{a}_{i_k}$ 在导向矢量矩阵中的前 1 个原子 $\mathbf{a}_{i_{k-1}}$ 和后 1 个原子 $\mathbf{a}_{i_{k+1}}$ 取出,组成原子块 $\mathbf{\Gamma}_{i_k} = [\mathbf{a}_{i_{k-1}}, \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_{k+1}}]$ 。当有 K 个目标时,稀疏解的初始支撑集有 K 原子,在导向矢量矩阵中可以对应取出 K 个原子块,其表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}_{i_1} = [\mathbf{a}_{i_1-1}, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_1+1}] \\ \mathbf{\Gamma}_{i_2} = [\mathbf{a}_{i_2-1}, \mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{a}_{i_2+1}] \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_{i_K} = [\mathbf{a}_{i_K-1}, \mathbf{a}_{i_K}, \mathbf{a}_{i_K+1}] \end{cases} \quad (22)$$

从每个原子块中各取出 1 个原子可以组成待测支撑集 $\hat{\mathbf{A}}_t (t=1, 2, \dots, 3^K)$,通过最小二乘法可以求解每个待测支撑集的残差 $\hat{\mathbf{r}}_t$,其表达式为

$$\hat{\mathbf{r}}_t = \tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{A}}_t \hat{\mathbf{p}}_t \quad (23)$$

式中: $\hat{\mathbf{p}}_t$ 为最小二乘系数。对求解出的残差矩阵 $\hat{\mathbf{r}}$

$= [\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \dots, \hat{\mathbf{r}}_K]$ 按列求 l_2 范数可得 $\boldsymbol{\chi} = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_K]$ 。选择可使残差 l_2 范数最小化的支撑集 $\hat{\mathbf{A}}_{\min}$ 为最优支撑集。根据 $\hat{\mathbf{A}}_{\min}$ 中原子在导向矢量矩阵中的位置,就可以获得目标信号在格 DOA 估计值。

将 PFLOM 与 KR 子空间方法结合,抑制冲击噪声,重构 PFLOM 矩阵,并构造稀疏 DOA 模型。利用基于 EFD 函数的近似 l_0 范数算法求解出稀疏信号 $\mathbf{s}$ 及其支撑集。然后,在该支撑集基础上,对其进行前向展望和后向延拓,并从中抽取待测支撑集。计算各待测支撑集对应的拟合残差,并选择残差 l_2 范数的最小值对应的待测支撑集为最优支撑集。最后,根据最优支撑集中的原子索引,获取目标 DOA 估计值。P-ESL0 算法的伪码如下。

算法 1 P-ESL0 算法

输入: $\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\theta}), K$;

初始化:算法初始解 $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{y}}$;逼近因子最小值 $\sigma_{\min}$;逼近因子初值 $\sigma = \max(|\mathbf{s}|)$;逼近因子递减步长 β ;内循环次数 L 。

1. while ($\sigma > \sigma_{\min}$)
2. for $l=1:L$
3. 根据式(15)求解梯度
4. 令 $\mathbf{s} = \mathbf{s} - u_l \mathbf{d}_l$
5. 令 $\mathbf{s} = \mathbf{s} - \tilde{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^T)^{-1} (\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{s})$
6. end for
7. 更新逼近因子 $\sigma_{i+1} = \beta \sigma_i$
8. end while
9. 更新式(22)、(23)
10. 更新 $\boldsymbol{\chi} = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_K]$
11. 更新最优支撑集 $\hat{\mathbf{A}}_{\min}$

输出:稀疏信号 $\hat{\mathbf{s}}$, DOA 估计值 $\tilde{\theta}$ 。

5 离格近似 l_0 范数 DOA 估计算法

5.1 P-EOGSL0 算法原理

为提高离格目标的估计精度,对式(10)中的 $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\theta})$ 求一阶泰勒展开,将离格偏差引入,从而构造离格稀疏 DOA 模型,其表达式为

$$\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}} \Delta \boldsymbol{\beta}) \mathbf{s} \quad (24)$$

