

均匀覆层梯度半空间中的 Love 面波

张立刚¹, 盖秉政¹, 朱虹²

(1. 哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 150001, 哈尔滨; 2. 哈尔滨工业大学复合材料研究所, 150001, 哈尔滨)

摘要: 对覆盖一层均匀各向同性材料的功能梯度半空间中的 Love 波频散问题进行了研究, 给出了 Love 波频散方程的一般形式. 对功能梯度半空间的反平面剪切波的运动控制方程进行了求解, 给出了半空间的位移、应力解析解, 导出了该解析解下的 Love 波频散方程的一般形式. 以功能梯度材料的剪切弹性模量和质量密度沿深度方向均呈指数变化和抛物线变化两种情况为例, 进行了计算和分析, 给出了频散曲线. 结果显示: 在最低阶振型频散曲线中出现了截止频率.

关键词: 功能梯度材料; Love 波; 波速; 频散; 变系数微分方程

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)03-0372-05

Love Wave in Graded Half-Space with Homogeneous Layer

Zhang Ligang¹, Gai Bingzheng¹, Zhu Hong²

(1. Department of Aeronautical Engineering and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;

2. Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The dispersion problem of Love waves is investigated in the functionally graded half-space covered with an isotropic homogeneous layer. In the functionally graded half-space, the governing equation of antiplane shear wave is solved, the analytical solutions of displacement and stress are obtained, and the corresponding general form of Love waves dispersion equation is deduced. Two cases of functionally graded materials with exponentially and parabolically varying shearing modulus and mass density along the depth are evaluated, and the dispersion curves are presented. It is found that the cut-off frequency arises in the dispersion curve of the lowest order vibration modal.

Keywords: functionally graded material; Love wave; wave velocity; dispersion; differential equation with varied coefficient

Love 于 1911 年发现, 在均质各向同性弹性半空间上覆盖厚度为 H 的另一种弹性介质时, 在该覆盖层内以及在弹性半空间的表面附近存在 SH 型面波, 即 Love 波. Love 波理论成功地揭示了地震记录中出现的频散波现象^[1]. 近年来, 国内外科学家对竖向非均匀介质中的 Love 波的研究越来越多, 如 Ke 等人利用 Biot 理论研究了非均匀多孔饱和覆层均匀半空间中的 Love 波^[2-3]. 功能梯度材料是典型的非均匀材料, 其中的 Love 波问题属于竖向非均匀介质中的 Love 波问题. 研究连续变化竖向非均匀

介质中的表面波时, 由于其控制方程的复杂性, 因而只有在某些特殊情形下才能求出解析解, 且解析解往往是某个非常复杂的函数. 人们利用各种近似方法研究各类非均匀介质中的表面波问题^[4-5]. 随着功能梯度材料的广泛使用, 对功能梯度材料中的 Love 波的研究也越来越多, 如 Li 等人研究了功能梯度压电材料中 Love 波的传播^[6], Liu 等人研究了初始应力对均匀压电覆盖层中的 Love 波的影响^[7], Abd-Alla 等人利用傅里叶变换方法研究了初始应力作用下非均匀介质中 Love 波的频散^[8]. 本文对覆盖

一层均匀各向同性材料的功能梯度半空间中存在的 Love 波的频散问题进行了研究,给出了频散曲线,并讨论了 Love 波在功能梯度材料半空间中传播的一般性质,所得结论可为无损检测和反问题分析方法的改进提供理论依据。

1 基本方程及求解

问题的几何描述如图 1 所示. 半无限空间为功能梯度材料,沿自由表面向右为 x 方向,沿材料深度方向向下为 y 方向,均匀各向同性弹性覆盖层的厚度为 H , Love 波沿 x 轴正向传播。

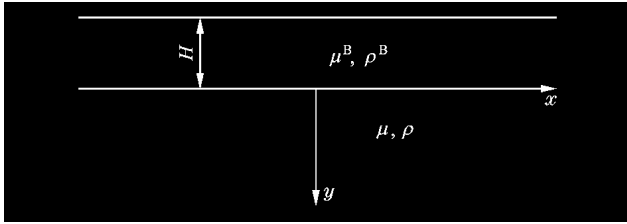


图 1 问题的几何描述

1.1 均匀覆盖层

以 w^B 表示沿 z 方向的位移,则它应满足反平面剪切波的运动控制方程

$$\nabla^2 w^B = \left(\frac{1}{c_T^B}\right)^2 \frac{\partial^2 w^B}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中: c_T^B 为均匀覆盖层中的剪切波波速, $c_T^B = \left(\frac{\mu^B}{\rho^B}\right)^{1/2}$, 其中 μ^B, ρ^B 为覆层介质的剪切弹性模量和质量密度. 令

$$w^B = [B_1 \sin(qy) + B_2 \cos(qy)] \exp[ik(x - ct)] \quad (2)$$

式中: B_1, B_2 为待求的任意常数; $k = \omega/c$ 为波数,其中 ω 为圆频率, c 为 Love 波的相速度; q 为常数. 将式(2)代入式(1),可得

$$q = k \left[\left(\frac{c}{c_T^B} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (3)$$

均匀覆盖层内应力为

$$\tau_{xz}^B = \mu^B \partial w^B / \partial x = ik \mu^B [B_1 \sin(qy) - B_2 \cos(qy)] \exp[ik(x - ct)] \quad (4a)$$

$$\tau_{yx}^B = \mu^B \partial w^B / \partial y = q \mu^B [B_1 \cos(qy) - B_2 \sin(qy)] \exp[ik(x - ct)] \quad (4b)$$

