

圆柱壳高频弯曲振动的能量有限元分析

解妙霞, 陈花玲, 吴九汇

(西安交通大学振动与噪声控制研究所, 710049, 西安)

摘要: 为了利用能量有限元方法得到圆柱壳体任意一点的高频振动响应, 根据薄壳理论和能量平衡关系, 推导了圆柱壳弯曲振动能量密度的控制方程, 并运用有限元方法对圆柱壳弯曲振动能量密度的控制方程进行了求解. 计算了3种不同激励下圆柱壳的能量密度分布, 并对能量有限元方法和统计能量方法的计算结果进行了比较. 有限元方法的分析表明, 使用能量有限元方法能够获得更详细的结构振动响应信息, 而用统计能量法只能得到整个圆柱壳体的平均能量信息. 推导得出的能量密度方程与梁的能量密度方程类似, 只适用于计算圆柱壳高频轴对称弯曲的振动响应.

关键词: 有限元分析; 圆柱壳体; 高频振动; 控制方程

中图分类号: TB123 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)09-1113-04

Energy Finite Element Analysis to High-Frequency Bending Vibration in Cylindrical Shell

XIE Miaoxia, CHEN Hualing, WU Jiuhui

(Institute of Vibration and Noise Control, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To obtain detail information of high-frequency vibration in cylindrical shell, the governing equation of energy density about bending vibration in cylindrical shell is developed based on the relationship of an energy balance and thin shell theory. A deduced second order equation models the far field energy distribution. The resulting equation is solved by means of finite element method. A comparison between the results of energy finite element analysis and statistical energy analysis indicates that the energy finite element analysis enables to get more detail information of high-frequency vibration. This governing equation is similar to the beam equation for only high-frequency axisymmetric bending vibration response of cylindrical shell.

Keywords: finite element analysis; cylindrical shell; high-frequency vibration; governing equation

声振耦合分析是较为活跃的研究领域, 新的分析方法不断地被发展、应用^[1-3], 其中统计能量方法(SEA)和能量有限元方法(EFEA)是分析结构高频声振响应最常用的方法. 利用EFEA可得到结构上任意一点的能量信息, 与只能得到每个子结构中粗略平均能量信息的SEA相比, 具有很大的优越性, 因此在解决中、高频段结构振动和声辐射问题中有很大的发展前景. 由于EFEA只有10多年的发展历史, 还远没有达到成熟和完善的地位, 因此到目前为止, EFEA在结构振动和声辐射问题上的应用还

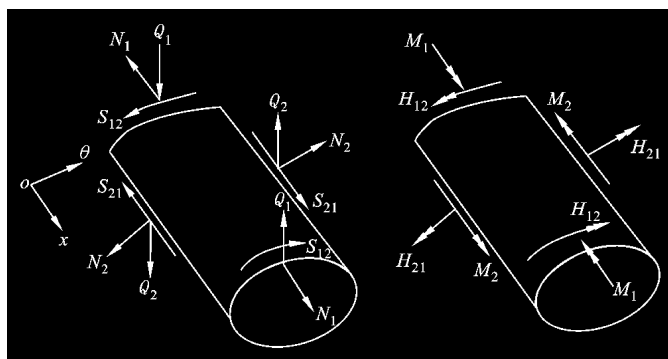
只局限在有限的几类简单问题上, 如杆、梁、板、耦合结构等, 这主要是因为对于复杂的结构, 较难获得它的控制方程.

1989年, Nefske和Sung^[4]提出一种梁的能量有限元方法, 在控制体积内将有限元技术引入到能量偏微分方程的求解中, 被认为是能量有限元的开端. Lase和Jezequel采用与Sung所用的类似方法建立了纵向振动杆的能量控制方程, Bouthier^[5]独创性地引入了远场有损耗平面波近似的假设, 得到了薄膜、薄板的能量控制方程.

目前,对于壳体能量密度控制方程的推导还尚未见报道,本文假设圆柱壳只承受法向载荷,基于薄壳理论,推导了圆柱壳在轴对称弯曲振动情况下的能量密度控制方程.利用有限元方法对该控制方程进行求解,其结果和采用 SEA 得到的结果相吻合,证明了所推导的控制方程的正确性.

1 能量密度控制方程的推导

本文在推导圆柱壳弯曲振动能量密度控制方程的过程中,采用柱坐标系,圆周法向为 R 轴方向,轴向、周向分别为 x, θ ,如图 1 所示.