式中: $\tilde{\mathbf{B}} = d\tilde{\mathbf{A}}/d\theta$ 为失配矩阵; $\Delta \boldsymbol{\beta} = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_Q)$ 为偏差矩阵,主对角元素 $\beta_q = \tilde{\theta}_q - \theta_q$,其中 θ_q 为真实 DOA 值, $\tilde{\theta}_q$ 为距离真实值最近的网格值。令 $\mathbf{u} = \Delta \boldsymbol{\beta} \mathbf{s}$,则式(24)可转换为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{s}, \mathbf{u}} \|\mathbf{s}\|_0 + \|\mathbf{u}\|_0 \\ \text{s. t. } & \|\tilde{\mathbf{y}} - (\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u})\|_2 \leq \epsilon \end{aligned} \quad (25)$$

由于 $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{u}$ 具有相同的稀疏结构,因此在求解式(25)时可以暂时忽略包含离格偏差信息的 $\mathbf{u}$,先求出 DOA 粗估计 $\mathbf{s}$,再根据 $\mathbf{s}$ 中非零元素的位置求解 $\mathbf{u}$,通过交替迭代法逐步逼近离格 DOA 值。因此,式(25)可以拆分为两部分

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}^{(r)} &= \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{s}\|_0 \\ \text{s. t. } &\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}}^{(r)} \mathbf{s}\|_2 \leq \epsilon \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^{(r)} &= \arg \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|_0 \\ \text{s. t. } &\|(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}}^{(r)} \hat{\mathbf{s}}^{(r)}) - \tilde{\mathbf{B}}^{(r)} \mathbf{u}\|_2 \leq \epsilon \end{aligned} \quad (27)$$

式中: $\hat{\mathbf{s}}^{(r)}$ 是第 r 次迭代对 $\mathbf{s}$ 的估计值; $\hat{\mathbf{u}}^{(r)}$ 是第 r 次迭代对 $\mathbf{u}$ 的估计值。

针对式(26),可利用第 4 节提出的在格近似 l_0 范数 DOA 估计算法求解出 DOA 粗估计 $\hat{\mathbf{s}}^{(r)}$ 。在求解出 $\hat{\mathbf{s}}^{(r)}$ 后,可根据 $\hat{\mathbf{s}}^{(r)}$ 的非零元素位置,通过最小二乘法求解式(27)的 $\hat{\mathbf{u}}^{(r)}$,其计算公式为

$$\hat{\mathbf{u}}^{(r)} = (\tilde{\mathbf{B}}_I^{(r)H} \tilde{\mathbf{B}}_I^{(r)})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_I^{(r)H} \mathbf{z} \quad (28)$$

式中: $\mathbf{I}$ 为 $\hat{\mathbf{s}}^{(r)}$ 的支撑集原子索引,即非零元素的索引; $\mathbf{z}$ 为求解 $\hat{\mathbf{s}}^{(r)}$ 时的残差,即 $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}}^{(r)} \hat{\mathbf{s}}^{(r)}$ 。在得到 $\hat{\mathbf{s}}^{(r)}$ 和 $\hat{\mathbf{u}}^{(r)}$ 后,通过 $\hat{\beta}_i^{(r)} = \text{Re}(\hat{u}_i^{(r)} / \hat{s}_i^{(r)})$, $\hat{s}_i^{(r)} \neq 0$ 计算对应位置的离格偏差 $\hat{\beta}_i^{(r)}$,最后更新迭代因子如下

$$\mathbf{s}^{(r+1)} = \hat{\mathbf{s}}^{(r)} \quad (29)$$

$$\mathbf{u}^{(r+1)} = \hat{\mathbf{u}}^{(r)} \quad (30)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(r)} + \boldsymbol{\beta}^{(r)} \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(r+1)} = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)}) \quad (32)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^{(r+1)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(r+1)'} \quad (33)$$

