

基于间断有限元求解浅水方程

韩涛¹, 逢勇¹, 安婷², 翟金波¹

(1. 河海大学环境科学与工程学院, 210098, 南京; 2. 河海大学水文水资源与水利工程
科学国家重点实验室, 210098, 南京)

摘要: 基于间断迎辽金有限元方法建立了求解二维、深度平均浅水方程的模型, 该模型由浅水方程这一系列双曲方程组按照守恒律推导而得. 通过在某一单元积分方程组并乘以基函数可以得到一个弱解, 并假设未知量为间断分布的多项式逐个单元求解. 由于间断有限元的本质具有局部特征, 因此很容易通过提高插值多项式的次数来提高模拟精度. 同时, 间断有限元又具有局部守恒特征, 可以结合数值通量来模拟高流动梯度问题. 最后, 给出了间断有限元的数值模拟结果.

关键词: 浅水方程; 间断有限元; 通量; 黎曼算子; 守恒

中图分类号: O352; O241. 82 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)03-0377-03

Discontinuous Finite Element Method Applied to Shallow Water Equations

Han Tao¹, Pang Yong¹, An Ting², Zhai Jinbo¹

(1. College of Environment Science and Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

浅水是指其水平方向特征波长远大于其深度的水体. 在这种情况下, 忽略水体的垂向差异造成的误差很小. 地表的江、河、湖泊, 以及近海大部分水体都可以看作浅水, 研究浅水方程对模拟水利工程的环境影响、生态影响以及近海季风造成的海啸等具有重要的意义. 目前, 模拟浅水方程较常用的方法是有限体积法, 该方法主要通过降维使用一维黎曼算子来计算单元间的通量交换, 其主要缺陷是空间只能取得一阶精度, 虽然可以通过通量限制因子来取得二阶精度, 但这种方法不很直观, 有些情况很难处理. 本文提出的间断有限元方法是在 Runge-Kutta 间断有限元^[1-4]基础上发展起来的, 该方法结合了有限体积法中数值通量和黎曼解以及有限元法可以通过提高插值多项式的阶数来提高空间精度的优点, 又克服了这两种方法的不足, 使得其在计算流体力学中发挥着越来越重要的作用.

1 数学模型

1.1 空间离散

考虑水体无黏、不可压, 将浅水长波方程写为如

下形式^[5]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot A = f(C) \quad (1)$$

式中

$$C = \begin{bmatrix} \xi \\ U \\ V \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} U & V \\ \frac{U^2}{H} + \frac{1}{2}g(H^2 - h_b^2) & \frac{UV}{H} \\ \frac{UV}{H} & \frac{V^2}{H} + \frac{1}{2}g(H^2 - h_b^2) \end{bmatrix}$$

$$f(C) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{bf}U + f_cV + g\xi \frac{\partial h_b}{\partial x} + F_x \\ -\tau_{bf}V - f_cU + g\xi \frac{\partial h_b}{\partial y} + F_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

方程(1)代表了浅水方程的水量和动量守恒, 其中 $H = h_b + \xi$ 为总水深, h_b 是基准水深. $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} Hu \\ Hv \end{bmatrix}$, u, v 为水平面沿 x, y 方向的流速, τ_{bf} 为底部

摩擦系数, f_c 是柯里奥里力, 将风力、压强等通过体力 F 表示^[6].

规定 $(\cdot, \cdot)_R$ 表示 $L^2(R)$ 内积, $\{\zeta_h\}_{h>0}$ 表示 Q 面域一种有限元剖分, h 为离散有限元的最大边长, ∂Q_e 为单元 e 的边, $\mathbf{n}_e$ 为 ∂Q_e 的外法线方向. 令 w 为基函数, 对 $x \in \partial Q_e$ 定义 $w^{\text{in}}(x) = \lim_{s \rightarrow 0^-} w(x + s\mathbf{n}_e)$, $w^{\text{ext}}(x) = \lim_{s \rightarrow 0^+} w(x + s\mathbf{n}_e)$, s 为一无穷小量.

