

考虑圆弧修形和交错角的人字齿轮啮合行为分析

侯晓燕¹, 王曦^{1,2}, 周越¹

(1. 北京交通大学机械与电子控制工程学院, 100044, 北京;

2. 北京交通大学智慧高铁系统前沿科学中心, 100044, 北京)

摘要: 针对人字齿轮制造加工导致左、右齿面存在不同程度的对称性偏差, 以及传统轴向位移迭代法受误差尺度限制的问题, 以某型高速列车人字齿轮为研究对象, 提出了一种新的轴向位移迭代方法, 并建立人字齿轮承载接触分析(LTCA)模型。该模型以有限元法和有限长线接触理论为基础, 在载荷-变形协调方程中考虑不同啮合点处螺旋角的差异, 采用牛顿迭代法计算主动齿轮轴向位移, 通过 LTCA 模型分析了轮齿圆弧修形与齿面交错角对啮合激励和载荷分布的影响。研究结果表明: 牛顿迭代法可适用于含不同误差类型的人字齿轮 LTCA 模型, 且小误差下牛顿迭代法比传统迭代法的计算时间减少 70%, 圆弧修形量从 $2\text{ }\mu\text{m}$ 增至 $15\text{ }\mu\text{m}$, 时变啮合刚度均值降低 38%, 啮合误差均值提高 39%; 当输入扭矩为 $500\text{ N}\cdot\text{m}$ 时, 两侧齿面中部最大法向啮合力由 100 N 增大到 370 N ; 随着齿面交错角的增大, 时变啮合刚度均值提高, 啮合误差均值减小, 交错角相位差从 0 增加到 π , 时变啮合刚度、啮合误差的幅值分别降低了 54% 和 79%。该研究结果可为人字齿轮啮合稳定性的提高提供新思路。

关键词: 人字齿轮; 承载接触分析; 圆弧修形; 齿面交错角; 轴向位移; 牛顿迭代法

中图分类号: TH132.41 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202504017 **文章编号:** 0253-987X(2025)04-0180-13

Analysis on the Meshing Behavior of Double Helical Gear Considering Arc Modification and Stagger Angle

HOU Xiaoyan¹, WANG Xi^{1,2}, ZHOU Yue¹

(1. School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. Frontiers Science Center for Smart High-Speed Railway System, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: In response to the asymmetrical deviations in the left and right tooth surfaces caused by the manufacturing and processing of double helical gears, as well as the limitations of traditional axial displacement iterative methods due to error scale, a new axial displacement iterative method is proposed based on a certain type of high-speed train double helical gear. A loaded tooth contact analysis (LTCA) model is established based on the finite element method (FEM) and finite line contacts theory. It considers the difference of helix angles on different meshing points in the load-deformation coordination equation. The Newton iterative method is used to calculate the axial displacement of the driving gear. The LTCA model is employed to analyze the effects of circular arc modification and tooth surface interference angle on meshing excitation and load distribution.

收稿日期: 2024-09-21。 作者简介: 侯晓燕(2000—), 女, 硕士生; 王曦(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12302238); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2022JBQY007)。

网络出版时间: 2024-11-28

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20241126.2027.002>

The research results indicate that the Newton iterative method is suitable for the LTCA model of double helical gears with different types of different types of errors. Under small errors, the Newton iterative method reduces the calculation time by 70% compared to traditional iterative methods. With the arc modification increasing from $2\text{ }\mu\text{m}$ to $15\text{ }\mu\text{m}$, the time-varying meshing stiffness decreases by 38%, the average meshing error increases by 39%, and the maximum normal meshing force at the middle of the tooth surface increases from 100 N to 370 N when the input torque is $500\text{ N}\cdot\text{m}$. As the tooth surface stagger angle increases, the average time-varying meshing stiffness increases, the average meshing error decreases, and the phase difference of the stagger angle increases from 0 to π . The amplitude of the time-varying meshing stiffness and meshing error decreases by 54% and 79%, respectively. These research findings provide new insights for improving the meshing stability of double helical gears.

Keywords: herringbone gear; loaded contact analysis; lead crowning modification; tooth surface stagger angle; axial displacement; Newton's iteration method

人字齿轮由两个螺旋角相同、旋向相反的斜齿轮组成,由于具有高负载能力、传动平稳、无轴向力等优点,因此被广泛应用于船舶与航空领域^[1-2]。随着我国高速列车运行速度的提升,高速列车传动系统将传递更高频次的齿轮啮合力。为了消除斜齿轮啮合的轴向分力对传动系统中关键部件力学性能的负面影响,高速列车传动系统开始采用人字齿轮传动方式,齿轮啮合过程中产生的周期性变化啮合激励将影响传动系统的动态行为^[3-6]。因此,分析人字齿轮的啮合激励特征对研究高速列车传动系统振动稳定性有着重要意义。

由于成本低、效率高,轮齿接触分析(TCA)模型被广泛应用于分析齿轮啮合激励特征^[7-10]。随着研究不断深入,研究人员开始意识到扭矩对齿轮啮合激励特征的影响。Litvin等^[11]在TCA模型的基础上发展并完善了轮齿承载接触分析(LTCA)模型。方宗德^[12]提出了考虑齿面几何形态的斜齿轮LTCA模型,将齿轮几何分析与力学分析进行了有机结合。曹雪梅等^[13]基于弧齿锥齿轮的LTCA模型,提出了承载传动误差简化计算公式,并通过与有限元法计算结果的比较,证明了其合理性。马登秋等^[14]基于几何接触分析、有限元法和承载接触分析,研究了齿面修形对变双曲圆弧齿线圆柱齿轮承载接触特性的影响。

与斜齿轮啮合相比,人字齿轮LTCA模型需满足轴向载荷平衡条件。王成等^[15]将变形协调方程与轴向力平衡方程、非嵌入方程联立,提出了考虑轮辋结构变形和小轮浮动的人字齿轮LTCA数值计算方法。王峰等^[16]提出一种计算人字齿轮小齿轮轴向窜动的方法,建立了考虑轴向窜动的人字齿轮LTCA模型,分析了修形和负载对啮合刚度的影

响。刘玄等^[17]根据轴向力差判断窜动方向优化轴向位移迭代过程,分析了小齿轮轴向窜动和齿向修形对载荷分布的综合影响。蒋进科等^[18]针对单排人字行星齿轮啮合,提出了考虑构件浮动的齿面承载接触分析数值方法,更准确地反映了齿面分布力系的耦合作用。受加工安装误差的影响,人字齿轮左、右齿面存在一定的不对称性偏差。文献[19-20]提出一种考虑齿距偏差的人字齿轮LTCA模型,研究分析了长周期啮合激励对人字齿轮副动态响应的影响。李纬国等^[21]建立含对称度误差的人字齿轮LTCA模型,分析了对称度误差对人字齿轮轮齿接触和轴向振动的影响。Kang等^[22-23]提出双斜齿轮副齿面交错角概念,搭建了可自定义交错角的双斜齿轮试验机,对双斜齿轮副准静态和动态行为进行了实验和理论研究。李栋梁等^[24]建立了含交错角的人字齿轮模型,利用ROMAX软件分析了交错角对人字齿轮副轴向力及动态性能的影响,但未研究对轴向位移和齿面载荷分布的影响。目前,有关交错角对人字齿轮副啮合激励与啮合行为影响的研究较少,且尚未有考虑齿面交错角的人字齿轮LTCA模型。同时,现有的人字齿轮轴向位移计算方法仅考虑了小误差,未验证其是否适用于含齿面交错角等大误差的人字齿轮LTCA模型。

鉴于以上分析,本文提出一种新的轴向位移迭代方法,以某型高速列车人字齿轮为研究对象建立人字齿轮LTCA模型。该模型考虑了主动齿轮轴向移动和啮合点螺旋角变化,利用牛顿迭代法平衡左、右斜齿轮副轴向载荷,精确计算含大齿面交错角的人字齿轮法向啮合激励与轴向位移,同时考虑轮齿圆弧修形的影响,通过模型揭示了轮齿圆弧修形和齿面交错角对人字齿轮啮合激励的影响规律。