在第 4 节构造的在格稀疏 DOA 模型的基础上,将离格偏差引入模型,构造离格稀疏 DOA 模型,并通过交替迭代法,求解 DOA 粗估计 $\hat{\mathbf{s}}^{(r)}$ 和包含离格偏差信息的 $\hat{\mathbf{u}}^{(r)}$,从而获得离格 DOA 估计值。P-EOGSL0 算法的伪码算法 2 所示。

算法 2 P-EOGSL0 算法

输入: $\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), K$;

初始化:算法初始解 $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{y}}$,最大迭代次数 R ,拟合误差上界 ϵ ,重构导向矢量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$,失配矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(1)'}.$

1. while ($r \leq R$ or $\epsilon > \epsilon_0$)
2. $r = r + 1$
3. 由 P-ESL0 算法获取 $\hat{\mathbf{s}}^{(r)}$
4. 计算 $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}}^{(r)} \hat{\mathbf{s}}^{(r)}$
5. 更新 $\hat{\mathbf{u}}^{(r)} = (\tilde{\mathbf{B}}_I^{(r)H} \tilde{\mathbf{B}}_I^{(r)})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_I^{(r)H} \mathbf{z}$
6. 更新 $\hat{\beta}_i^{(r)} = \text{Re}(\hat{u}_i^{(r)} / \hat{s}_i^{(r)})$
7. 更新迭代因子式(29)~(33)
8. 更新残差 $\epsilon = \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}}^{(r+1)} \hat{\mathbf{s}}^{(r+1)} - \tilde{\mathbf{B}}^{(r+1)} \hat{\mathbf{u}}^{(r+1)}\|_2$

9. end while

输出:稀疏信号 $\hat{\mathbf{s}}^{(r+1)}$, DOA 估计值 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)}$ 。

5.2 冲击噪声下的克拉美罗界

非高斯噪声背景下 DOA 估计算法的克拉美罗界(CRB)的封闭表达式为

$$B_{\text{CRB}} = \frac{1}{C_a} \left\{ \sum_{t=1}^T \text{Re} [\mathbf{S}_d^H(t) \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S}_d(t)] \right\} \quad (34)$$

式中: $\mathbf{S}_d(t) = \text{diag}[s_1(t), \dots, s_K(t)]$ 为接收信号的对角矩阵; $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) = [\partial \tilde{\mathbf{a}}(\theta_1) / \partial \theta_1, \dots, \partial \tilde{\mathbf{a}}(\theta_Q) / \partial \theta_Q]$ 是导向矢量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的微分; $\tilde{\mathbf{A}}^\perp = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^H$ 为导向矢量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的正交补空间的投影;系数 C_a 可表示为

$$C_a = \int_0^\infty \frac{(f'(x))^2}{f(x)} x dx \quad (35)$$

式中: $x = |g|$ 为 Alpha 噪声模值; $f(x)$ 是 x 的概率密度函数。值得注意的是,由于 Alpha 稳定分布只有当 $\alpha = 1$ 或 $\alpha = 2$ 时才有封闭概率密度函数,因此可以计算出 $C_1 = 1/2\gamma$ 和 $C_2 = 3/5\gamma^2$,通过一阶线性插值近似得出 C_a , $1 < \alpha < 2$ 。

5.3 计算复杂度分析

本文所提算法的计算复杂度包含如下部分。

(1)预处理。利用 PFLOM 抑制信号中的冲击噪声,该部分计算复杂度为 $O(K)$ 。

(2)初始化。求解初始解 $\mathbf{s}$ 的复杂度取决于 $\tilde{\mathbf{A}}$ 。由于 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的维度是 $M^2 \times Q$,因此该部分计算复杂度为 $O(M^6 + M^4 Q)$ 。

