

局域共振弹性超材料梁禁带宽度的拓宽方法

王岗^{1,2}, 万少可^{1,2}, 洪军^{1,2}, 李乐乐^{1,2}, 刘硕^{1,2}, 李小虎^{1,2}

(1. 西安交通大学现代设计及转子轴承系统教育部重点实验室, 710049, 西安;

2. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对传统局域共振弹性超材料存在禁带宽度窄的问题,引入非均匀分布振子设计方法,在不改变振子总质量的前提下实现了禁带拓宽。首先,采用谱元法(SEM)建立通用弹性超材料梁模型,对单、双层均匀振子超材料梁结构的振动传递特性进行分析;然后,保持振子总质量相等,提出单、双层非均匀振子超材料梁的设计策略;最后,搭建实验装置对所提结构的振动抑制性能进行测试。研究表明:振子间的特征频率差异越大,最终形成的禁带宽度越宽,但禁带范围内的频响曲线会大幅波动,此时可通过加入适当阻尼进行抑制,使禁带曲线变得平稳;对于双振子超材料梁,振子的质量比和阻尼均会对结构的禁带特性产生影响,在振子与梁质量相同的条件下,单层非均匀及均匀振子超材料梁可分别形成带宽为440、68 Hz的禁带,双层非均匀及均匀振子超材料梁可分别形成带宽为395、40 Hz的禁带。研究表明所提超材料结构能够有效实现振动抑制,可为周期结构的振动问题提供一种新的调控方法。

关键词: 弹性超材料;局域共振;谱元法;振动抑制;非均匀振子

中图分类号: TB535 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202410006 **文章编号:** 0253-987X(2024)10-0063-09

Methods for Broadening the Band Gap Width of Local Resonance Elastic Metamaterial Beams

WANG Gang^{1,2}, WAN Shaoke^{1,2}, HONG Jun^{1,2}, LI Lele^{1,2}, LIU Shuo^{1,2}, LI Xiaohu^{1,2}

(1. Key Laboratory of Education Ministry for Modern Design and Rotor-Bearing System, Xi'an Jiaotong University,

Xi'an 710049, China; 2. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To address the issue of narrow band gap width in traditional local resonance elastic metamaterials, a design approach is introduced that employs non-uniformly distributed resonators to widen the band gap without modifying the total mass of the resonators. Firstly, a generalized elastic metamaterial beam model is established using the spectral element method (SEM), and the vibration transmission characteristics of both single- and double-layer metamaterial beams with uniform resonators are analyzed. Subsequently, a design strategy for single- and double-layer metamaterial beams with non-uniform resonators is proposed while maintaining a constant total mass of the resonators. Finally, an experimental setup is devised to evaluate the vibration suppression performance of the proposed structures. The findings indicate that a wider band gap is achieved when there is a greater difference in eigenfrequencies between the resonators. However, the

收稿日期: 2023-12-04。 作者简介: 王岗(1991—),男,博士生;李小虎(通信作者),男,教授,博士生导师。

基金

项目: 国家自然科学基金资助项目(52075428)。

网络出版时间: 2024-01-31

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20240131.1039.002>

frequency response curve within the band gap range may exhibit significant fluctuations, which can be mitigated by introducing appropriate damping to stabilize the band gap curve. The band gap properties of the structure in double-layer metamaterial beams are influenced by both the mass ratio and damping of the resonators. Under the condition of equal mass between the resonators and the beam, the single-layer metamaterial beam with non-uniform and uniform resonators exhibits band gaps with widths of 440 Hz and 68 Hz, respectively. Similarly, the double-layer metamaterial beam with non-uniform and uniform resonators displays band gaps with widths of 395 Hz and 40 Hz, respectively. The study demonstrates that the proposed metamaterial structures effectively achieve vibration suppression, providing a novel approach to address vibration-related challenges in periodic structures.

Keywords: elastic metamaterials; local resonance; spectral element method; vibration suppression; non-uniform distributed resonators

振动和噪声普遍存在于工程的各个领域,由于低频的振动和噪声传播能力较强,所以如何抑制低频振动成了一大工程难题^[1-2]。近年来,学者们提出了弹性超材料的概念,其重要特性是能够产生频率带隙(禁带),使弹性波在该频率范围内不能传播^[3]。Liu等^[4]率先指出,采用局域共振超材料,能够通过振子与基体之间的相互作用抑制亚波长范围波的传播,在低频范围内产生禁带区间从而抑制振动,为超材料在低频减振降噪领域的应用奠定了理论基础。此后,出现了大量有关局域共振超材料的研究^[5-11]。本质上,这些方法都是通过调节振子质量和刚度来获得低频禁带。采用局域共振机理,对轴^[12]、板^[13-14]、框架结构^[15]、环形结构^[16]等低频振动抑制的研究也取得了较好成果。

然而,传统周期性布置相同谐振子单元的超材料结构产生的禁带宽度相对较窄。因此,如何拓宽禁带宽度具有重要意义。Zuo等^[17]将两种形式的谐振子等间距周期布置于基体上,并证明了该结构能有效地拓展禁带宽度。El-Borgi等^[18]通过改变梁的长度来改变振子刚度,从而调节振子特征频率,使得结构能够产生两个不同范围的禁带区间,并证明了禁带宽度与布置在基体梁上谐振子的总质量有关。Hu等^[19]在基体梁上布置质量相同但特征频率不同的谐振子,通过调节频率间隔和阻尼,成功拓宽了禁带区间。

以上研究大多只针对单层振子结构形式的超材料,然而由于实际工程的空间限制,势必不可能在一个方向上无限布置振子,在这种情况下,改变振子的空间分布是一种必然选择。因此,在不改变梁上振子总质量的条件下,本文以单、双层振子超材料结构为例,研究了振子空间分布对结构振动抑制特性的