1 人字齿轮承载接触分析模型

1.1 人字齿轮载荷-变形协调方程组

齿轮的啮合可以等效为两弹性圆柱体的接触过程,通常认为是沿接触椭圆长轴方向的线接触。以人字齿轮一侧斜齿轮副为例,假设外力 P 作用下,主、从动齿轮沿齿面的法向相对移动为 δ ,两弹性齿面接触并产生变形,如图1所示,其中虚线为主、从动齿轮齿面初始位置,实线为齿面啮合接触变形后实际位置。将接触线离散为一系列接触点,则产生变形的点满足变形协调条件

$$u_{pi} + u_{gi} + \epsilon_i = \delta \quad (1)$$

式中: u_{pi} 、 u_{gi} 分别为主、从动齿轮在 i 点的弹性变形; ϵ_i 为 i 点的初始间隙; δ 为两齿轮的相对接触位移。

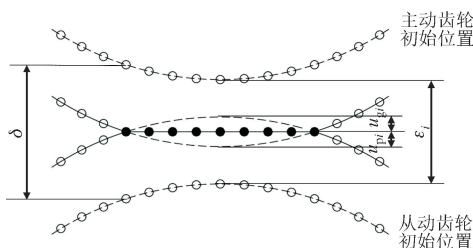


图1 人字齿轮一侧斜齿轮副啮合示意图

Fig. 1 Illustration of helical gear pair meshing of one side of herringbone gear

传统齿面接触承载分析通过有限元法得到齿面法向柔度系数,但计算精度和效率受网格密度的影响。Vedmar 等^[25]提出将有限元法与局部赫兹接触解析表达式相结合计算轮齿变形。Chang 等^[26]将轮齿变形分为线性宏观变形和非线性局部变形,其中前者与载荷之间为线性关系,可由有限元子结构法和二维插值得到的齿面宏观柔度系数表示;而每个啮合点对应的局部有限长线接触弹性变形被认为与载荷之间存在非线性关系^[27],计算公式为

$$\begin{cases} u_{ci} = \frac{f_{ni}}{\pi l_i E^*} \ln \left(\frac{6.59 l_i^3 E^* (R_{pi} + R_{gi})}{f_{ni} R_{pi} R_{gi}} \right) \\ E^* = \left(\frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_g^2}{E_g} \right)^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

式中: u_{ci} 为啮合点 i 处局部接触变形; f_{ni} 为啮合点 i 处的法向啮合力; l_i 为啮合点接触线长度; E^* 为线接触材料参数,与主、从动齿轮材料的弹性模量 E_p 、 E_g 及泊松比 ν_p 、 ν_g 有关; R_{pi} 、 R_{gi} 为主、从动齿轮啮合点 i 处的法向曲率半径。式(1)可以改写为

$$\sum_{j=1}^k (\lambda_{pij} + \lambda_{gij}) f_{nj} + u_{ci} + \epsilon_i = \delta \quad (3)$$

式中: k 为该时刻左、右斜齿轮副上的啮合点总数; λ_{pij} 、 λ_{gij} 为主、从动齿轮上啮合点 j 对啮合点 i 的宏观变形柔度系数; f_{nj} 为啮合点 j 处的法向啮合力。

根据几何关系将轴向移动叠加到初始间隙中,由承载接触变形条件和力平衡条件,可得某一啮合时刻下人字齿轮副载荷-变形协调方程组,表示如下

$$\begin{cases} -\lambda_n f_n - u_c + d + \delta = \epsilon \\ \mathbf{I}^T f_n = F_n \\ F_{aL} = F_{aR} \\ d_i = 0, f_{ni} > 0 \\ d_i > 0, f_{ni} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: λ_n 为齿轮整体柔度矩阵; f_n 为啮合点法向啮合力向量; u_c 为接触点局部接触变形向量; d 为啮合后接触点的剩余间隙向量; δ 为两齿轮相对接触位移向量; ϵ 为接触点初始间隙向量; $\mathbf{I}$ 为各分量均为1的列向量; F_n 为总啮合力; F_{aL} 、 F_{aR} 为左、右斜齿轮副轴向力。利用两层迭代法求解式(4),得到该啮合步下的载荷分布、静态传递误差及轴向位移,再由啮合前后变形协调关系,得到斜齿轮副啮合刚度和综合啮合误差^[26]。

人字齿轮副啮合面及啮合点的分布如图2所示。图中给出了人字齿轮左、右斜齿轮副啮合面,面内离散点为啮合点。 P_{bt} 为基圆齿距,表示某一啮合时刻下相邻轮齿啮合线沿 y 轴方向的距离,其内的啮合线代表一个啮合周期,包含三齿啮合和双齿啮合两部分。对啮合周期内的每条啮合线进行承载接触分析,并将同一啮合时刻的左、右斜齿轮计算结果相加,可得到人字齿轮时变啮合激励。值得注意的是,提取柔度系数时是对整个人字齿轮进行有限元建模,因此 λ_n 同时包含左、右两个斜齿轮,且各斜齿轮柔度矩阵之间存在耦合矩阵。

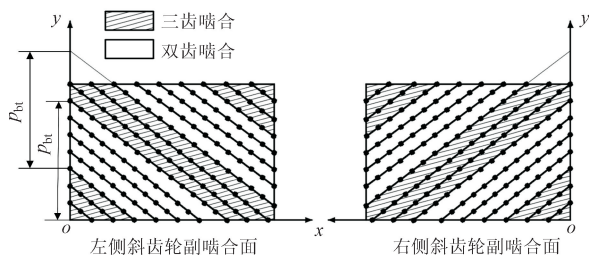


图2 人字齿轮副啮合面及啮合点分布

Fig. 2 Distribution of meshing points on herringbone gear

1.2 人字齿轮轴向力计算

斜齿轮啮合受力分析如图3所示,其中圆周力 p_t 、法向力 p_n 和轴向力 p_a 的计算公式分别为

$$\begin{cases} p_t = T_1/R \\ p_n = p_t/(\cos \alpha_n \cos \beta) \\ p_a = p_n \cos \alpha_n \cos \gamma \end{cases} \quad (5)$$

式中: T_1 为齿轮扭矩; R 为分度圆半径; β 为分度圆螺旋角; α_n 为法面分度圆压力角; γ 为轴向夹角。

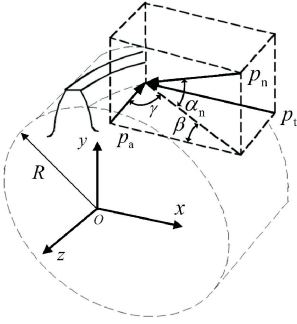


图3 斜齿轮啮合受力分析示意图

Fig. 3 Illustration of meshing force on helical gear

螺旋角通常是指斜齿轮分度圆螺旋角,但实际上齿面不同啮合点的螺旋角并不完全相同。由于齿面是等距螺旋面,斜齿轮齿廓上任意圆的螺旋角和分度圆螺旋角满足以下关系

$$\tan \beta_k = \frac{R_k}{R} \tan \beta \quad (6)$$

式中: β_k 、 R_k 分别为齿廓上任意圆的螺旋角和半径。

渐开线斜齿轮啮合面与两齿轮的基圆相切,啮合线与齿轮轴向夹角为螺旋角,啮合过程如图4所示,其中平面 $N_1 N_2 N_3 N_4$ 为理论啮合面,平面 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 为实际啮合面。主动齿轮从靠近齿根处的 B_1 点进入啮合,随着齿轮转动,齿面上形成与轴线夹角为螺旋角的啮合线,最后在靠近齿顶处的 B_3 点啮出。以 B_1 为原点建立啮合面局部坐标系 $O_M X_M Y_M$,啮合点 m 的坐标 (X_m, Y_m) 可根据图2插值得到。 m' 点为 m 点在 $B_1 B_2$ 连线上的投影,定义 l_{pg} 为点 O_p 到 O_g 的距离, l_1 为点 N_1 到 B_1 的距离,根据几何关系可得 m' 点距主动齿轮基圆圆心 O_p 的距离 $R_{m'p}$ 为

$$\begin{cases} R_{m'p} = \sqrt{R_{pb}^2 + (l_1 + Y_M^2)} \\ l_1 = l_{pg} \sin \alpha_{tp} - \sqrt{R_{ga}^2 - R_{gb}^2} \end{cases} \quad (7)$$