(3)更新梯度并按负梯度方向下降的计算复杂度为 $O(2K)$ 。

(4)前向和后向延拓的计算复杂度为 $O(3K)$ 。

(5)更新迭代因子的计算复杂度为 $O(K)$ 。

(6)交替迭代的计算复杂度为 $O(K)$ 。

将本文所提在格 P-ESL0 算法记为算法 1,离格 P-EOGSL0 算法记为算法 2。表 1 为 4 种算法的计算复杂度对比。从表 1 中可知,上述 4 种算法的计算复杂度基本处于同一数量级,与另外 2 种算法相比,本文所提算法的计算复杂度略有提高。

表 1 4 种算法的复杂度对比

Table 1 Comparison of the complexities of four algorithms

算法	复杂度
本文算法 1	$O(M^6 + M^4 Q) + O(6K)$
本文算法 2	$O(M^6 + M^4 Q) + O(8K)$
R-OGOMP	$O(Q(2M)^2) + O(Q) + O(4K)$
R-OMP	$O(Q(2M)^2) + O(Q)$

6 实验结果与分析

为验证所提算法的有效性和优越性,通过仿真实验在不同条件下对比 R-OGOMP 算法、R-OMP 算法、本文算法 1 及本文算法 2 的均方根误差。附加冲击噪声信号的广义信噪比(GSNR)定义为

$$R_{\text{GSN}} = 10\lg(\omega_s/\gamma) \tag{36}$$

式中: ω_s 为信号源平均功率。

DOA 估计的均方根误差(RMSE)表示为

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{KM_c} \sum_{m=1}^{M_c} \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_k^m - \theta_k)^2} \tag{37}$$

式中: M_c 表示蒙特卡罗实验次数; $\hat{\theta}_k^m$ 表示第 k 个信号源在第 m 次数实验中的 DOA 估计值; θ_k 表示第 k 个信号源的 DOA 真实值。

实验 1 指数族分布函数重构效果的分析与验证。实验条件设置为阵元素 $M = 8$, 信号 $\mathbf{x}$ 是维度为 181 的向量, 稀疏度 $K = 2$, 冲击噪声特征指数 $\alpha \in (0, 2]$ 。在平滑参数 q 取值不同的条件下, EFD 函数近似 l_0 范数算法的恢复误差如图 2 所示。

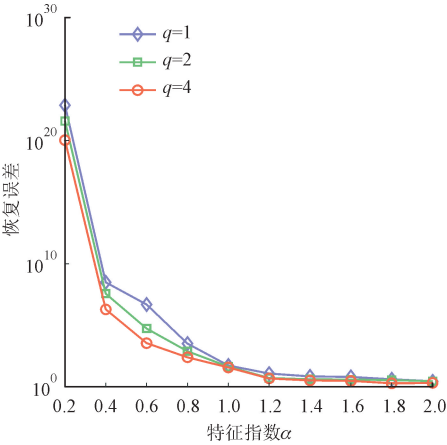


图 2 不同 EFD 函数信号恢复误差的对比

Fig. 2 Comparison of signal recovery error for different EFD functions

从图 2 可知: 随着特征指数 α 的逐渐增大, 3 种平滑函数的恢复误差均逐渐减小; 当 $q = 4$ 时, 信号恢复误差最小。由第 3 节的结论可知, $q = 4$ 的 EFD 函数是平滑性和陡峭性综合最优的, 该实验验证了平滑函数近似 l_0 范数的效果, 与其平滑性和陡峭性成正相关关系。

实验 2 算法有效性实验。实验条件设置为阵元数

$M = 8$, 广义信噪比为 0 dB, 快拍数 $N = 300$, 噪声特征指数 $\alpha = 1.5$, 分数低阶参数 $b = 0.7$, 网格间距为 1° 。假设有 3 个远场窄带信号源, 分别从 -30.5° 、 15.6° 以及 45.4° 入射到阵列上。图 3 和图 4 分别为本文算法 1 和本文算法 2 的空间谱。从图 3 和图 4 可以看出, 本文所提两种算法均可成功估计出目标信号的波达角, 但本文所提离格 P-EOGSL0 算法(本文算法 2)的精度更高。