影响,通过引入非均匀特征频率的振子,对振子的阻尼、特征频率和质量比进行了详细分析。由于本文的研究对象是连续均匀结构,因此基于谱元法(SEM)建立了弹性超材料梁的数学模型^[20-22]。

1 理论基础

以双层振子结构为例建立 SEM 矩阵,具体单元和节点的划分如图 1(a)所示,基本单元包含图 1(b)所示的梁单元和图 1(c)所示的振子单元,即只要建立起这两个基本单元的 SEM 矩阵,通过类似于有限元方法的矩阵组装,就可进一步得到任意数量振子结构的谱单元矩阵。图 1 中, m_1 、 m_2 、 k_1 、 k_2 分别为双层振子的质量和刚度, ω_a 、 ω_b 、 θ_a 、 θ_b 、 M_a 、 M_b 、 Q_a 、 Q_b 分别为节点 a 、 b 的位移、转角、弯矩和剪力。

对图 1(b)的梁单元进行受力分析,根据 SEM 理论,可得到梁单元的谱单元矩阵 $\mathbf{S}_{\text{beam}}$ ^[23]。将图 1(c)中的振子单元分解为弹簧单元和质量单元进行受力分析,各节点的受力表达式如下

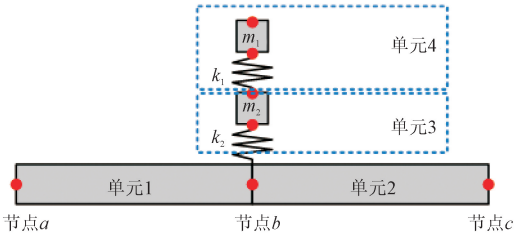
$$\begin{cases} f_2 = k(u_2 - u_1) \\ f_3 - f_2 = m\ddot{u}_3 \\ f_1 = f_2 \\ u_3 = u_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $f_i = F_i e^{j\omega t}$ 为节点 i 所受的力,其中 j 为虚数符号, ω 为圆频率, t 为时间, F_i 为力幅值, $i = 1, 2, 3$ 分别表示图 1(c) 中 3 个节点的编号; $u_i = U_i e^{j\omega t}$ 为节点 i 的位移,其中 U_i 为位移幅值; k 为等效刚度; m 为等效质量; $\ddot{u}_3$ 为节点 3 的加速度。

将式(1)写为矩阵形式

$$\mathbf{S}_{\text{resonator}} \mathbf{U}_{\text{resonator}} = \mathbf{f}_{\text{resonator}} \quad (2)$$

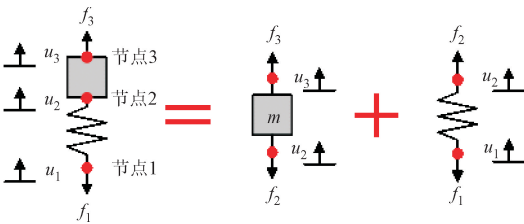
式中:振子的谱单元矩阵 $\mathbf{S}_{\text{resonator}} = \begin{bmatrix} -k & k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}$;
节点位移幅值矩阵 $\mathbf{U}_{\text{resonator}} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_3]^T$;节点力幅
值矩阵 $\mathbf{f}_{\text{resonator}} = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_3]^T$ 。



(a) 单元和节点划分



(b) 梁单元受力分析



(c) 振子单元受力分析

图 1 双层振子超材料梁的单元划分与受力分析
Fig. 1 Structure of double-layer metamaterial beams and the force analysis of each element

对得到的梁单元和振子单元矩阵开展与有限元方法相似的矩阵组装,得到总的谱单元矩阵,从而对超材料结构进行频域响应分析。

2 数值仿真和讨论

分别对单层、双层振子超材料结构进行研究,基体梁的尺寸和材料参数如表 1 所示。单、双层结构均包含 8 个振子。定义 μ 为振子总质量与基体梁的质量之比,本节中 μ 取 1。

表 1 结构尺寸和材料参数

Table 1 Structural dimensions and material parameters			
长/m	宽×高/ (m×m)	密度/ (kg·m ⁻³)	弹性模量/ GPa
0.100	0.020×0.002	2 700	76

2.1 单层振子超材料结构设计与分析

对于单层均匀振子超材料结构,布置有 8 个均匀分布的相同振子,每个振子质量为整个梁质量的 1/8,每个振子的特征频率 $p_n = 160 \text{ Hz}, n = 1, 2, \dots, 8$ 。采用损耗因子方式引入阻尼 η ,即在刚度中引

入虚数项 $(1 + j\eta_n)k_n$,其中 η_n 为第 n 个振子的阻尼, k_n 为第 n 个振子的等效刚度。单层均匀振子超材料结构产生的禁带宽度只与振子本身的特征频率以及振子总质量和基体梁质量之比有关。定义 Ω 为禁带起始频率,当均匀布置无限多个相同振子后,单层均匀超材料结构产生的禁带宽度 $\Delta^{[24]}$ 可写为

$$\Delta = (\sqrt{1 + \mu} - 1)\Omega \tag{3}$$

值得注意的是,式(3)成立的前提是保持质量比 μ 不变,且均匀布置无限个相同的振子。对于实际的有限结构来说,在基体梁质量和振子总质量不变的条件下,振子数目越多,禁带宽度越接近式(3)的结果。因此,式(3)的计算结果可作为实际禁带宽度的上限。

若超材料梁上安装振子的总质量为整个梁质量的 1/8 (即 $\mu = 1/8$),则由式(3)可得到最大禁带宽度为 9.7 Hz,也就是说,当梁单元上只布置一个振子时,其禁带宽度必小于 9.7 Hz。综合以上分析,取非均匀振子频率间隔 $\delta = 8 \text{ Hz}$,使得不同振子所产生的禁带范围发生重叠,但不会影响整个禁带范围的连续性。在这种情况下,不同振子 n 的特征频率 p_n 分别为 160、168、176、184、192、200、208、216 Hz,不同振子 n 对应的刚度 k_n 可通过 $k_n = m_n (2\pi p_n)^2$ 来计算,其中 m_n 为振子 n 的质量。