式中: R_{pb} 为主动齿轮基圆半径; α_{tp} 为主动齿轮基圆端面压力角; R_{ga} 、 R_{gb} 为从动齿轮齿顶圆半径和基圆半径。啮合点 m 对应的螺旋角和轴向夹角分别为

$$\beta_m = \arcsin \left(\frac{R_{m'p}}{R} \tan \beta \right) \quad (8)$$

$$\gamma_m = \frac{\pi}{2} - \beta_m \quad (9)$$

假设某一啮合时刻下人字齿轮左侧斜齿轮副啮合点数为 k_L ,右侧斜齿轮副啮合点数为 k_R ,则轴向力平衡方程可写为

$$\sum_{i=1}^{k_L} f_{ni} \cos \alpha_n \cos \gamma_i = \sum_{j=1}^{k_R} f_{nj} \cos \alpha_n \cos \gamma_j \quad (10)$$

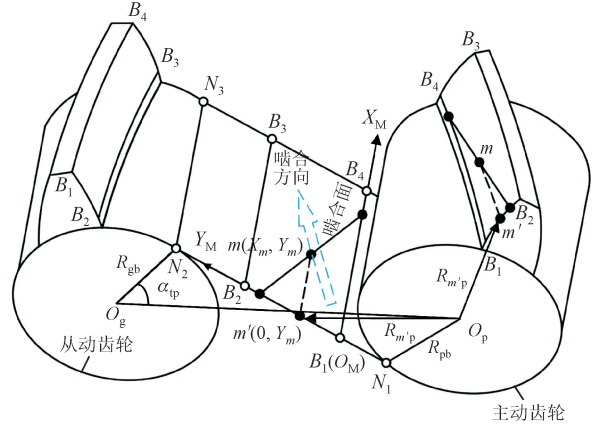


图4 斜齿轮啮合进程示意图

Fig. 4 Illustration of the meshing process of helical gear

1.3 人字齿轮轴向位移计算

为保证含大误差人字齿轮承载接触模型收敛,本文基于传统迭代方法^[16],进一步采用牛顿迭代法,提出了一种考虑齿面交错角的轴向位移计算方法。牛顿迭代法基本思想是:根据 Taylor 展开将非线性方程转化为线性方程,利用切线逐步逼近曲线,找到函数的0点。定义轴向移动量为 η_z ,轴向移动会导致每个啮合点的啮合力变化,故轴向力差 ΔF_a 可认为是 η_z 的函数,求解的非线性方程为

$$\Delta F_a(\eta_z) = F_{aL}(\eta_z) - F_{aR}(\eta_z) =$$

$$\sum_{i=1}^{k_L} (f_{ni} \cos \alpha_n \cos \gamma_i) - \sum_{j=1}^{k_R} (f_{nj} \cos \alpha_n \cos \gamma_j) = 0 \quad (11)$$

由于 $\Delta F_a(\eta_z)$ 的导数无法直接求解得到,因此采用割线斜率 K 代替函数局部导数

$$K = \frac{\Delta F_{an} - \Delta F_{a(n-1)}}{\eta_{zn} - \eta_{z(n-1)}}, n \geq 1 \quad (12)$$

收敛条件为

$$\frac{|\Delta F_a(\eta_z)|}{F_{aL}(\eta_z) + F_{aR}(\eta_z)} < 0.0001 \quad (13)$$

给定初始轴向移动量 η_{z0} ,根据式(4)计算初始轴向力差 ΔF_{a0} ,然后采用传统迭代方法得到第一次迭代结果 η_{z1} 和 ΔF_{a1} ,之后根据这两次结果结合式(12)进行迭代计算,表示为

$$\eta_{z(n+1)} = \eta_{zn} - \frac{\Delta F_{an}}{(\Delta F_{an} - \Delta F_{a(n-1)})/(\eta_{zn} - \eta_{z(n-1)})}, n \geq 1 \quad (14)$$

直至轴向力差 ΔF_a 满足收敛条件后,输出轴向位移。其计算流程如图5所示。

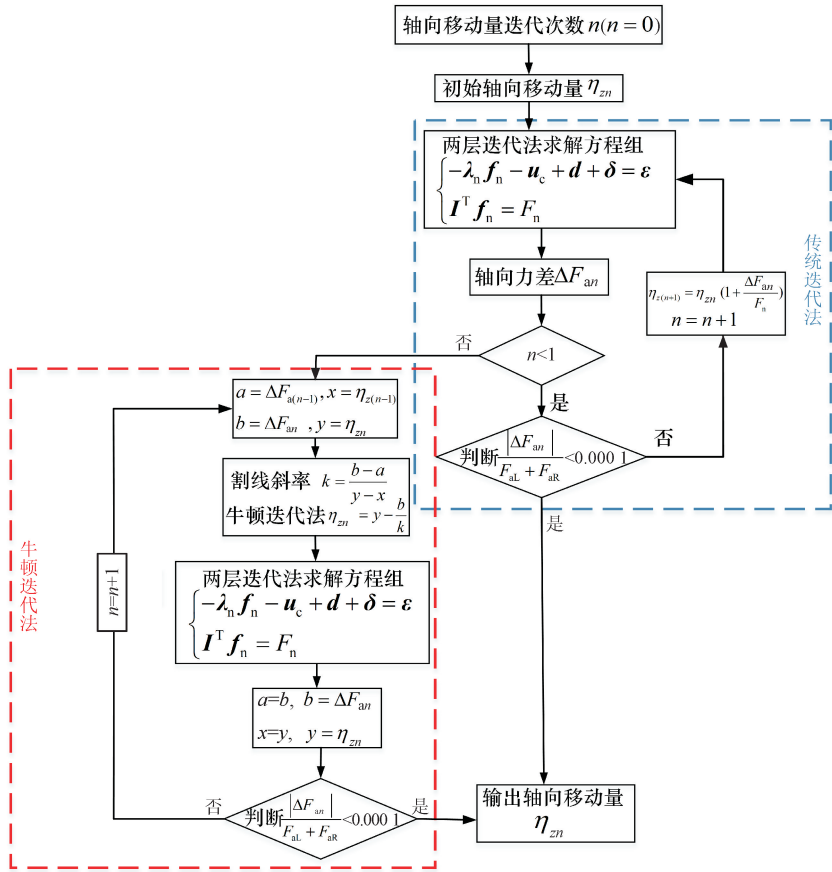


图 5 牛顿迭代法计算轴向位移流程图

Fig. 5 Calculation flowchart of axial displacement by Newton’s iteration method

本文以不同的对中误差和某一交错角为例,从小误差和大误差两个方面比较两种方法的计算效率与应用范围。取对中误差为 1、5、10 μm ,两种方法计算结果的对比如表 1 所示。可以看出,小误差情况下两种方法的计算结果基本一致,牛顿迭代法比传统迭代法计算时间降低了约 70%,且用时更稳定。

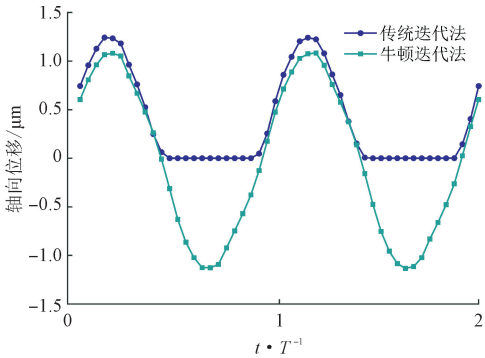
表 1 不同对中误差下牛顿迭代法与传统迭代法计算结果的对比

Table 1 Comparison between results of Newton’s iteration method and traditional method under different symmetry error

对中误差/ μm	平均轴向位移/ μm		计算时间/s	
	牛顿 迭代法	传统 迭代法	牛顿 迭代法	传统 迭代法
1	1.20	1.20	0.50	1.50
5	6.20	6.20	0.78	2.30
10	12.30	12.33	0.75	3.10