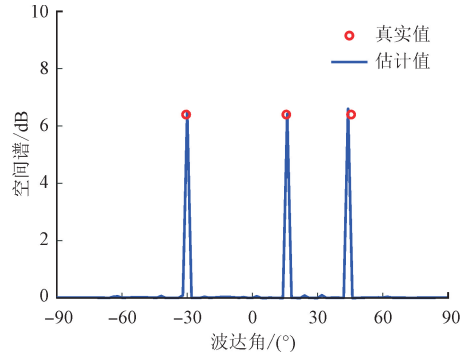


图 3 本文算法 1 的空间谱

Fig. 3 Spatial spectrum of this article's algorithm 1

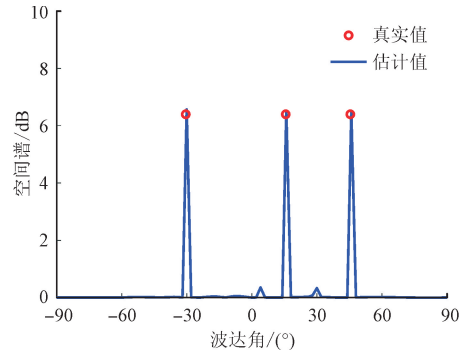


图 4 本文算法 2 算法的空间谱

Fig. 4 Spatial spectrum of this article's algorithm 2

实验 3 均方根误差实验。实验条件设置为阵元数 $M = 8$, 快拍数 $N = 300$, 广义信噪比为 8 dB, 特征指数 $\alpha = 1.5$, 分数低阶参数 $b = 0.7$, 网格间距为 1° , 蒙特卡罗实验次数 $M_c = 200$ 。假设有 2 个远场窄带信号入射到阵列上, 其方向分别从区间 $[-19^\circ, -20^\circ]$ 和区间 $[25^\circ, 26^\circ]$ 内随机取值。

图 5 为 DOA 估计均方根误差随广义信噪比的变化。从图 5 中可知, 随着广义信噪比的提高, 4 种算法的均方根误差均逐渐减小, 但本文所提算法的

估计性能明显优于其他算法,尤其是与正交匹配追踪算法相比,在信噪比为 -8 dB 时所提算法的 DOA 估计精度提高了 66.36% ,充分表明了本文所提算法在低信噪比条件下,可以实现更高精度的 DOA 估计。

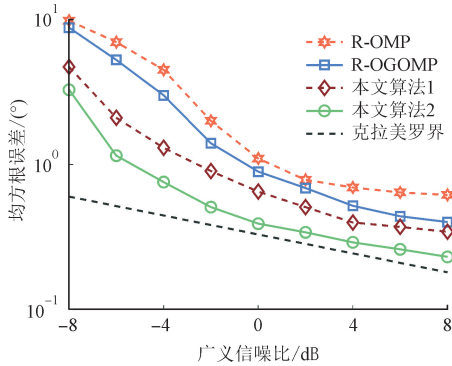


图 5 DOA 均方根误差随广义信噪比的变化
Fig. 5 DOA estimation RMSE varying with GSNR

图 6 为 DOA 估计均方根误差随快拍数的变化。由图 6 可知,当快拍数逐渐增加时,4 种算法的均方根误差均逐渐减小,但本文算法 2 和本文算法 1 的均方根误差均小于另外两种算法,尤其是在较少快拍数条件下,本文算法的优势更加明显。以上表明,本文算法 2 在较小快拍数条件下可以实现更高精度的 DOA 估计。