分别对单层均匀($\delta = 0$)、非均匀($\delta = 8 \text{ Hz}$)振子结构的禁带特性进行分析,得到的频响曲线如图 2 所示。在结构一端施加频率为 0~800 Hz、大小为 10 N 的简谐激励力,拾取另一端响应,计算两端位移之比,得到响应 T_r 的表达式

$$T_r = 20 \lg \frac{\omega_f}{\omega_s} \tag{4}$$

式中: ω_f 为自由端位移; ω_s 为激励端位移。

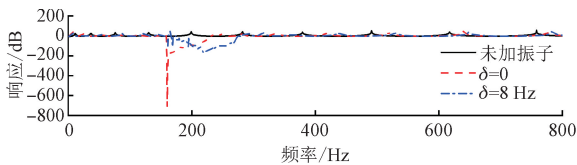


图 2 无阻尼条件下单层均匀及非均匀振子与未加振子超材料梁的振动响应对比

Fig. 2 Comparison of the vibration response of single-layer metamaterial beam with uniform, non-uniform and no resonators under undamped conditions

由图 2 可见,相较于无附加局域共振单元的光梁,附加振子后的结构在一定频率范围内出现了衰减区域。对比振子不同特征频率间隔工况,发现频响曲线显示出不同特征。当 $\delta = 0$ 时,禁带范围为

160~228 Hz, 禁带宽度为 68 Hz, 该禁带宽度与式(3)计算所得结果(66 Hz)基本一致; 当 $\delta=8$ Hz 时, 禁带宽度范围为 157~288 Hz, 相较于 $\delta=0$ 工况, 此时的禁带宽度明显增加。同时, 在 $\delta=8$ Hz 工况下, 振动响应衰减的极值约为 -180 dB, 相较于 $\delta=0$ 时约为 -700 dB 的最大衰减量, 呈现明显减小趋势。此外, 由于非均匀振子的引入, 响应曲线在极值频率之前出现大幅波动。

接着, 分别研究了 δ 为 0、8 Hz 时, 不同阻尼对结构衰减能力的影响, 结果如图 3 所示。由图可见, 阻尼的添加使得禁带范围内的频响幅值降低, 且随着阻尼增大, 频响极值逐渐减小, 而禁带宽度却逐渐增大。与图 2 中无阻尼条件下的频响曲线相比, 此时的曲线更加光滑, 特别是图 3(b)中衰减极值频率之前的频响曲线, 已没有大幅波动现象, 表明阻尼的存在有利于衰减区域的平滑稳定。随着阻尼的增加, $\delta=8$ Hz 工况下禁带范围的变化趋势与 $\delta=0$ 工况下的变化趋势大致相同, 但由于引入了非均匀振子, $\delta=8$ Hz 工况下的禁带范围更宽。

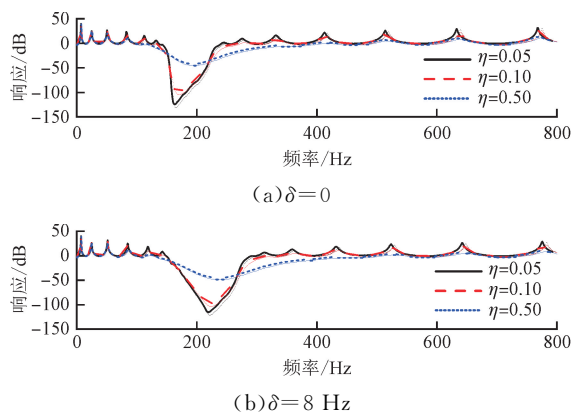


图3 不同阻尼条件下单层均匀和非均匀振子超材料梁的振动响应

Fig. 3 Vibration response of single-layer metamaterial beams with uniform and non-uniform resonators under different damping conditions

通过以上分析, 可得到以下结论: 一是引入非均匀振子能够有效拓宽禁带, 二是阻尼的存在能够使振子频率间隔所造成频响曲线的不稳定波动现象消失。基于以上思路, 首先增加频率间隔 δ , 推导得出在无阻尼情况下, 禁带宽度变宽, 但频响曲线会变得更加不稳定; 接着通过添加阻尼使得曲线更加平稳, 从而获取稳定的衰减区间。图 4 给出了不同阻尼条件下, 频率间隔对单层非均匀振子超材料梁振动特性的影响规律。

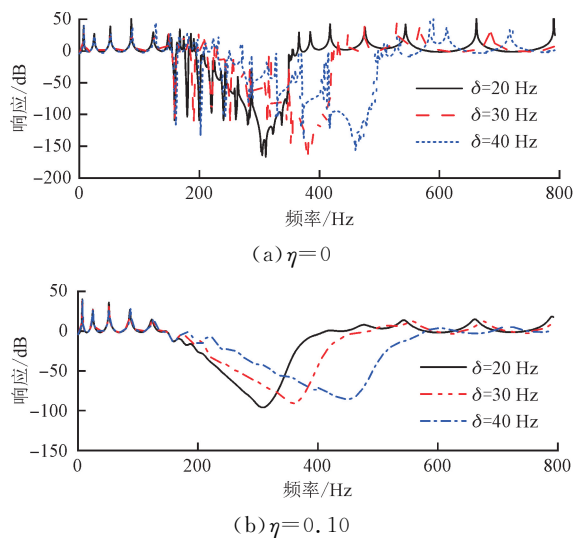


图4 阻尼和频率间隔对单层非均匀振子超材料梁振动特性的影响

Fig. 4 Effect of damping and frequency spacing on the vibration characteristics of single-layer metamaterial beams with non-uniform resonators