N_1, N_2 :法向内力; Q_1, Q_2 :横向剪力; S_{12}, S_{21} :法向剪力;

M_1, M_2 :内力矩; H_{12}, H_{21} :扭矩

图1 圆柱壳内力和内力矩示意图

在圆柱壳轴对称变形的问题中,周向载荷 $q_2=0$,而轴向载荷 q_1 、法向载荷 q_3 都只是坐标 x 的函数.由于轴对称的原因, $S_{12}=S_{21}=0, H_{12}=H_{21}=0, Q_2=0$,因此 N_1, N_2, Q_1 和 M_1, M_2 都只是坐标 x 的函数.假设壳体只承受法向载荷,则 $N_1=0$.运动方程为

$$D(1+i\eta) \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中: ρ 为材料密度; h 为圆柱壳的厚度; a 为圆柱壳的半径; w 为圆柱壳的法向位移; E 为杨氏模量; D 为弯曲刚度; η 为阻尼系数.

假设 $w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$, $W(x)$ 为法向位移的振幅, ω 为圆频率, t 为时间,则

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = 0 \quad (2)$$

式(2)的解为

$$w(x, t) = (Ae^{-ikx} + Be^{ikx} + Ce^{-kx} + De^{kx})e^{i\omega t} \quad (3)$$

式中: A, B, C, D 为待定常数; k 为波数.若 $\eta \ll 1$,则

$$k = k_1 + ik_2 \quad (4)$$

$$k_1 = \left((\rho h \omega^2 - \frac{Eh}{a^2}) / D \right)^{1/4} = \omega / c_f \quad (5)$$

$$k_2 = -\frac{\eta}{4} k_1 \quad (6)$$

$$c_f^4 = \frac{\omega^4 D}{(\rho h \omega^2 - Eh/a^2)} = \frac{\omega^4 Eh^3}{12(1-\mu^2)(\rho h \omega^2 - Eh/a^2)} \quad (7)$$

式中: c_f 为波速; μ 为泊松比.对于任意形状的壳体,其整个壳体中的应变能^[6]为

$$U = \iint \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} ((\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 2(1-\mu) \cdot (\epsilon_1 \epsilon_2 - \xi^2/4)) A_1 A_2 dx dy + \iint \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} ((\gamma_1 + \gamma_2)^2 - 2(1-\mu) \cdot (\gamma_1 \gamma_2 - \tau^2)) A_1 A_2 dx dy \quad (8)$$

则微元内的势能密度为

$$\rho_U = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left[(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_2 - \xi^2/4}{\xi^2/4} \right) \right] + \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} ((\gamma_1 + \gamma_2)^2 - 2(1-\mu)(\gamma_1 \gamma_2 - \tau^2)) \quad (9)$$

式中: ϵ_1, ϵ_2 分别为 x 方向和 θ 方向的应变; ξ 为相对剪切应变; γ_1 和 γ_2 分别为 x 方向和 θ 方向的曲率; τ 为扭率.

对于圆柱壳轴对称变形,应变和位移的关系为

$$\epsilon_1 = \frac{du}{dx} = -\frac{\mu}{a} w, \quad \epsilon_2 = \frac{w}{a}, \quad \xi = 0 \quad (10)$$

$$\gamma_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \tau = 0 \quad (11)$$

将式(10)和式(11)代入式(9)得

$$\rho_U = \frac{Eh}{2} \frac{w^2}{a^2} + \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \quad (12)$$

式中: u 表示 x 方向的位移; $\frac{Eh w^2}{2 a^2}$ 只包含了中曲面的相对伸长及剪切应变,它对应面内变形的应变能密度; $\frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2$ 只包含中曲面的曲率变化和扭矩,它对应弯曲变形的应变能密度.

微元弯曲振动动能密度为

$$\rho_T = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 w^2 \quad (13)$$

弯曲能量密度为动能密度和势能密度之和,即

$$e = \rho_U + \rho_T \quad (14)$$

将式(12)中的第2项和式(13)代入式(14)得

$$e = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho h \omega^2 w^2 \quad (15)$$

因为 $\eta \ll 1, k_2 \ll k_1$,式(3)位移解中含有 C 的一

项随着 x 增大迅速衰减,而含有 D 的一项在 $x \rightarrow \infty$ 时,振幅为无穷大,这不符合客观事实.因此,在高频假设下,式(3)中含有 C 、 D 的项可以忽略,而含有 A 、 B 的项是远场解项,表示的是以指数衰减的行波.将式(3)代入式(15),并在一个时间周期内对能量密度进行平均,得能量密度的远场解为

$$\bar{e} = \left(\frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} k_1^4 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \right) \cdot \left(|A|^2 e^{-\gamma/2 k_1 x} + |B|^2 e^{\gamma/2 k_1 x} + AB^* e^{-i2k_1 x} + BA^* e^{i2k_1 x} \right) \quad (16)$$