进一步分析含交错角人字齿轮 LTCA 模型,两种方法的轴向位移和轴向力差计算结果对比如图 6 所示,其中横坐标为无量纲时间轴,代表啮合进程,

T 为齿轮一个啮合周期,与啮合频率互为倒数。从图 6(a)可以看出,在啮合前期,两种方法的计算结果基本一致;到了啮合后期,传统迭代法计算的轴向位移始终趋近于 0。由图 6(b)可知,此时仍存在约 800 N 的轴向力差,传统迭代法无法令含交错角人字齿轮 LTCA 模型收敛。根据牛顿迭代法计算结果可知,在整个啮合周期,主动齿轮表现为左右往返移动的运动状态,轴向力差波动范围为 0~0.02 N,满足式(13)的收敛条件,即轴向力平衡条件。通过以上对比可以看出,相较于传统迭代法,牛顿迭代法的适用性更好,且在小误差情况下计算效率更高。



(a) 轴向位移

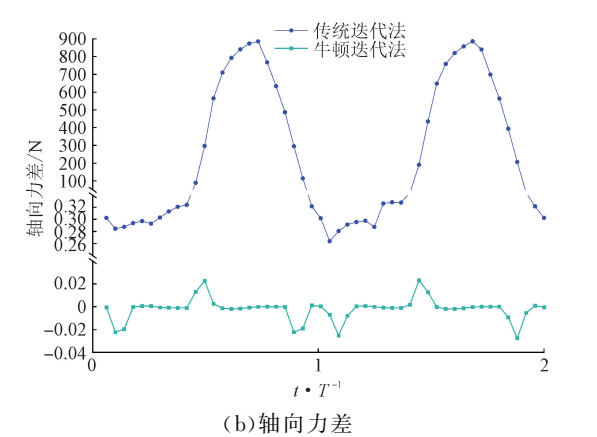


图 6 采用不同迭代法得到的轴向位移及轴向力差结果对比

Fig. 6 Comparison of calculation results of axial displacement and axial force difference using different iterative methods

2 考虑修形和交错角的承载接触分析

2.1 圆弧修形

轮齿修形是改善齿面载荷分布状况、提高齿轮传动承载能力的主要方法,也是影响齿轮啮合行为的重要因素之一。为避免高速重载工况下齿面边缘应力集中,以及齿轮和支撑轴变形所导致的载荷沿齿向分布不均现象,高速列车齿轮通常需要进行齿向修形。常见的方法有圆弧修形、螺旋线修形、曲面修形等,虽然实际误差并非按圆弧曲线分布,但综合考虑修形方式对载荷分布和加工工艺的影响,实际应用中常采用圆弧修形。圆弧修形示意图如图 7 所示,其中 z 轴为齿轮轴线方向, C_i 为齿面上任一点的圆弧修形量, r 为圆弧半径, L_i 为该点到齿面中心线的距离, β_b 为基圆螺旋角, $C_{\max}$ 为最大圆弧修形量, B 为齿宽。由图可见,修形量沿齿宽方向从齿面中部向齿面端部逐渐增大。虽然修形能够改变齿面接触区域和接触线长度,但不会改变接触形式,人字齿轮左、右斜齿轮副仍为线接触。

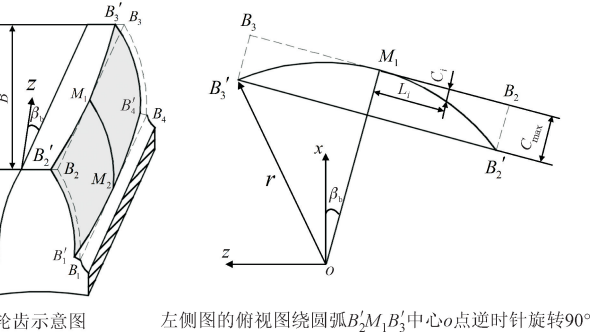


图 7 斜齿轮圆弧修形示意图

Fig. 7 Illustration of lead crowning modification of helical gear

若 $B_1B_2B_3B_4$ 为理论齿面, $B'_1B'_2B'_3B'_4$ 为修形后齿面形状, M_1M_2 是齿面沿齿宽方向上的中心线。修形后,齿面上任一点的齿向修形量 C_i 和圆弧半径 r 应满足如下关系

$$\begin{cases} C_i = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{L_i}{\cos \beta_b}\right)^2} \\ r^2 = (r - C_{\max})^2 + \left(\frac{B}{2\cos \beta_b}\right)^2 \end{cases} \quad (15)$$

线性宏观变形为轮齿和轮辋的整体弯曲、压缩和剪切变形,由有限元模型得到的柔度系数主要与齿轮整体结构有关^[28],故齿向修形对结构柔度系数的影响可以忽略,只需将接触点圆弧修形量 C_i 叠加进该点初始间隙 ϵ_i ,再代入载荷-变形协调方程,即可得到考虑圆弧修形的承载接触分析模型。

2.2 人字齿轮交错角

定义理想状态下,左、右斜齿轮相同位置的轮齿在实际情况下的角位置差为人字齿轮齿面交错角 Γ_s 。含不同交错角的人字齿轮示意图如图 8 所示,其中 p 为分度圆齿距。对于齿数为 N 的人字齿轮,交错角取为 $0 \sim \pi/N$,对应齿距为 $0 \sim p/2$ 。

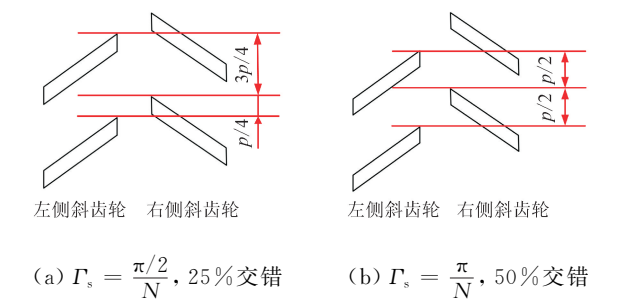


图 8 含不同交错角的人字齿轮示意图

Fig. 8 Illustration of herringbone gear with different stagger angle

交错角、交错角相位差及交错比例的关系如表 2 所示。

表 2 交错角、交错角相位差及交错比例的关系

Table 2 Relationship between stagger angles, stagger-phase angle difference and stagger proportion

交错角 Γ_s	交错角相位差 γ_s	交错比例/%
$\pi/4N$	$\pi/4$	12.5
$\pi/2N$	$\pi/2$	25.0
$3\pi/4N$	$3\pi/4$	37.5
π/N	π	50.0

由图 2 可知,啮合线在基圆齿距上等间隔分布,因而可以通过控制左、右斜齿轮副啮合线间的距离,得到含不同交错角的人字齿轮承载接触模型。沿基圆齿距 P_{bt} 划分 $K = 2n$ 条啮合线,定义交错角控制参数 L 为 $[0, n]$ 间的正整数,当左侧斜齿轮副啮合线为第 $I(I = 1, 2, \cdots, 2n)$ 条时,右侧斜齿轮副的啮合线为第 $I + L$ 条,当 $L = n$ 时对应 50% 交错。由于斜齿轮同时啮合的齿数通常为 2 或 3,因此每个啮合步下需同时考虑 5 个轮齿,按照齿轮旋转方向进行编号:前齿为轮齿 1、轮齿 2(逐渐退出啮合),中齿为轮齿 3,后齿为轮齿 4、轮齿 5(逐渐进入啮合)。

3 圆弧修形对人字齿轮啮合行为影响分析

本文以某型高速列车人字齿轮副为研究对象,基本参数如表 3 所示。

表 3 人字齿轮副基本参数

Table 3 Basic parameters of herringbone gear pair

参数	主动齿轮	从动齿轮
齿数	37	82
模数	5	5
重合度	2.31	2.31
压力角/(°)	20	20
螺旋角/(°)	38.5, -38.5	-38.5, 38.5
齿宽/mm	30	30
空刀槽/mm	10	10

3.1 圆弧修形对啮合激励的影响

以额定扭矩 $500\text{ N}\cdot\text{m}$ 的高速列车为例,研究圆弧修形对人字齿轮副啮合激励的影响。图 9 给出了不同最大圆弧修形量 $C_{\max}$ 下,人字齿轮副轴向位移的变化情况。