图 4(a) 为阻尼 $\eta=0$ 时, 振子频率间隔分别为 20、30、40 Hz 时得到的频响曲线。可以看出, 虽然随着频率间隔的增大, 禁带宽度越来越宽, 但频响曲线出现很大波动, 且频率间隔越大, 波动效应越强, 这种现象对获得稳定衰减区域的目标来说较为不利。因此, 引入阻尼 $\eta=0.10$ 来消除波动, 如图 4(b) 所示。可以看出, 由于阻尼的引入, 频响曲线变得光滑, 在振子频率间隔为 40 Hz 时, 获得了大约 440 Hz 的禁带宽度, 相较于图 2 中均匀振子产生的大约 68 Hz 的禁带宽度, 经过阻尼和非均匀振子调制后的禁带宽度得到了大幅提升。

2.2 双层振子超材料结构设计与分析

通过对单层振子超材料结构的研究可以发现, 单层均匀振子结构会产生一个禁带区间, 而禁带起始频率在单层振子的特征频率处, 通过引入阻尼可以拓宽该结构的带隙。然而, 对于图 1 所示的双层振子结构, 每个子结构由上、下两层振子组成, 由振动分析可知该子结构会产生两个不同的特征频率, 这意味着会有两个离散分布的带隙。文献[25]的研究结果表明, 只有上、下两层振子的特征频率相同时, 子结构产生的两个特征频率才最接近, 在这个条件下对系统引入适当阻尼, 就能形成一个连续的振动衰减区间。

基于以上分析, 对双层均匀、非均匀振子超材料梁开展研究。为了便于与单层结构对比, 对于双层

振子均匀分布的超材料梁,设置振子质量和刚度与单层均匀分布超材料梁相同,以纵向分布的上、下两层振子为一组,每组质量为

$$m_n^{\text{I}} + m_n^{\text{II}} = \frac{m_{\text{beam}}}{4} \tag{5}$$

式中:下标 n 表示第 n 组双层振子,本节中 $n = 1, 2, 3, 4$;上标 I、II 分别表示第 1、2 层振子; m_{beam} 为基体梁的质量。

首先,考虑 $m_n^{\text{I}} = m_n^{\text{II}} = m_{\text{beam}}/8$ 的情况。初始振子特征频率 $\Omega = 160$ Hz,由式(3)可得到不同振子之间的最大频率间隔为 18.9 Hz,根据 2.1 节分析,取 $\delta = 15$ Hz,此时每个子结构中振子的特征频率 p_n 分别为 160、175、190、205 Hz,刚度为 $k_n = m_n (2\pi p_n)^2$ 。分别对双层均匀($\delta = 0$)、非均匀($\delta = 15$ Hz)振子结构的禁带特性进行分析,得到频响曲线如图 5 所示。

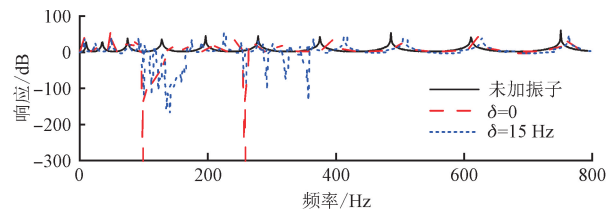


图 5 无阻尼条件下双层均匀、非均匀振子与未加振子超材料梁的振动响应对比

Fig. 5 Comparison of the vibration response of double-layer metamaterial beam with uniform, non-uniform and no resonators under undamped conditions

从图 5 可以看出,对于均匀分布的双层振子超材料梁,禁带范围为 97~137 Hz,且在 258~267 Hz 区间有一个极小的振动衰减区间。在 97~137 Hz 低频禁带区域范围内,起始频率处衰减最大,随着频率升高,衰减量逐渐减少。

当 $\delta = 15$ Hz 时,非均匀振子结构的主禁带宽度为 99~174 Hz,相较于均匀结构,衰减区间明显得到了拓宽。同时,在 257~360 Hz 区间范围内,由于振子间的频率间隔,禁带范围内的频响曲线出现了波动,而该现象也曾出现在单层非均匀振子超材料结构的频响曲线中。以上分析表明,二自由度的振子能够产生两个禁带衰减区域,且非均匀超材料结构的禁带宽度更大,若能消除两个衰减区间之间的通带区域,就能进一步拓宽禁带区间。

接着,分别研究了 δ 为 0、15 Hz 时,不同阻尼对结构衰减能力的影响,如图 6 所示。计算过程中,上、下两层振子的阻尼相同。

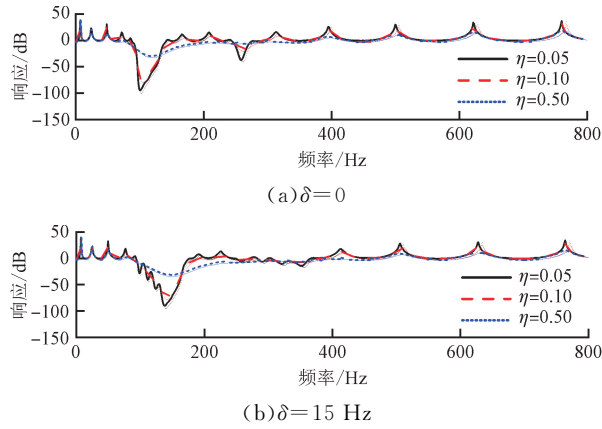


图 6 不同阻尼条件下双层均匀和非均匀振子超材料梁的振动响应

Fig. 6 Vibration response of double-layer metamaterial beams with uniform and non-uniform resonators under different damping conditions