对能量密度进行空间平均,消去随空间的波动项,得能量密度的远场平稳解为

$$\langle \bar{e} \rangle = \left(\frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} k_1^4 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \right) \cdot \left(|A|^2 e^{-\gamma/2 k_1 x} + |B|^2 e^{\gamma/2 k_1 x} \right) \quad (17)$$

因圆柱壳的横向剪力为 $\frac{E(h^2-4z^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{d^3 w}{dx^3}$, 横向速度为 $\frac{\partial w}{\partial t}$, 则剪力所对应的功率为

$$q_s = \frac{E(h^2-4z^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{d^3 w}{dx^3} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (18)$$

又因圆柱壳的弯矩为 $\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2}$, 角速度为 $-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$, 则弯矩所对应的功率为

$$q_m = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \quad (19)$$

将 q_s 、 q_m 相加并对 z 积分,得到沿壳体厚度上的功率分布

$$p = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \frac{d^3 w}{dx^3} (i\omega w)^* - \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^* \quad (20)$$

式中: $*$ 表示取共轭.将式(3)代入式(20),并忽略近场项,得平稳远场功率

$$\bar{p} = 2\omega \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} k^3 \left(|A|^2 e^{-\gamma/2 k_1 x} - |B|^2 e^{\gamma/2 k_1 x} \right) \quad (21)$$

比较式(17)和式(21),得功率和能量密度的关系式

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{4C_1^2}{\eta \omega} \frac{\partial^2 \langle \bar{e} \rangle}{\partial x^2} \quad (22)$$

根据能量平衡,通过任意给定结构表面的能量流应等于结构内总能量的变化率,即

$$\iiint \frac{\partial e}{\partial t} dV = \iint \left(\boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) dA + \iiint (\pi_{in} - \pi_{diss}) dV \quad (23)$$

$$\iint \left(\boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) dA = -\iint \bar{p} dA = -\iiint \nabla \bar{p} dV \quad (24)$$

对于稳态响应,能量对时间的导数为0,则

$$\pi_{in} = \pi_{diss} + \nabla \bar{p} \quad (25)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为结构内部应力矩阵; π_{in} 为输入功率; π_{diss} 为耗散功率; $\nabla \bar{p}$ 为时间平均波能量强度的散度,可描述能量在控制域内的流动特性.对迟滞阻尼模型

$$\bar{\pi}_{diss} = \eta \omega \bar{e} \quad (26)$$

将式(22)、式(26)进行时间、空间平均后,代入式(25),得到圆柱壳轴对称弯曲振动的远场能量控制方程

$$-\frac{4C_1^2}{\eta \omega} \frac{d^2 \langle \bar{e} \rangle}{dx^2} + \eta \omega \langle \bar{e} \rangle = \pi_{in} \quad (27)$$

式(27)即为本文推导出来的圆柱壳弯曲振动能量密度控制方程.

2 控制方程的验证

利用有限元分析方法对式(27)进行求解,所取参数如表1所示(表中 l 为圆柱壳体的长度).

表1 圆柱壳的几何参数和材料参数

l/m	1.00
h/m	0.01
a/m	0.50
$\rho/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	2 700.00
E/MPa	71 000.00
μ	0.33
η	0.01

在壳体轴向坐标 x 为 0 m 和 0.5 m 处施加 200 W 的功率载荷、分析频率为 1 kHz 下,分别计算了圆柱壳体上各点的能量密度值,见图2和图3.为了验证解的正确性,采用统计能量分析方法,对同一圆柱壳进行分析,并将整个壳体作为一个子系统,但不考虑子系统之间的能量传递,因此输入功率等于耗散功率,即

$$p_{in} = \eta \omega e \quad (28)$$

利用式(28)可直接计算出壳体的能量密度为 3.18 J/m².

由于 SEA 进行了空间平均,整个子系统具有相同的能量密度值,因此该能量密度值应与 EFEA 得到的壳体上各点的能量密度平均值 e_a 相等.由图中可以看出,EFEA 和 SEA 结果的相对误差为 0.22% 左右,因此控制方程得到了验证.比较图2和