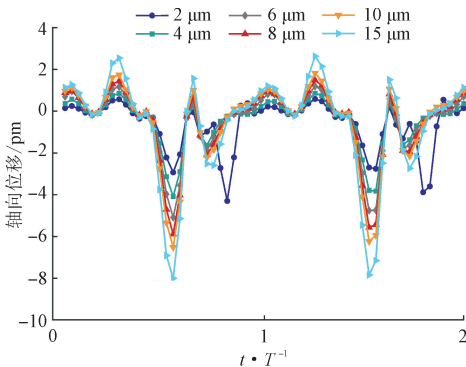
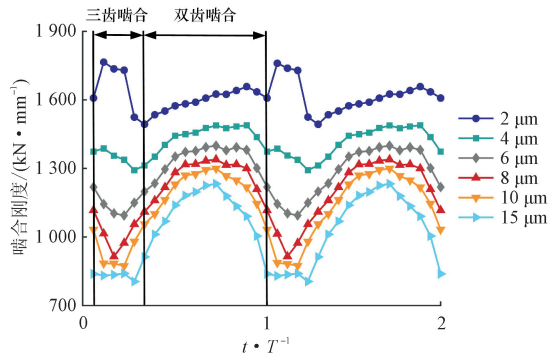


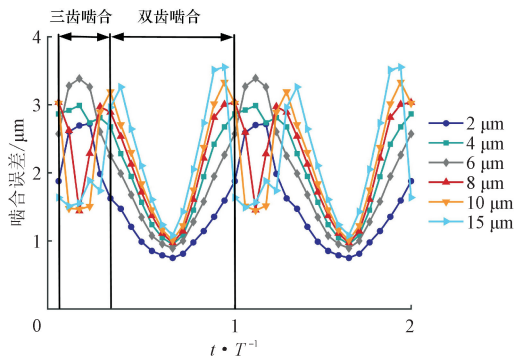
图 9 不同最大圆弧修形量下的轴向位移
Fig. 9 Axial displacement under different maximum lead crowning modification amounts

由图 9 可见,轴向位移随修形量的增大而增大,当 $C_{\max} = 15\text{ }\mu\text{m}$ 时,最大轴向位移为 $-8\text{ }\mu\text{m}$ 。由此可知,圆弧修形对轴向移动影响较小,因而可以忽略。

图 10 给出了不同最大圆弧修形量下,人字齿轮时变啮合刚度 k_m 和综合啮合误差 e_m 随无量纲时间的变化规律。可以看出,随着修形量的增加, k_m 呈减小趋势, e_m 在双齿啮合区呈增大趋势,而在三齿啮合区表现为先增大后减小;当 $C_{\max} = 2\text{ }\mu\text{m}$ 时, k_m 在三齿啮合区的中心处最大,随着修形量的增加,此处的峰值逐渐变为谷值,同时双齿啮合区的 k_m 逐渐高于三齿啮合区域,并在中心处达到峰值,此时 e_m 最小。进一步统计 k_m 和 e_m 的平均值与幅值列于表 4,结果表明:随着 $C_{\max}$ 的增加, k_m 平均值逐渐降低,幅值先减小后增大。这主要与啮合线长度有关,修形量的增加使啮合点个数减少,平均啮合线长度降低;而 k_m 幅值受啮合线长度在三齿啮合区和双齿啮合区分配的影响,当修形量较大时,啮合线主要位于双齿啮合区,两区域啮合刚度差变大,故幅值增加。由表 4 还可以看出,综合啮合误差 e_m 的平均值和幅值均呈逐渐增大趋势。



(a) 时变啮合刚度



(b) 综合啮合误差

图 10 不同最大圆弧修形量下的啮合激励
Fig. 10 Meshing excitations under different maximum lead crowning modification amounts

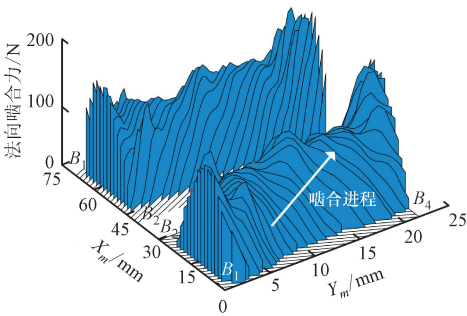
表 4 不同最大圆弧修形量下啮合激励的平均值与幅值

Table 4 Mean value and amplitude of meshing excitations under different maximum lead crowning modification amounts

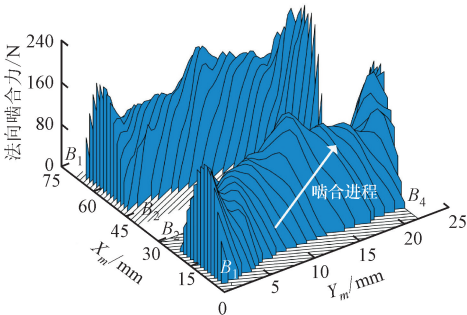
$C_{\max}/\mu\text{m}$	$k_{\text{m}}/(\text{kN}\cdot\text{mm}^{-1})$		$e_{\text{m}}/\mu\text{m}$	
	平均值	幅值	平均值	幅值
2	1 622.15	282.67	1.61	1.94
4	1 403.73	203.43	2.09	2.15
6	1 263.28	303.84	2.18	2.27
8	1 170.47	431.09	2.20	2.34
10	1 104.83	422.13	2.22	2.45
15	1 004.10	426.93	2.25	2.55

3.2 圆弧修形对载荷分布的影响

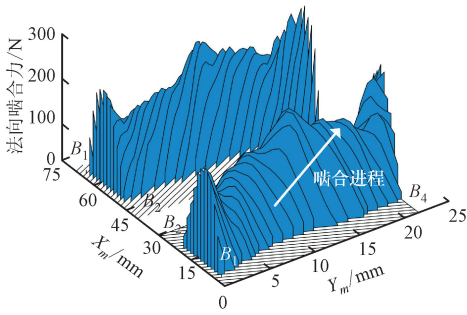
不同最大圆弧修形量下人字齿轮副的载荷分布如图 11 所示。由图可见,两侧斜齿轮副的啮合进程为从 B_1 点进入啮合直至 B_3 点退出啮合。当 $C_{\max} = 2\ \mu\text{m}$ 时,啮入啮出位置靠近齿根和齿顶,齿面边缘法向啮合力高于齿面中心,齿面载荷分布较为分散。随着 $C_{\max}$ 的增加,齿面边缘不再参与啮合,虽仍存在啮合冲击,但载荷逐渐向齿面中部集中。随着 $C_{\max}$ 从 $2\ \mu\text{m}$ 增至 $15\ \mu\text{m}$,齿面中部最大法向啮合力从 $100\ \text{N}$ 增加到 $370\ \text{N}$ 左右。



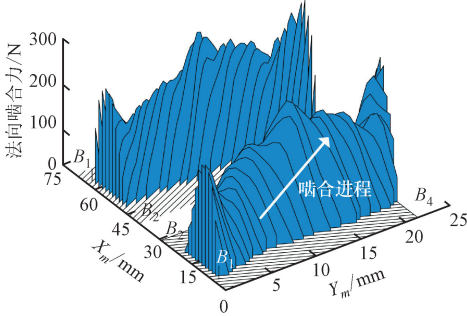
(a) $C_{\max} = 2\ \mu\text{m}$



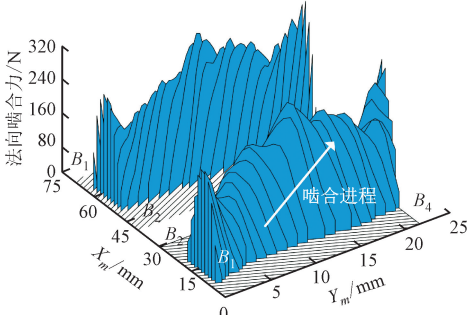
(b) $C_{\max} = 4\ \mu\text{m}$



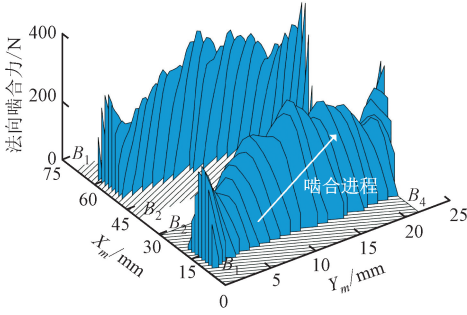
(c) $C_{\max} = 6\ \mu\text{m}$



(d) $C_{\max} = 8\ \mu\text{m}$



(e) $C_{\max} = 10\ \mu\text{m}$



(f) $C_{\max} = 15\ \mu\text{m}$

图 11 不同最大圆弧修形量下的法向啮合力分布
Fig. 11 Distribution of normal force under different maximum lead crowning modification amounts