从图 6(a)可以看出,随着阻尼增加,结构在禁带范围内对振动的抑制能力减小,而整个系统的禁带宽度增加。由此可见,阻尼能够对双层均匀振子超材料结构的禁带范围起到有效的调制作用。

相较于 $\delta = 0$,当 $\delta = 15$ Hz 时,在相同阻尼条件下,双层非均匀振子超材料结构的衰减区间更宽,如图 6(b)所示,这表明引入非均匀振子也能有效地拓宽禁带区间。当阻尼 $\eta = 0.05$ 时,可以清晰地观察到两个禁带区域内,频响曲线在响应极值之前均出现了大幅波动;而随着阻尼增大,该波动现象逐渐减少,频响曲线也变得平滑。

类比如图 4 中单层非均匀振子超材料结构的结论,对于双层振子超材料结构,可通过引入非均匀振子以及阻尼来达到拓宽衰减区间的目的。不同阻尼条件下,频率间隔对双层非均匀振子超材料梁振动特性的影响如图 7 所示。

由图 7(a)可见,相较于单层非均匀振子超材料,双层非均匀振子超材料的频响曲线波动更加剧烈,特别是在第 2 个禁带区域中,随着频率间隔的增大,超出 0 dB 的频响曲线越来越多。当引入大小为 0.15 的阻尼后,从图 7(b)可以观察到,两个独立的禁带区间合并成一个连续的禁带,原先两个禁带区域中波动频率处的频响曲线变得更加平滑。在振子频率间隔为 40 Hz 时,获得了约 395 Hz 的禁带宽度,相较于图 5 中均匀振子产生的约 40 Hz 的主禁带宽度,经过阻尼和非均匀振子调制后的禁带宽度大大增加。由此可见,阻尼和频率间隔能够有效拓宽结构的禁带范围,从而获得稳定的衰减区间。

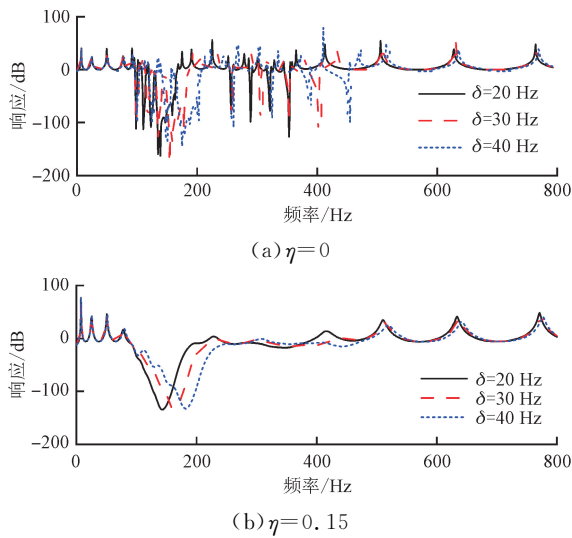


图 7 阻尼和频率间隔对双层非均匀振子超材料梁振动特性的影响

Fig. 7 Effect of damping and frequency spacing on the vibration characteristics of double-layer metamaterial beams with non-uniform resonators

由以上分析可知,对双层非均匀振子超材料结构添加阻尼,能够有效消除频响曲线的波动现象,使得两个衰减区间之间的通带范围消失。因此,研究阻尼对结构禁带特性的影响十分必要。

以上研究均基于上、下两层振子质量相同,为了进一步研究上、下两层振子质量变化对结构衰减特性的影响,引入振子质量比 λ ,在保持 $m_n^I+m_n^{II}=m_{\text{beam}}/4$ 的条件下,令 $m_n^I=\lambda m_{\text{beam}}/4$,所得结果如图 8 所示。

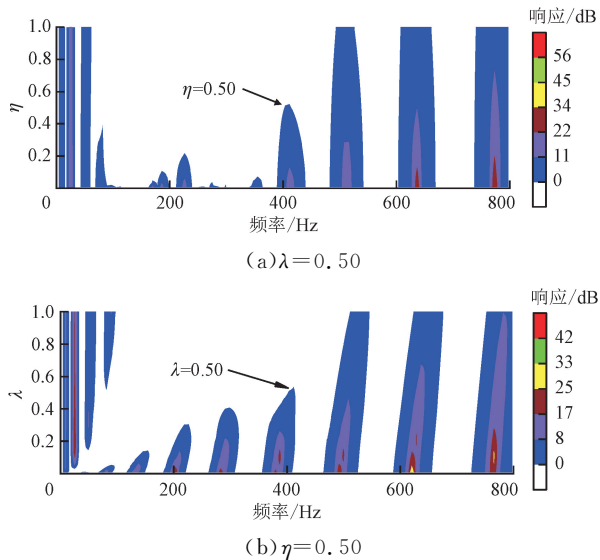


图 8 阻尼和质量比对双层非均匀振子超材料梁振动特性的影响($\delta=15\text{ Hz}$)

Fig. 8 Effect of damping and mass ratio on the vibration characteristics of double-layer metamaterial beams with non-uniform resonators ($\delta=15\text{ Hz}$)

图 8(a)给出了 $\delta=15\text{ Hz}$ 、 $\lambda=0.50$ 工况下,阻尼 η 在 $0\sim 1$ 之间变化时的频响曲线云图,空白区间的响应值在 0 以下,即为振动衰减区间。由图 8(a)可见,当阻尼大于 0.50 时,低于 500 Hz 的低频范围内能够产生最大范围的衰减区间,而当阻尼小于 0.50 时,衰减区间范围逐渐减小,且衰减区域中间出现间断的通带范围。