图3发现,当同样大小的载荷施加在不同位置时,各点的能量密度值不同,但采用SEA方法却不能区分这2种情况下的差别。

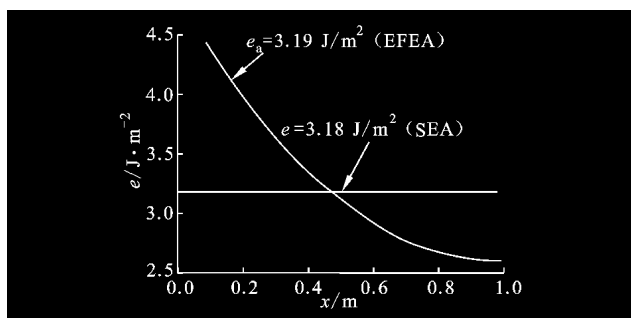
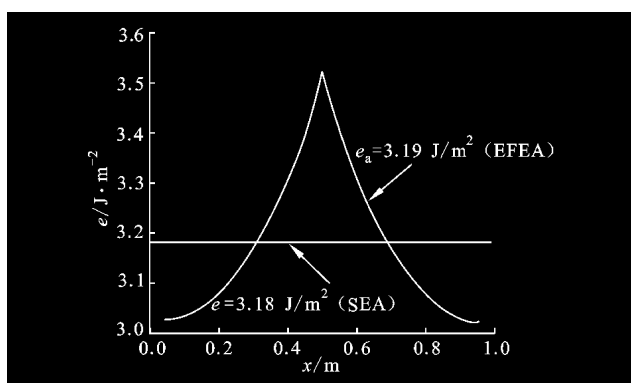


图2 EFEA和SEA的能量密度比较($x=0$ m处施加载荷)



3 EFEA和SEA的能量密度比较($x=0.5$ m处施加载荷)

如图4所示,为了表明EFEA计算振动特性的能力,对圆柱壳施加一个沿径向分布的载荷,载荷在圆周方向是均匀分布的,在 x 方向是线性变化的,沿 x 方向的变化规律为 $(1/250)x$ 。将EFEA方法中各个节点的载荷之和作为SEA的载荷值,计算得到的结果相同,说明2种方法的计算结果非常吻合。

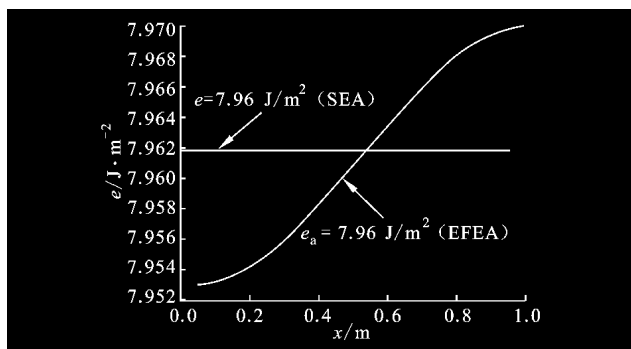


图4 沿轴向线性变化施加载荷时的2种能量密度比较

3 结论

本文根据薄壳理论,推导了圆柱壳弯曲振动的能量密度控制方程,并利用有限元方法对该控制方程进行求解,求解结果和SEA计算结果相吻合,由此证明了所推导的控制方程的正确性。对推导出来

的控制方程讨论如下。

(1)由于在推导过程中假设分析频率为高频,而且 $\eta \ll 1$,忽略了位移解中含有 C 、 D 待定常数的项,因此推导出来的能量密度控制方程适用于高频、小阻尼圆柱薄壳体结构,而在用于低频段时对计算精度会产生影响。

(2)与梁的运动方程相比,圆柱壳轴对称运动方程多了法向位移的一次项,使得波数表达式不同于梁的情况,但在后来对能量密度进行求导时,消去了该项的影响,因此推导出来的能量密度控制方程与梁的能量密度方程类似。

(3)本文推导出来的能量密度控制方程只是圆柱壳弯曲振动的能量密度控制方程,要将能量有限元法真正用于复杂壳体结构中,还有很多工作尚待进行。

参考文献:

- [1] WU Jiuhui, CHEN Hualing, AN Weibin. A method to predict sound radiation from a plate-ended cylindrical shell excited by an external force [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237(5): 793-803.
- [2] 吴成军,陈花玲,黄协清. 浸没圆柱薄壳远场辐射声场的理论预估 [J]. 西安交通大学学报, 1999, 33(1): 107-110.
- [3] WU Chengjun, CHEN Hualing, HUANG Xieqing. Theoretical prediction of sound radiation at far field for a submerged cylindrical shell [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1999, 33(1): 107-110.
- [4] 伍先俊,朱石坚,曹建华. 结构声振研究的功率流方法 [J]. 力学进展, 2006, 36(3): 363-372.
- [5] WU Xianjun, ZHU Shijian, CAO Jianhua. Review on structural vibration power flow prediction methods [J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(3): 363-372.
- [6] NEFSKE D J, SUNG S H. Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and applications to beams [J]. ASME Transaction Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Designed, 1989, 111(1): 94-100.
- [7] BOUTHIER O M, BERNHARD R J. Simple models of energetics of transversely vibrating plates [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 182(1): 149-164.
- [8] 何福保,沈亚鹏. 板壳理论 [M]. 西安:西安交通大学出版社, 1993: 310-312.

(编辑 管咏梅)