由格林定理

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}, w\right)_{\Omega_e} - (A, \nabla \cdot w)_{\Omega_e} + \langle A \cdot \mathbf{n}_e, w \rangle_{\partial \Omega_e} = (f(c), w)_{\Omega_e} \quad (3)$$

当采用常数插值时, 间断有限元即转化为有限体积法, 因此可以将有限体积法看作间断有限元的特例. 由于允许基函数在边界出现间断, 因此 $A \cdot \mathbf{n}_e$ 项在边界的值不能准确确定, 需要采用数值流量 $g(x, y, t)_e$ 来代替, 目前较常见的有 Roe 和 Lax-Friedrich 算子, 其中后者较为简单.

$$g(A \cdot \mathbf{n}_e) = \hat{g}_n(A^{\text{in}}, A^{\text{ext}}) = \frac{1}{2}(g_n(A^{\text{in}}) + g_n(A^{\text{ext}})) + \frac{1}{2} |\hat{\lambda}_{\max}| (A^{\text{in}} - A^{\text{ext}}) \quad (4)$$

式中: $\hat{\lambda}_{\max}$ 为矩阵 $(A \cdot \mathbf{n}_e)$ 的最大特征值.

将矩阵 $(A \cdot \mathbf{n}_e)$ 分解后可得

$$\lambda_1 = u_n - (gh)^{1/2}; \lambda_2 = u_n; \lambda_3 = u_n + (gh)^{1/2} \quad (5)$$

这里取局部 Lax-Friedrich 算子, 即对某一单元边, 选择和该边相邻的两个单元中最大的 λ . 局部和全局 Lax-Friedrich 算子的比较见文献[4]. 一般而言, 全局 Lax-Friedrich 算子具有更高的耗散性.

1.2 时间离散

采用 Cockburn 和 Shu 提出的 3 阶显式 TVD Runge-Kutta 时间离散. 对偏微分算子 $U_t = L_h(U)$, 设模拟时间为 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_k < \dots < t_n = T$, 令时间步长 $\Delta t_k = t^{k+1} - t^k$, 则

$$U^{(1)} = U^k + \Delta t_k L_h(U^k) \quad (6)$$

$$U^{(2)} = \frac{3}{4}U^k + \frac{1}{4}(U^{(1)} + \Delta t_k L_h(U^{(1)})) \quad (7)$$

$$U^{(k+1)} = \frac{1}{3}U^k + \frac{2}{3}(U^{(2)} + \Delta t_k L_h(U^{(2)})) \quad (8)$$

为保持稳定, 时间步长 $\Delta t \leq \min\left(\min_{Q_e} \frac{h_e}{(\lambda_{\max})_e}\right)$.

其中, h_e 为单元 e 的边长, $(\lambda_{\max})_e$ 为数值通量 $A \cdot \mathbf{n}_e$ 的最大特征值.

1.3 边界处理

当单元边与计算域边界或物理边界一致时, 必

须求解边界黎曼问题. 前述两种求解内部问题的黎曼近似解算子均可使用. 此时, 边界处 A^{in} 为已知量, 而 A^{ext} 为要求的未知数.

(1) 陆地边界: 对陆地边界假定 $h^{\text{ext}} = h^{\text{in}}$, $u_n^{\text{ext}} = -u_n^{\text{in}}$, $u_\tau^{\text{ext}} = u_\tau^{\text{in}}$, 其中 u_n 、 u_τ 分别为边界的速度法向和切向分量.

(2) 内边界: 水利设施中法向通量的计算不能应用黎曼近似解, 而要采用与水利设施相应的出流公式.

2 数值模拟

2.1 溃坝模拟

水流模拟中经常采用的一种模拟是 2D 溃坝模拟, 这种数值模拟很好地揭示了算法是否能正确反映亚临界流和超临界流. 计算区域为一方坝区域, 边长为 $200 \text{ m} \times 200 \text{ m}$. 初始时刻上游水深 10 m , 下游水深 5 m , 在中央出现了一道 75 m 宽的溃口. 水沿溃口涌向下游. 采用一次多项式插值, 时间步长取为 0.5 s . 图 1、图 2 分别为 $T=7 \text{ s}$ 时的三维水面图和流场图.