图 8(b)给出了 $\delta=15\text{ Hz}$ 、 $\eta=0.50$ 工况下,质量比 λ 在 $0\sim 1$ 之间变化时的频响曲线云图。从图中可以看出,当质量比大于 0.50 时,存在一个连续的衰减区间。值得注意的是,当质量比趋近于 0 时,意味着第一层振子质量趋近于 0 ,在这种情况下相当于无振子安装到基体梁上,此时的云图与图 2、图 5 中未加振子梁的频响曲线相对应;当质量比趋近于 1 时,意味着质量完全分布在第一层振子上,此时的云图与单层非均匀振子超材料梁结构的频响曲线相对应。

3 实验验证

为验证本文提出的设计方法,分别制作了单、双层非均匀振子超材料梁结构。基体梁尺寸为 $1\,500\text{ mm}\times 30\text{ mm}\times 20\text{ mm}$,材料为铝,其材料参数与表 1 相同。振子单元由密度为 $8\,300\text{ kg/m}^3$ 、长宽尺寸为 $20\text{ mm}\times 30\text{ mm}$ 的铜块,以及密度为 $1\,300\text{ kg/m}^3$ 、弹性模量为 7.5 MPa 、尺寸为 $20\text{ mm}\times 30\text{ mm}\times 10\text{ mm}$ 的硅橡胶块组成。由于橡胶刚度难以调节,保持橡胶块的尺寸及铜块的长度、宽度不变,仅通过调节铜块的高度来调节振子的特征频率。对于单层非均匀振子超材料结构,每个最小重复单元(300 mm 的基体梁)包含 6 个振子,取铜块的最大高度为 30 mm ,通过有限元软件求得构成振子的特征频率为 415 Hz ,然后以该值为起始频率,由式(3)求得振子产生的最大禁带宽度为 60 Hz 。为了获得连续的衰减区间,相邻振子的特征频率应当小于 475 Hz ,由此计算得到相邻振子的铜块高度,重复以上步骤,即可得到所有铜块的高度,其具体参数见表 2,此时求得结构的质量比 $\mu=1.27$ 。对于双层非均匀振子超材料结构,每个子结构包含质量相同的上、下两层振子,3 个子结构的振子高度分别为 19 、 16 、 14 mm ,可求得结构的质量比 $\mu=1.10$ 。实验原理及测试装置如图 9 所示。

表 2 单层非均匀振子超材料铜块的高度及特征频率
Table 2 Height of the copper blocks and eigenfrequency of the non-uniform resonators for the single-layer metamaterial

铜块高度/mm	30	23	19	16	14	12.5
特征频率/Hz	415	470	515	558	594	626

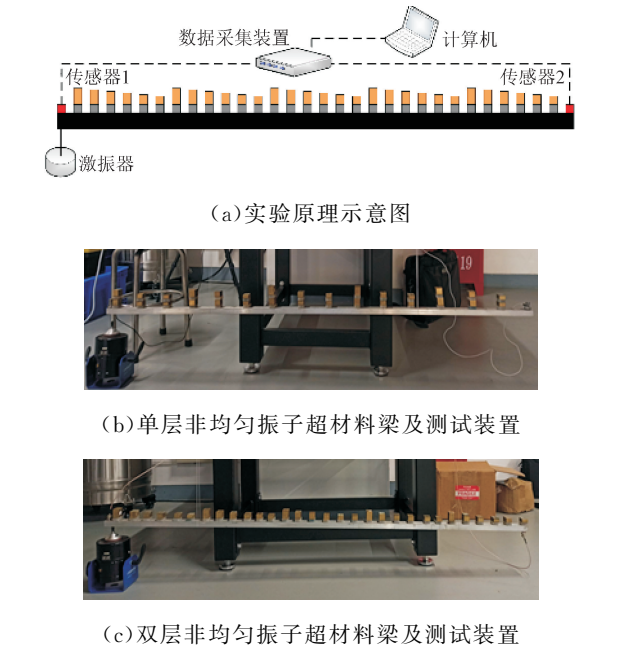


图 9 实验原理示意图及单、双层非均匀振子超材料梁测试装置

Fig. 9 Experimental schematic and test setup for the single- and double-layer metamaterial beams with non-uniform resonators

测试样件悬挂安装,由激振器(the modal shop 公司, model 2060E)在一端激发出频率为 0~2 000 Hz 的正弦扫频信号,采用加速度传感器测量超材料梁两端的加速度响应,经过数据处理系统(亿恒 MI-7008)处理,得到的频响曲线如图 10 所示。

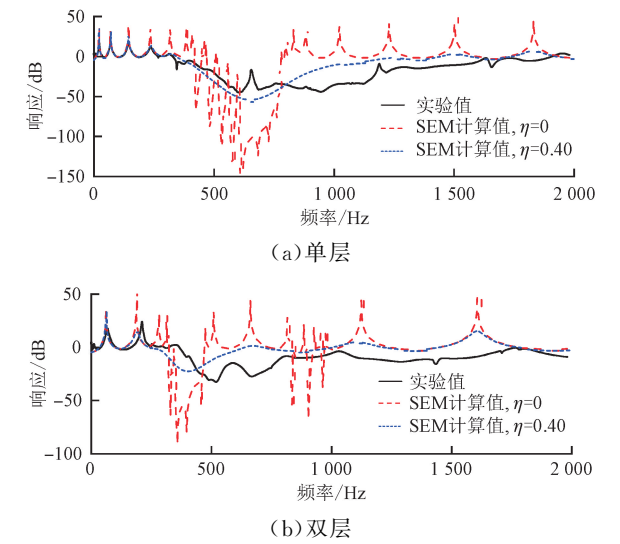


图 10 单、双层非均匀振子超材料梁实验结果与 SEM 计算结果的对比

Fig. 10 Comparison of experimental and SEM results for the single- and double-layer metamaterial beams with non-uniform resonators