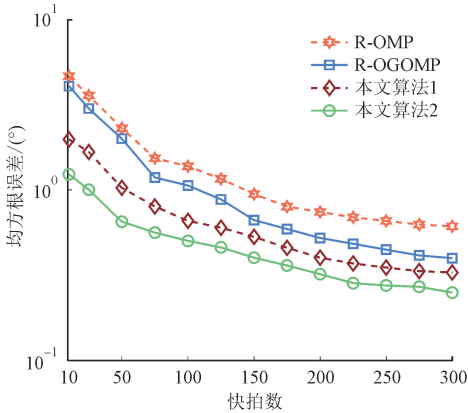


图 6 DOA 估计均方根误差随快拍数的变化
Fig. 6 DOA estimation RMSE varying with snapshots

图 7 为 DOA 估计均方根误差随特征指数的变化。从图 7 中可知,所提算法与另外两种相比具有更小的均方根误差,尤其是当特征指数 $\alpha < 1$ 时 R-OMP 和 R-OGOMP 算法的估计效果已基本失效,而所提算法仍然具有较好的估计性能,说明其适用

范围更广。当特征指数大于 0.6 时,本文算法 2 的 DOA 估计均方根误差小于 1° ,优势更加明显。另外当 $\alpha=2$ 时,冲击噪声退化为高斯噪声,此时本文算法仍然是有效的。

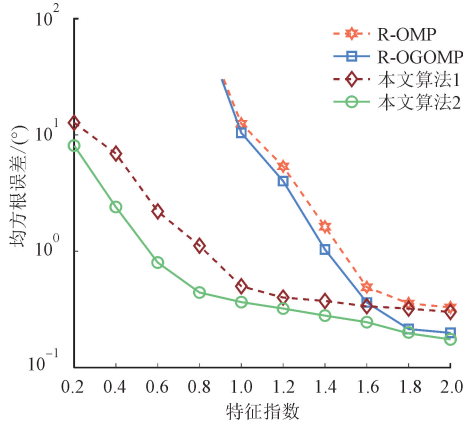


图 7 DOA 估计均方根误差随特征指数的变化
Fig. 7 DOA estimation RMSE varying with characteristic index

图 8 为 DOA 估计均方根误差随阵元数的变化。当阵元数 M 增加时,4 种算法的均方根误差均逐渐减小。当阵元数较小时,所提算法的均方根误差要小于在格 R-OMP 算法和离格 R-OGOMP 算法,而本文算法 2 在阵元数大于 10 之后,其均方根误差均在 0.1° 以下,远小于另外 3 种算法。实验结果表明,本文所提算法可在小阵元数条件下可以实现更高精度的 DOA 估计。

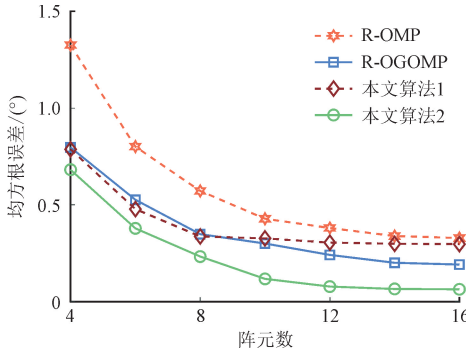


图 8 DOA 估计均方根误差随阵元数的变化
Fig. 8 DOA estimation RMSE varying with number of array elements

图 9 为 DOA 估计均方根误差随间隔角度的变化。从图 9 中可知,在不同波达角间隔条件下,本文算法 2 和本文算法 1 的均方根误差均小于另外两种算法,尤其是本文算法 2 的均方根误差最小,表明本文所提算法具有更高的分辨力。