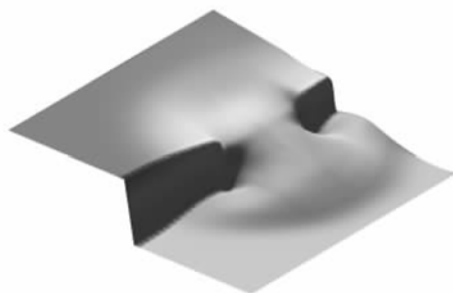


图1 $T=7 \text{ s}$ 时的水位图

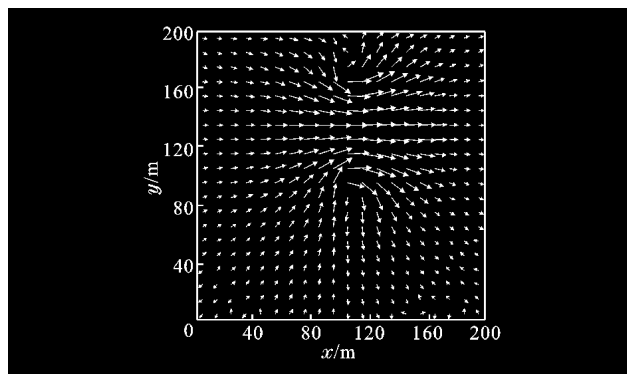


图2 $T=7 \text{ s}$ 时的流场图

2.2 超临界流问题

由于横截面的变化可以产生超临界流和激波, 本文使用 Zienkiewicz 和 Ortiz^[7] 的模型. 一条河流与收缩角为 5° 的渠道相互作用形成水跃, 水流由左边界引入, Froude 数定义为

$$Fr = u/(gh)^{1/2} \tag{9}$$

当 $Fr>1$ 时,一般认为流态是超临界流. 本文选择 Fr 为 2.5,该问题由 Ippen^[8] 给出解析解. 计算域分别为 3 156 个三角网格(粗网格)和将粗网格三角形各边中点连线得到的细网格(3 156×4). 采用 1 次插值,计算结果见图 3、图 4,误差统计见表 1.

表 1 超临界问题计算误差统计

	$\Delta T/s$	L_2 模误差
粗网格解	0.25	2.92
细网格解	0.10	1.52

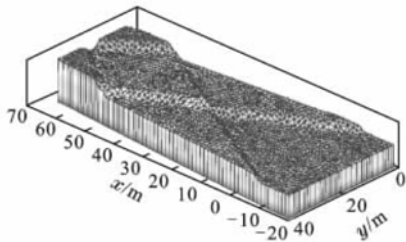


图 3 超临界流粗网格 1 次插值(P^1)解

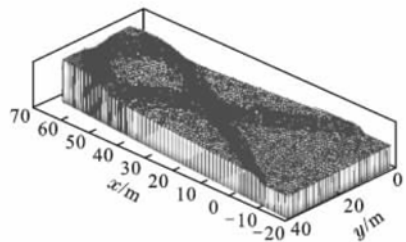


图 4 超临界流细网格 1 次插值(P^1)解

2.3 并行性能讨论

由于采用间断有限元计算某一单元网格时只需要和该网格相邻单元的值,这就使间断有限元具有良好的并行性. 为检测该模型的并行性能,使用两台 p4 CPU 主频为 2.8 GHz 的电脑在 mpich+winxp+cvf6.5 环境下对 2.2 小节的超临界流细网格问题进行了并行模拟,并与单 CPU 的计算结果进行了对比(见表2),可以看出间断有限元具有优越的并

表 2 并行计算结果

处理器个数	网格	计算时间/s	并行效率/%
1	3 156×4	92.36	
2	3 156×4	49.63	93.05

行性能.

3 结 论

本文探讨了间断有限元在浅水方程中的应用,从以上算例可以看出,间断有限元适合求解浅水守恒方程,且能够捕捉锐利波形. 由于间断有限元可以采用不规则网格,因此比较容易处理一些具有复杂边界条件和复杂区域的流体力学问题. 此外,由于间断有限元采用黎曼算子计算单元间的数值通量,使得其很容易和有限体积法以及对流-扩散水质方程耦合,这也是我们下一步要研究的问题.

参考文献:

[1] Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws II: general framework[J]. Math Comp, 1989, 52(186):411-435.

[2] Cockburn B, Lin S Y, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one dimensional systems[J]. J Comput Phys, 1989, 84(1):90-113.

[3] Cockburn B, Hou S, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multidimensional case[J]. Math Comp, 1990, 54(19):545-581.

[4] Cockburn B, Shu C W. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws V: multidimensional systems [J]. J Comput Phys, 1998, 141(2):199-224.

[5] Chippada S, Dawson C N, Martinez M, et al. A Godunov-type finite volume method for the system of shallow water equations[J]. Comput Meth Appl Mech Eng, 1998,151(1):105-129.

[6] Walters R A. A model for tides and currents in the English Channel and North Sea[J]. Advances in Water Resources, 1987, 10(33): 138-148.

[7] Zienkiewicz O C, Ortiz P. A split-characteristic based finite element model for the shallow water equations [J]. Int J Num Meth Fluids, 1995, 20(1):1061-1080.

[8] Ippen A T. Mechanics of supercritical flow[J]. Trans of ASCE, 1951, 116(1):268-295.

(编辑 荆树蓉)