图 10 给出了实验结果与 SEM 法计算结果的对比,由于实际中硅橡胶的阻尼难以测量,因此采用 SEM 法分别计算了 η 为 0、0.40 时超材料结构的振动响应。由图 10 可见,实验测得的频响曲线与 $\eta=0.40$ 时 SEM 法计算得到的结果基本一致。值得一提的是,由于橡胶材料阻尼在不同频率下会发生改变^[26],所以实验结果与阻尼取常数时 SEM 的仿真结果并不完全一致。此外,结构的安装误差以及测试误差都会对实验结果产生一定影响。

在商业软件 COMSOL 6.0 中建立二维有限元模型,模型尺寸和边界条件与单、双层非均匀振子超材料梁实验模型相同,橡胶层阻尼设置为 0。在梁模型左端沿竖直方向施加频率为 0~2 000 Hz 的简谐激振力,通过有限元仿真分析,得到不同频率下单、双层结构的变形如图 11、12 所示。

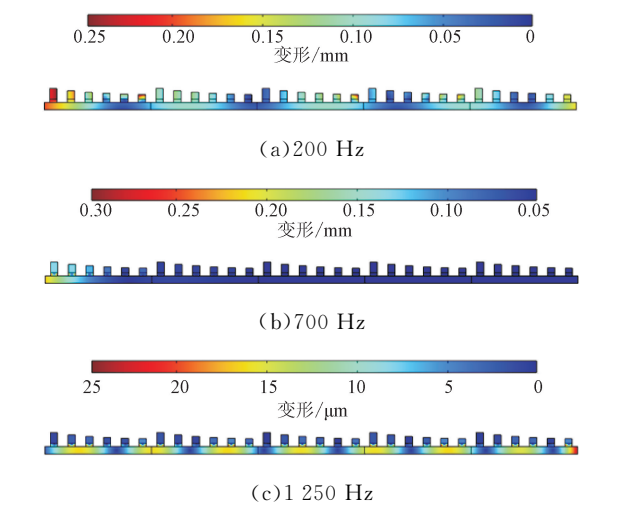
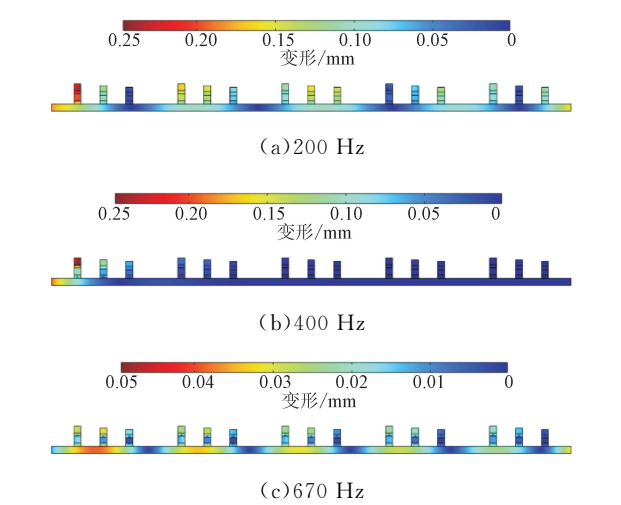


图 11 不同频率下单层非均匀振子的结构变形

Fig. 11 Deformation of the single-layer metamaterial beams with non-uniform resonators under different frequencies



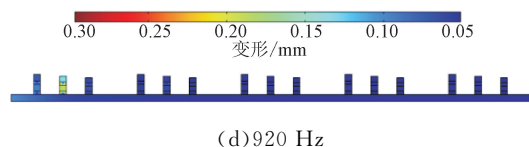


图12 不同频率下双层非均匀振子的结构变形

Fig. 12 Deformation of the double-layer metamaterial beams with non-uniform resonators under different frequencies

从仿真结果可以看出,当振动频率处于禁带范围内,如图11(b)、12(b)、12(d)所示,梁左端产生的振动均得到了明显抑制;当振动频率处于禁带范围外,如图11(a)、11(c)、12(a)、12(c)所示,两种结构均未对梁左端的振动产生抑制效果。

4 结 论

本文采用SEM法建立了多振子局域共振超材料梁结构的数学模型,研究了单层和双层振子结构的振动特性,得到的主要结论如下。

(1)增加振子特征频率间隔,能够拓宽禁带区间,但同时会造成频响曲线波动,频率间隔越大,波动现象越剧烈。

(2)添加阻尼(损耗因子)可以抑制波动现象。对于单层振子超材料结构,阻尼越大,禁带区间越宽,但振动衰减越小;对于双层超材料结构,当阻尼大于一定范围后,禁带区间内的波动现象得到抑制,且系统形成的两个离散禁带区间汇合到一起,形成一个连续的禁带区间。单层非均匀、均匀振子超材料梁的禁带宽度分别为440、68 Hz,双层非均匀、均匀振子超材料梁的禁带宽度分别为395、40 Hz。

(3)通过调节双层非均匀振子超材料梁的质量比和阻尼,能够将双层均匀振子超材料梁的离散禁带区间合并成一个连续的禁带区间。在质量比为0.50的条件下,阻尼大于0.50时禁带区间连续;在阻尼为0.50的条件下,质量比大于0.50时禁带区间连续。

参考文献:

- [1] 温卓群,王鹏飞,张雁,等.面向大尺度结构的力学超材料减振技术[J].航空学报,2018,39(S1):150-154. WEN Zhuoqun, WANG Pengfei, ZHANG Yan, et al. Vibration reduction technology of mechanical metamaterials presented to large scale structures [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2018, 39(S1): 150-154.
- [2] 吴九汇,马富银,张思文,等.声学超材料在低频减

振降噪中的应用评述[J].机械工程学报,2016,52(13):68-78.

WU Jiuhui, MA Fuyin, ZHANG Siwen, et al. Application of acoustic metamaterials in low-frequency vibration and noise reduction [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(13): 68-78.