假设将啮合面划分为 q 条啮合线,每条啮合线所受载荷与该齿承受总载荷^[29]满足下式

$$L(x) = \frac{F_{\text{Np}}(x)}{\sum_{x'=1}^q F_{\text{Np}}(x')}, \quad x = 1, 2, \cdots, q \quad (16)$$

式中: $L(x)$ 为齿面载荷分布系数; $F_{Np}(x)$ 为啮合面第 x 条啮合线所载荷荷。

由式(16), 可得到不同最大圆弧修形量下人字齿轮一侧斜齿轮副的载荷分布系数曲线, 如图 12 所示。

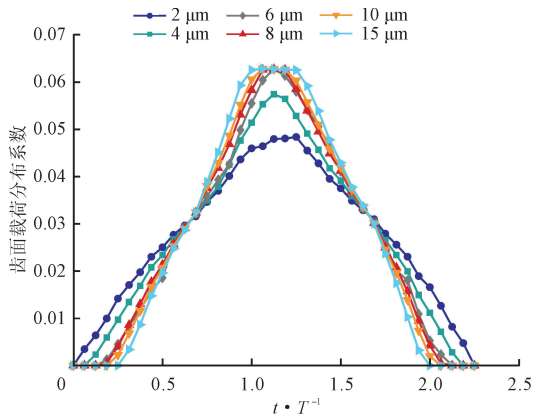


图 12 不同最大圆弧修形量下的齿面载荷分布系数

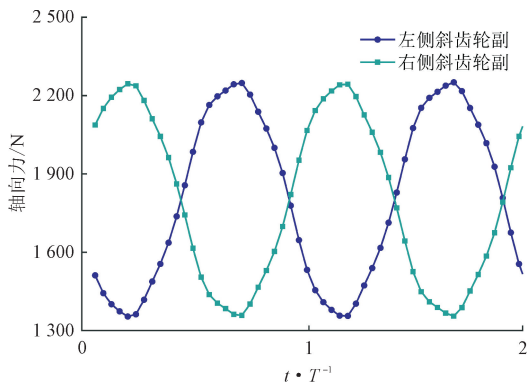
Fig. 12 Distribution coefficient of tooth surface load under different maximum lead crowning modification amounts

由图 12 可知, 随着 $C_{\max}$ 增加, 齿根和齿顶处的载荷分布系数逐渐为 0, 齿面中部的载荷分布系数逐渐增大; $C_{\max}$ 从 $2 \mu\text{m}$ 增加到 $6 \mu\text{m}$, 齿面中部的最大齿面承载系数显著提高; $C_{\max}$ 增至 $6 \mu\text{m}$ 后, 齿面最大载荷承载区略微扩大, 但载荷分布系数最大值保持稳定, 对齿面边缘承载的削弱作用越来越小。这表明圆弧修形对齿轮承载特性的影响不是线性关系, 选取修形量时要综合考虑对齿面载荷分布系数和时变啮合激励造成的影响。

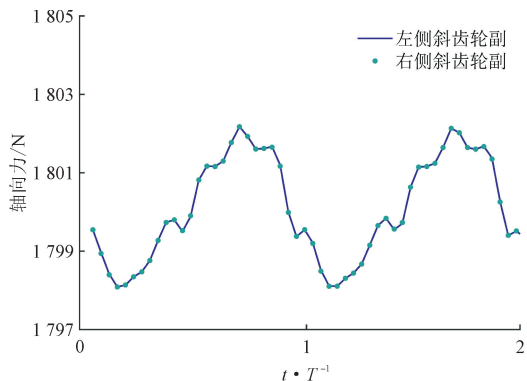
4 齿面交错角对人字齿轮啮合行为影响分析

4.1 轴向移动对轴向力的影响

为研究轴向移动对含交错角人字齿轮的影响, 在 $\gamma_s = \pi$ 、牵引扭矩为 $500 \text{ N} \cdot \text{m}$ 、 $C_{\max}$ 为 $5 \mu\text{m}$ 工况下, 分别进行轴向固定和轴向移动的承载接触分析。图 13 展示了轴向固定和轴向移动下, 含交错角人字齿轮轴向力的变化情况。由图 13(a) 可见, 轴向固定下, 两侧斜齿轮副的轴向力未达到平衡, 最大轴向力差约为 1000 N 。由图 13(b) 可以看出, 轴向移动下, 左、右斜齿轮副的轴向力相等, 能够满足平衡条件。综合以上分析可知, 含交错角人字齿轮副啮合过程存在轴向力不平衡现象, 交错角带来的时变轴向力差使小齿轮发生轴向移动, 直至载荷分布满足轴向力平衡为止。由此可以看出, 轴向移动对含交错角人字齿轮轴向力平衡有重要意义。



(a) 轴向固定



(b) 轴向移动

图 13 轴向固定和轴向移动下含交错角人字齿轮的轴向力
Fig. 13 Axial force of herringbone gear with stagger angle under axial fixation and axial movement

4.2 交错角对啮合激励的影响

牵引扭矩为 $500 \text{ N} \cdot \text{m}$ 、 $C_{\max}$ 为 $5 \mu\text{m}$ 工况下, 计算不同交错角下人字齿轮轴向位移变化情况, 如图 14 所示。由图可见, 随着交错角的增加, 轴向位移平均值变大, 波动程度逐渐剧烈, 这是因为人字齿轮副交错角越大, 达到轴向力平衡所需的轴向位移越大。同时, 含交错角人字齿轮在啮合过程中呈现左右往返的周期性轴向运动现象, 结合图 13 可知, 这是因为啮合过程中产生了大小和方向均改变的时变轴向力差。

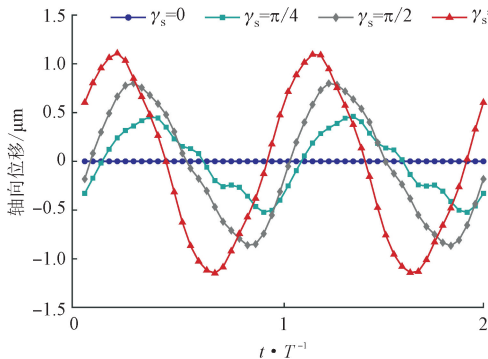


图 14 不同交错角下的轴向位移

Fig. 14 Axial displacement under different stagger angles

在考虑轴向移动的基础上,进一步分析交错角对入字齿轮啮合激励的影响。不同交错角下的时变啮合刚度 k_m 和综合啮合误差 e_m 如图 15 所示。由图可知,随着交错角的增大, k_m 平均值逐渐增大, e_m 平均值逐渐减小,两者波动幅度均显著降低。经计算得到,交错角相位差 γ_s 从 0 增大至 π , k_m 平均值增加了 2.5%,幅值降低了 54%; e_m 平均值降低了 16%,幅值降低了 79%。由此可知,齿面交错角使左、右斜齿轮副的啮合轮齿存在相位差,通过啮合补偿,显著降低了时变啮合刚度和综合啮合误差的波动程度,提高了啮合刚度平均值,减少了综合啮合误差的引入。

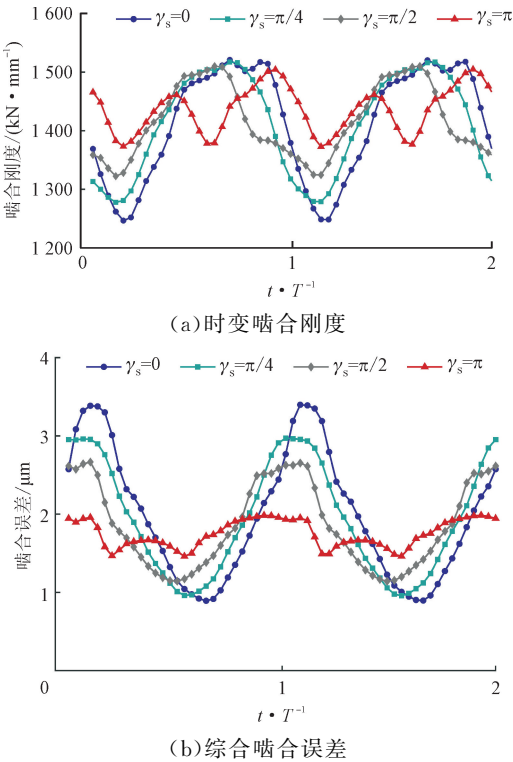


图 15 不同交错角下的啮合激励

Fig. 15 Mesh excitations under different stagger angles

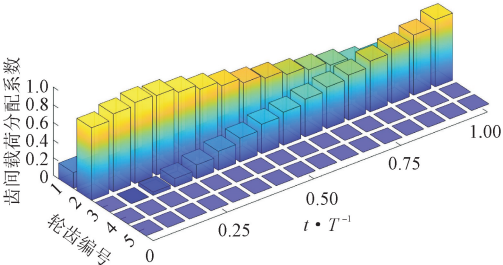
4.3 交错角对载荷分布的影响

从 4.1 节的分析可知,含交错角入字齿轮啮合过程中,左、右斜齿轮副轴向力存在相位差,因此有必要研究交错角对入字齿轮副齿间载荷分布的影响。定义入字齿轮一侧斜齿轮副齿间载荷分配系数 $L_B(X)$ 的表达式为