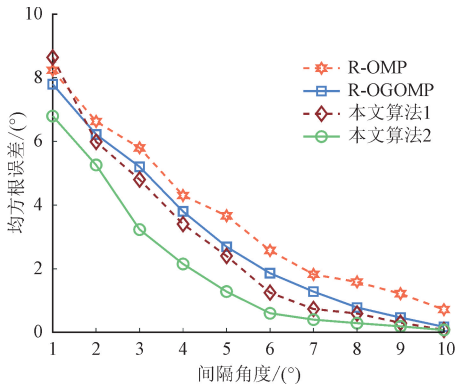


图 9 DOA 估计均方根误差随间隔角度的变化

Fig. 9 DOA estimation RMSE varying with interval angle

7 结束语

针对冲击噪声背景下现有 DOA 估计算法精度较低的问题,提出了一种抗冲击噪声的高精度 DOA 估计算法。首先,将 PFLOM 与 KR 子空间法相结合,抑制冲击噪声的影响,并重构 PFLOM 矩阵,从而构造出基于 PFLOM 的稀疏 DOA 模型。其次,构造 EFD 函数,并分析 EFD 函数的平滑性和陡峭性,进而提出 EFD 函数近似 l_0 范数算法。然后,利用所提近似 l_0 范数算法求解稀疏 DOA 模型可得稀疏解及其支撑集。根据求得的支撑集,进行前向和后向延拓以扩充支撑集,并通过最小二乘法求解各个支撑集的拟合残差,从而获得能使残差 l_2 范数最小化的支撑集。最后,根据该支撑集中的原子索引,即可获得信号的 DOA 估计值。同时,对导向矢量求一阶泰勒展开,将离格偏差引入其中,构建出基于 PFLOM 的离格稀疏 DOA 模型,且交替迭代求解 DOA 粗估计和离格偏差,最终获得离格 DOA 估计值。通过仿真实验对本文所提算法进行了充分验证,结果表明本文算法可以实现冲击噪声下的高精度 DOA 估计。

参考文献:

[1] 侯进, 陈鑫强. 基于几何序列分解与稀疏重构的 DOA 估计 [J]. 通信学报, 2023, 44(1): 153-163.
HOU Jin, CHEN Xinqiang. DOA estimation based on geometric sequence decomposition and sparse reconstruction [J]. Journal on Communications, 2023, 44(1): 153-163.

[2] 胡盈绮, 邓科, 殷勤业. 采用前向空间平滑分组的混合信号波达方向估计算法 [J]. 西安交通大学学报, 2020, 54(9): 164-172.
HU Yingqi, DENG Ke, YIN Qinye. Direction of arri-

val estimation method for mixed signals by forward spatial smooth grouping [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2020, 54(9): 164-172.

[3] ELBIR A M, CELIK A, ELTAWIL A M. NEAT-MUSIC: auto-calibration of DOA estimation for terahertz-band massive MIMO systems [J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2024, 13(2): 451-455.

[4] CHEN Zhimin, CHEN Peng, GUO Ziyu, et al. A RIS-based vehicle DOA estimation method with integrated sensing and communication system [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2024, 25(6): 5554-5566.

[5] MERKOFER J P, REVACH G, SHLEZINGER N, et al. DA-MUSIC: data-driven DoA estimation via deep augmented MUSIC algorithm [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2024, 73(2): 2771-2785.

[6] LIN Hongguang, JIN Longsheng, DING Ruixuan, et al. DOA estimation method for incoherently distributed sources based on spatial-temporal generalized ESPRIT [J]. AEU-International Journal of Electronics and Communications, 2023, 168: 154701.

[7] GAO Wei, ZHU Shuping, LI Xiaolei, et al. Frequency-difference MUSIC: a method for DOA estimation in inhomogeneous media [J]. Signal Image and Video Processing, 2024, 18(10): 7029-7040.

[8] 刘素娟, 崔程凯, 郑丽丽, 等. 基于压缩感知的贪婪类重构算法原子识别策略综述 [J]. 电子与信息学报, 2023, 45(1): 361-370.
LIU Sujuan, CUI Chengkai, ZHENG Lili, et al. A review of atom recognition strategies for greedy class reconstruction algorithms based on compressed sensing [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2023, 45(1): 361-370.

[9] LAL B, GRAVINA R, SPAGNOLO F, et al. Compressed sensing approach for physiological signals: a review [J]. IEEE Sensors Journal, 2023, 23(6): 5513-5534.