- [3] PAI P F, PENG Hao, JIANG Shuyi. Acoustic metamaterial beams based on multi-frequency vibration absorbers [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2014, 79: 195-205.
- [4] LIU Zhengyou, ZHANG Xixiang, MAO Yiwei, et al. Locally resonant sonic materials [J]. Science, 2000, 289(5485): 1734-1736.
- [5] LI Zhengwei, WANG Xiaodong. Wave propagation in a dual-periodic elastic metamaterial with multiple resonators [J]. Applied Acoustics, 2021, 172: 107582.
- [6] LU Kuan, TIAN Yongjun, GAO Nansha, et al. Propagation of longitudinal waves in the broadband hybrid mechanism gradient elastic metamaterials rods [J]. Applied Acoustics, 2021, 171: 107571.
- [7] LIN Siqi, ZHANG Yongshan, LIANG Yingjing, et al. Bandgap characteristics and wave attenuation of metamaterials based on negative-stiffness dynamic vibration absorbers [J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 502: 116088.
- [8] LIU Panxue, ZUO Shuguang, WU Xudong, et al. Study on the vibration attenuation property of one finite and hybrid piezoelectric phononic crystal beam [J]. European Journal of Mechanics: A Solids, 2020, 84: 104017.
- [9] THOMES R L, MOSQUERA-SÁNCHEZ J A, DE MARQUI C. Bandgap widening by optimized disorder in one-dimensional locally resonant piezoelectric metamaterials [J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 512: 116369.
- [10] 李锁斌,魏儒义,周安安,等.超结构夹芯板及其低宽频振动带隙机理[J].西安交通大学学报,2021,55(4):77-85. LI Suobin, WEI Ruyi, ZHOU An'an, et al. A new sandwich type metamaterial plate and its mechanism of low-frequency broad vibration band gap [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2021, 55(4): 77-85.
- [11] 李丽霞,杨继博,吕锐翔,等.新型环状谐振径向弹性超材料结构低频带隙机理研究[J].西安交通大学学报,2020,54(11):91-97. LI Lixia, YANG Jibo, LÜ Ruixiang, et al. Low-frequency band gap mechanism of radial elastic metamaterial with new ring resonance [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2020, 54(11): 91-97.
- [12] YU Dianlong, LIU Yaozong, ZHAO Honggang, et al. Flexural vibration band gaps in Euler-Bernoulli beams

- with locally resonant structures with two degrees of freedom [J]. *Physical Review: B*, 2006, 73(6): 064301.
- [13] 李锁斌, 陈天宁, 奚延辉, 等. 声子晶体板中低频完全禁带形成机理研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2016, 50(12): 51-57.
- LI Suobin, CHEN Tianning, XI Yanhui, et al. Forming mechanisms of low-frequency complete band gaps in phononic crystal plate [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2016, 50(12): 51-57.
- [14] 李锁斌, 窦益华, 陈天宁, 等. 局域共振型周期结构振动带隙形成机理 [J]. *西安交通大学学报*, 2019, 53(6): 169-175.
- LI Suobin, DOU Yihua, CHEN Tianning, et al. Formation mechanisms of vibration band gaps in locally resonant periodic structures [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2019, 53(6): 169-175.
- [15] ZHANG Zhen, LI Tuanjie, WANG Zuowei, et al. Band gap characteristics of flexural wave of two-dimensional periodic frame structure composed of locally resonant composite beam [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 131: 364-380.
- [16] 罗金雨, 姚凌云, 江国期, 等. 一种圆柱壳类声子晶体振动带隙及振动特性研究 [J]. *振动与冲击*, 2019, 38(8): 133-138.
- LUO Jinyu, YAO Lingyun, JIANG Guoqi, et al. A study on the vibration band gap and vibration characteristics of a cylindrical shell phononic crystal [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(8): 133-138.
- [17] ZUO Shuguang, NI Tianxin, WU Xudong, et al. Studies of band gaps in flexural vibrations of a locally resonant beam with novel multi-oscillator configuration [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2017, 23(10): 1663-1674.
- [18] EL-BORGI S, FERNANDES R, RAJENDRAN P, et al. Multiple bandgap formation in a locally resonant linear metamaterial beam: theory and experiments [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 488: 115647.
- [19] HU Guobiao, AUSTIN A C M, SOROKIN V, et al. Metamaterial beam with graded local resonators for broadband vibration suppression [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 146: 106982.
- [20] 吴志静, 李凤明, 王毅泽. 谱元法研究桁架结构的振动带隙特性 [J]. *计算力学学报*, 2013, 30(S1): 92-95.
- WU Zhijing, LI Fengming, WANG Yize. Study on truss periodic structures with vibration band gap properties using the spectral element method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, 30(S1): 92-95.
- [21] WU Zhijing, LIU Wenyu, LI Fengming, et al. Band-gap property of a novel elastic metamaterial beam with X-shaped local resonators [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 134: 106357.
- [22] AN Xiyue, FAN Hualin, ZHANG Chuanzeng. Elastic wave and vibration bandgaps in planar square metamaterial-based lattice structures [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 475: 115292.
- [23] 吴志静. 周期结构的振动行为与隔振性能研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
- [24] SUGINO C, LEADENHAM S, RUZZENE M, et al. On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials [J]. *Journal of Applied Physics*, 2016, 120(13): 134501.
- [25] PENG Hao, FRANK PAI P, DENG Haoguang. Acoustic multi-stopband metamaterial plates design for broadband elastic wave absorption and vibration suppression [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 103: 104-114.
- [26] 王成林, 张之敬, 马斌, 等. 新型阻尼橡胶圈的动态特性测试 [J]. *材料导报*, 2006, 20(S1): 273-274.
- WANG Chenglin, ZHANG Zhijing, MA Bin, et al. Dynamic characteristic test of the new damping rubber ring [J]. *Materials Review*, 2006, 20(S1): 273-274.

(编辑 李慧敏)