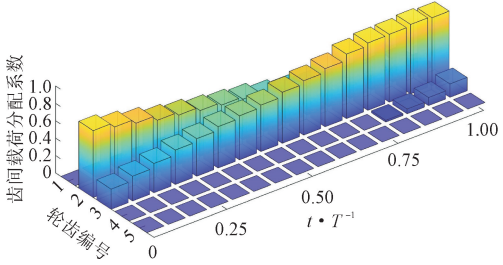
$$L_B(X) = F_N(X)/F_N \tag{17}$$

式中: X 为轮齿序号; $F_N(X)$ 为某一啮合时刻轮齿 X 所承载荷; F_N 为该时刻的总载荷。

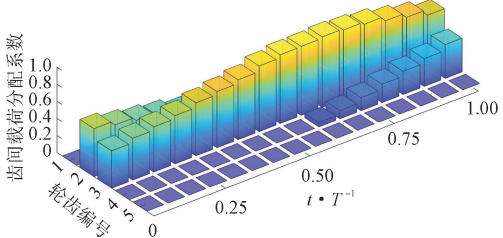
假设右侧轮齿相对左侧转过交错角 γ_s , 仅比较分析含交错角入字齿轮右侧斜齿轮齿间载荷分配系数。一个啮合周期内左、右斜齿轮副 5 个轮齿的载荷变化情况如图 16 所示。



(a) 0%交错时入字齿轮左侧斜齿轮的副载荷分配系数



(b) 25%交错时入字齿轮右侧斜齿轮的副载荷分配系数



(c) 50%交错时入字齿轮右侧斜齿轮的副载荷分配系数

图 16 不同交错角下两侧斜齿轮的承载变化

Fig. 16 Load variation of helical gears under different stagger angles

由图 16(a)可知,无交错角的左侧斜齿轮副的啮合历程为:轮齿 3 开始进入啮合,轮齿 1 逐渐退出啮合,轮齿 2 的载荷分配系数先变大后变小,主要承载轮齿从轮齿 2 向轮齿 3 过渡。以左侧斜齿轮副为标准,随着交错角的增加,右侧斜齿轮副的啮合进程超前于左侧。对比图 16(a)和(b)可知,25%交错时右侧斜齿轮副的啮合进程超前左侧 1/4 周期,此时的啮合历程为:轮齿 1 已完成啮合,进入轮齿 2 和轮齿 3 共同承载的双齿啮合区,随着啮合推进,在 3/4 周期时轮齿 4 进入啮合。对比图 16(a)和(c)可知,50%交错时右侧斜齿轮副的啮合进程超前左侧 1/2 周期,此时的啮合历程为:轮齿 2 开始退出啮合,载荷分配系数逐渐减小,轮齿 3 载荷分配系数达到最大,在 1/2 周期时轮齿 4 进入啮合。

由以上仿真结果可以看出,左、右斜齿轮副啮合轮齿在啮合周期上的相位差与交错比例相同,啮合

过程中,左、右斜齿轮副时变啮合激励得到相互补偿,从而降低了人字齿轮整体的啮合激励时变性。

5 结 论

针对人字齿轮制造加工导致左、右齿面存在不同程度的对称性偏差,以及传统迭代法受误差尺度限制的问题,本文提出一种新的轴向位移迭代方法,并以高速列车人字齿轮为研究对象建立人字齿轮承载接触分析模型,综合分析了轮齿圆弧修形和齿面交错角对人字齿轮啮合行为的影响规律,得到如下主要结论。

(1)分析不同圆弧修形量下人字齿轮啮合激励变化和载荷分布特征发现:圆弧修形量增加,时变啮合刚度均值显著降低,而综合啮合误差均值逐渐增大,修形量从 $2\text{ }\mu\text{m}$ 增至 $15\text{ }\mu\text{m}$,时变啮合刚度均值降低 38%,啮合误差均值提高 39%。最大齿面载荷分布系数随修形量的增加而变大,当圆弧修形量增加至一定数值后,最大齿面载荷分布系数保持稳定。选择最佳圆弧修形量应综合考虑啮合激励的波动和齿面载荷分布情况。

(2)分析不同交错角下人字齿轮的啮合特性发现:当存在交错角时,人字齿轮啮合过程中产生大小和方向均改变的轴向力差,主动齿轮通过左、右往返的周期性轴向运动平衡轴向力。当交错角相位差从 0 增加到 π ,时变啮合刚度、啮合误差的幅值分别降低了 54% 和 79%,表明交错角使得左、右斜齿轮副参与啮合轮齿间相互补偿,提高了时变啮合刚度均值,减少了啮合误差的引入,有效降低了人字齿轮啮合激励的波动幅度。

由上述结论可知,改变交错角可以使左、右斜齿轮副产生的啮合激励得到合理性补偿,从而提升了人字齿轮副的传动稳定性,这为研究系统传动的稳定性提供了新思路。

参考文献:

- [1] XU Xiangyang, GE Hongwei, WU Hui, et al. Research on nonlinear characteristics of herringbone planetary gear transmission system considering double-sided meshing impact [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(5): 3195-3215.
- [2] 莫帅, 曾彦钧, 王震, 等. 高速重载人字齿轮传动非线性动力学分析 [J]. *力学学报*, 2023, 55(10): 2381-2392.
- MO Shuai, ZENG Yanjun, WANG Zhen, et al. Non-linear dynamic analysis of high speed and heavy load

herringbone gear transmission [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(10): 2381-2392.

- [3] KAHRAMAN A, SINGH R. Non-linear dynamics of a spur gear pair [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142(1): 49-75.
- [4] FERNANDEZ-DEL-RINCON A, GARCIA P, DIEZ-IBARBIA A, et al. Enhanced model of gear transmission dynamics for condition monitoring applications: effects of torque, friction and bearing clearance [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 85: 445-467.
- [5] 周越, 王曦, 侯宇, 等. 内部激励下高速列车齿轮箱振动行为及轴承载荷特性实验研究 [J]. *振动与冲击*, 2023, 42(13): 242-250.
- ZHOU Yue, WANG Xi, HOU Yu, et al. Test study on vibration behavior and bearing load characteristics of high-speed train gearbox under internal excitation [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2023, 42(13): 242-250.
- [6] 孙刚, 任尊松, 辛欣, 等. 高速动车组齿轮传动系统振动特性 [J]. *机械工程学报*, 2019, 55(18): 104-111.
- SUN Gang, REN Zunsong, XIN Xin, et al. Dynamics of gear transmission system of high-speed vehicle [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(18): 104-111.
- [7] LITVIN F L, FUENTES A. Computerized simulation of meshing and contact [M]//LITVIN F L, FUENTES A. *Gear Geometry and Applied Theory*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 241-266.
- [8] 王羽达, 吕宏展, 侯志勇, 等. 渐开线直齿轮啮合接触计算与分析 [J]. *机械传动*, 2021, 45(12): 41-47.
- WANG Yuda, LÜ Hongzhan, HOU Zhiyong, et al. Calculation and analysis of meshing contact of involute spur gear [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2021, 45(12): 41-47.
- [9] 杜彦斌, 汪澳婷, 何坤. 含扭曲误差的鼓形斜齿轮接触分析 [J]. *机械工程学报*, 2024, 60(3): 143-154.
- DU Yanbin, WANG Aoting, HE Kun. Tooth contact analysis of helical gears with longitudinal modification considering twist errors [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2024, 60(3): 143-154.
- [10] 周如传, 赵宁, 李旺, 等. 锥形面齿轮副的几何展成及轮齿接触分析 [J]. *机械工程学报*, 2020, 56(7): 86-95.
- ZHOU Ruchuan, ZHAO Ning, LI Wang, et al. Gen-