[10] SHAN Zebiao, YAO Ruiguang, LIU Xiaosong, et al. DOA estimation for acoustic vector sensor array based on fractional order cumulants sparse representation [J]. Physical Communication, 2024, 67: 102486.

[11] YANG Jie, YANG Yixin, LIAO Guisheng, et al. A super-resolution direction of arrival estimation algorithm for coprime array via sparse Bayesian learning inference [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2018, 37(5): 1907-1934.

[12] 单泽彪, 常立民, 刘小松, 等. 基于自然对数复合函数近似 l_0 范数的 DOA 估计 [J]. 兵工学报, 2023, 44(5):

- 1521-1528.
- SHAN Zebiao, CHANG Limin, LIU Xiaosong, et al. DOA estimation based on approximate L_0 norm of natural logarithm composite function [J]. *Acta Armamentarii*, 2023, 44(5): 1521-1528.
- [13] CUI Wei, SHEN Qing, LIU Wei, et al. Low complexity DOA estimation for wideband off-grid sources based on re-focused compressive sensing with dynamic dictionary [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2019, 13(5): 918-930.
- [14] AUSTIN C D, ASH J N, MOSES R L. Dynamic dictionary algorithms for model order and parameter estimation [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(20): 5117-5130.
- [15] 赵洋, 石屹然, 石要武. 基于噪声子空间矢量的 OMP 离格 DOA 估计 [J]. *光学精密工程*, 2020, 28(10): 2384-2391.
- ZHAO Yang, SHI Yiran, SHI Yaowu. DOA estimation based on OMP modified by noise subspace vectors [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2020, 28(10): 2384-2391.
- [16] MA Yanan, CAO Xianbin, WANG Xiangrong. Multi-source off-grid DOA estimation using iterative phase offset correction in coarray domain [J]. *Digital Signal Processing*, 2021, 112: 102998.
- [17] ZHOU Chengwei, GU Yujie, SHI Zhiguo, et al. Off-grid direction-of-arrival estimation using coprime array interpolation [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2018, 25(11): 1710-1714.
- [18] YIN Shijia, LI Li, ZHAO Yang, et al. Super-resolution compressive spherical beamforming based on off-grid sparse Bayesian inference [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 193: 110248.
- [19] 单泽彪, 刘小松, 史红伟, 等. 动态压缩感知波达方向跟踪算法 [J]. *吉林大学学报(工学版)*, 2018, 48(6): 1938-1944.
- SHAN Zebiao, LIU Xiaosong, SHI Hongwei, et al. DOA tracking algorithm using dynamic compressed sensing [J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2018, 48(6): 1938-1944.
- [20] LI Sen, LIN Bin. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals in impulsive noise [C]//2015 IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015: 339-343.
- [21] LIANG Longkai, SHI Yiran, SHI Yaowu, et al. Direction of arrival estimation with off-grid target based on sparse reconstruction in impulsive noise [J]. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2021, 40(1): 315-331.
- [22] CHEN Feng, YANG Desen, MO Shiqi. A DOA estimation algorithm based on eigenvalues ranking problem [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 1-15.
- [23] DAI J, QIU Tianshuang, LUAN Shengyang, et al. An improved Toeplitz approximation method for coherent DOA estimation in impulsive noise environments [J]. *Entropy*, 2023, 25(6): 960.
- [24] LI Sen, HE Rongxi, LIN Bin, et al. DOA estimation based on sparse representation of the fractional lower order statistics in impulsive noise [J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, 5(4): 860-868.
- [25] MOHIMANI H, BABAIE-ZADEH M, JUTTEN C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed ℓ^0 norm [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(1): 289-301.
- [26] KOZICK R J, SADLER B M. Maximum-likelihood array processing in non-Gaussian noise with Gaussian mixtures [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(12): 3520-3535.

(编辑 刘杨 陶晴)