- eration, TCA and stress analysis of the face gear drive with a tapered involute pinion [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(7): 86-95.
- [11] LITVIN F L, FUENTES A, GONZALEZ-PEREZ I, et al. Modified involute helical gears: computerized design, simulation of meshing and stress analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(33/34): 3619-3655.
- [12] 方宗德. 齿轮轮齿承载接触分析(LTCA)的模型和方法 [J]. *机械传动*, 1998, 22(2): 2-4.
FANG Zongde. Model and approach for loaded tooth contact analysis (LTCA) of gear drives [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 1998, 22(2): 2-4.
- [13] 曹雪梅, 张华, 方宗德. 航空弧齿锥齿轮承载传动误差的分析与设计 [J]. *航空动力学报*, 2009, 24(11): 2618-2624.
CAO Xuemei, ZHANG Hua, FANG Zongde. Design and analysis of loaded transmission errors for aviation spiral bevel gears [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2009, 24(11): 2618-2624.
- [14] 马登秋, 刘永平, 叶振环, 等. 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮修形设计及承载接触分析 [J]. *振动与冲击*, 2023, 42(14): 170-179.
MA Dengqiu, LIU Yongping, YE Zhenhuan, et al. Modification design and load tooth contact analysis of a cylindrical gear with variable hyperbolic circular arc tooth trace [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2023, 42(14): 170-179.
- [15] 王成, 方宗德, 谷建功, 等. 人字齿轮承载接触分析与试验 [J]. *航空动力学报*, 2010, 25(3): 718-722.
WANG Cheng, FANG Zongde, GU Jiangong, et al. Loaded tooth contact analysis of double helical gears and experimental investigation [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2010, 25(3): 718-722.
- [16] 王峰, 朱彦霖, 方宗德, 等. 齿面修形对人字齿轮啮合刚度影响分析与试验研究 [J]. *振动与冲击*, 2018, 37(1): 40-46.
WANG Feng, ZHU Yanlin, FANG Zongde, et al. Theoretical and experimental investigation on the effect of teeth modification on the meshing stiffness of herringbone gear system [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(1): 40-46.
- [17] 刘玄, 方宗德, 赵宁, 等. 人字齿轮小轮轴向窜动的多目标复合修形优化 [J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(1): 118-126.
LIU Xuan, FANG Zongde, ZHAO Ning, et al. Multi-objective compound modification optimization of pinion axial floating for the double helical gears [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2021, 55(1): 118-126.
- [18] 蒋进科, 李猛. 考虑构件浮动人字行星齿轮传动系承载接触分析 [J]. *华南理工大学学报(自然科学版)*, 2024, 52(9): 51-61.
JIANG Jinke, LI Meng. Loaded tooth contact analysis for double-helical planetary gear sets with floating components [J]. *Journal of South China University of Technology(Natural Science Edition)*, 2024, 52(9): 51-61.
- [19] 袁冰, 常山, 刘更, 等. 考虑齿距累积误差的人字齿轮系统动态特性分析 [J]. *振动与冲击*, 2020, 39(3): 120-126.
YUAN Bing, CHANG Shan, LIU Geng, et al. Dynamic characteristics of a double helical gear system considering accumulation pitch error [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(3): 120-126.
- [20] 刘玄, 方宗德, 雷凤杰, 等. 不对称齿距偏差人字齿轮大周期的三维振动特性分析 [J]. *振动与冲击*, 2024, 43(19): 83-93.
LIU Xuan, FANG Zongde, LEI Fengjie, et al. Large periodic 3-D vibration characteristics analysis of herringbone gears with asymmetric tooth pitch deviation [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2024, 43(19): 83-93.
- [21] 李伟国, 于广滨, 毛汉成, 等. 对中误差及误差耦合补偿对人字齿轮啮合特性的影响 [J]. *机械传动*, 2021, 45(9): 1-8.
LI Weiguo, YU Guangbin, MAO Hancheng, et al. Effect of symmetry error and error coupling compensation on meshing characteristic of herringbone gear [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2021, 45(9): 1-8.
- [22] KANG M R, KAHRAMAN A. An experimental and theoretical study of the dynamic behavior of double-helical gear sets [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 350: 11-29.
- [23] KANG M R, KAHRAMAN A. An experimental and theoretical study of quasi-static behavior of double-helical gear sets [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2021, 143(4): 043401.
- [24] 李栋梁, 王淑妍, 孙志宏. 考虑错位角的人字齿星型轮系传动性能分析 [J]. *东华大学学报(自然科学版)*, 2023, 49(1): 64-69.
LI Dongliang, WANG Shuyan, SUN Zhihong. Transmission performance analysis of herringbone star gear trains considering stagger angle [J]. *Journal of Donghua University (Natural Science)*, 2023, 49(1): 64-69.
- [25] VEDMAR L, ANDERSSON A. A method to determine

- dynamic loads on spur gear teeth and on bearings [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 267(5): 1065-1084.
- [26] CHANG Lehao, LIU Geng, WU Liyan. A robust model for determining the mesh stiffness of cylindrical gears [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 87: 93-114.
- [27] 丁长安, 张雷, 周福章, 等. 线接触弹性接触变形的解析算法 [J]. *摩擦学学报*, 2001, 21(2): 135-138.
DING Chang'an, ZHANG Lei, ZHOU Fuzhang, et al. Theoretical formula for calculation of line-contact elastic contact deformation [J]. *Tribology*, 2001, 21(2): 135-138.
- [28] FERNANDEZ DEL RINCON A, VIADERO F, IGLESIAS M, et al. A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 61: 30-58.
- [29] 吕宏展, 王羽达, 王君政. 含安装误差的鼓形齿轮承载接触分析 [J]. *机械工程学报*, 2022, 58(21): 126-133.
LÜ Hongzhan, WANG Yuda, WANG Junzheng. Loaded tooth contact analysis of spur gears with longitudinal modification considering assembly errors [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(21): 126-133.

(编辑 李慧敏)

(上接第 179 页)

- [18] CHEN Z, CICHOCKI A. Nonnegative matrix factorization with temporal smoothness and/or spatial decorrelation constraints [J]. *Signal Processing*, 2005, 68: 1-6.
- [19] SALEHANI Y E, GAZOR S. Smooth and sparse regularization for NMF hyperspectral unmixing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2017, 10(8): 3677-3692.
- [20] ESSID S, FÉVOTTE C. Smooth nonnegative matrix factorization for unsupervised audiovisual document structuring [J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2013, 15(2): 415-425.
- [21] VIRTANEN T. Monaural sound source separation by nonnegative matrix factorization with temporal continuity and sparseness criteria [J]. *IEEE Transactions on Audio Speech and Language Processing*, 2007, 15(3): 1066-1074.
- [22] FABREGAT R, PUSTELNIK N, GONÇALVES P, et al. Solving NMF with smoothness and sparsity constraints using PALM [EB/OL]. (2021-03-18) [2024-10-10]. <https://arxiv.org/abs/1910.14576>.
- [23] GILLIS N, HIEN L T K, LEPLAT V, et al. Distributionally robust and MULTI-OBJECTIVE nonnegative matrix factorization [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2022, 44(8): 4052-4064.
- [24] QIAN Yuntao, JIA Sen, ZHOU Jun, et al. Hyperspectral unmixing via $L_{1/2}$ sparsity-constrained nonnegative matrix factorization [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2011, 49(11): 4282-4297.
- [25] YOO J H, CHOI S J. Nonnegative matrix factorization with orthogonality constraints [J]. *Journal of Computing Science and Engineering*, 2010, 4(2): 97-109.
- [26] DAGA A P, FASANA A, MARCHESIELLO S, et al. The Politecnico di Torino rolling bearing test rig: description and analysis of open access data [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 120: 252-273.

(编辑 赵炜)