1.2 功能梯度半空间

考虑功能梯度材料的剪切弹性模量 μ 和质量密度 ρ 都仅是深度 y 的函数,即 $\mu = \mu_0 \mu(y)$, $\rho = \rho_0 \rho(y)$, 其中 μ_0, ρ_0 分别为梯度半空间表面材料的剪切弹性模量和质量密度, $\mu(y), \rho(y)$ 分别为归一

化的剪切弹性模量和质量密度,以 w 表示沿 z 方向的位移,则满足反平面剪切波的运动控制方程为

$$\mu \nabla^2 w + \left(\frac{d\mu}{dy} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5)$$

令

$$w(x, y, t) = \mu^{-1/2}(y) \Phi(x, y) \exp(-i\omega t) \quad (6)$$

将式(6)代入式(5),则式(5)可以变为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + [a(y) + b(y)] \Phi = 0 \quad (7)$$

$$a(y) = -[4\mu(y)]^{-1} \left[2 \left(\frac{d^2 \mu(y)}{dy^2} \right) - \mu^{-1}(y) \left(\frac{d\mu(y)}{dy} \right)^2 \right] \quad (8a)$$

$$b(y) = \frac{\omega^2 \rho_0}{\mu_0} \frac{\rho(y)}{\mu(y)} = \frac{\omega^2}{c_T^2} \frac{\rho(y)}{\mu(y)} \quad (8b)$$

式中: 功能梯度材料的剪切波波速 $c_T = (\mu_0/\rho_0)^{1/2}$.

令 $\Phi = \zeta(y) \exp(ikx)$, 则方程(7)变为

$$d^2 \zeta(y)/dy^2 + k^2 \gamma(y) \zeta(y) = 0 \quad (9)$$

式中

$$\gamma(y) = \frac{a(y)}{k^2} + \frac{c^2}{c_T^2} \frac{\rho(y)}{\mu(y)} - 1 \quad (10)$$

方程(9)的解的一般形式为

$$\zeta(y) = A_1 \zeta_1(y) + A_2 \zeta_2(y) \quad (11)$$

式中: A_1, A_2 为常数; $\zeta_1(y), \zeta_2(y)$ 为两个线性无关的特解,且一个为增函数,另一个为减函数,取 $\zeta_2(y)$ 为增函数. 由 Sommerfeld 辐射条件和 Love 波是幅值随深度衰减的波,可知 $A_2 = 0$, 故有

$$\zeta(y) = A \zeta_1(y) \quad (12)$$

功能梯度半空间的位移和应力为

$$w = A \mu^{-1/2}(y) \zeta_1(y) \exp[ik(x - ct)] \quad (13)$$

$$\tau_{xz} = \mu \partial w / \partial x = A i k \mu_0 \mu^{1/2}(y) \zeta_1(y) \cdot \exp[ik(x - ct)] \quad (14a)$$

$$\tau_{yx} = \mu \partial w / \partial y = A \mu_0 \mu^{-1/2}(y) \left[-\frac{1}{2} \frac{d\mu(y)}{dy} \zeta_1(y) + \mu(y) \frac{d\zeta_1(y)}{dy} \right] \exp[ik(x - ct)] \quad (14b)$$

2 边界条件

在均匀覆层自由表面上应力为 0; 在均匀覆层、梯度半空间的交界面处,应力和位移连续.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^B &= 0, & y &= -H \\ w^B(x, 0) &= w(x, 0), & y &= 0 \\ \tau_{yx}^B &= \tau_{yx} & y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3 频散方程

将式(2)、(4)、(13)、(14)分别代入式(15)可得

$$B_1 \cos(qH) + B_2 \sin(qH) = 0 \quad (16a)$$

$$A\mu^{-1/2}(0)\zeta_1(0) - B_2 = 0 \quad (16b)$$

$$A\mu_0\mu^{-1/2}(0)\left[\mu(y)\frac{d\zeta_1(y)}{dy} - \frac{1}{2}\frac{d\mu(y)}{dy}\zeta_1(y)\right]\Big|_{y=0} - q\mu^B B_1 = 0 \quad (16c)$$

式(16)为关于 A, B_1, B_2 的线性齐次代数方程组, 该方程组有非零解的充要条件为其系数行列式等于 0, 由这个条件可得相速度 c 的频散方程.

$$\tan(qH) + \frac{\mu_0}{q\mu^B}\left[\mu(y)\frac{d\zeta_1(y)}{dy} - \frac{1}{2}\frac{d\mu(y)}{dy}\zeta_1(y)\right]\Big|_{y=0} = 0 \quad (17)$$

式(17)为一超越方程, 如能求出式(9)的解析解, 则式(17)就是解析解的频散方程. 式(9)中, 只有 $\gamma(y)$ 取某些特殊形式的函数时才有解析解, 这些解大多数是一些高级超越函数, 利用近似方法可以获得式(9)的近似解. 本文采用级数理论对式(9)求解

$$\gamma(y) = \gamma(y)\Big|_{y=0} + \frac{d\gamma(y)}{dy}\Big|_{y=0}y + \frac{1}{2!}\frac{d^2\gamma(y)}{dy^2}\Big|_{y=0}y^2 + \dots \quad (18)$$

令

$$\zeta(y) = \exp(b_1y + b_2y^2 + \dots + b_ny^n + \dots) \quad (19)$$

式中: $b_1, b_2, \dots$ 为待定系数. 将式(18)、(19)代入式(9), 可得

$$b_1^2 + 2b_2 + k^2\gamma(y)\Big|_{y=0} + (6b_3 + 4b_1b_2 + k^2\frac{d\gamma(y)}{dy}\Big|_{y=0})y + \dots = 0 \quad (20)$$

由式(20)的常数项和各项系数为 0, 可得 $b_1, b_2, \dots$ 的两组解为 $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots (a_1, a_2, \dots$ 为正数) 和 $b_1 = -a_1, b_2 = -a_2, \dots$. 方程(9)的解的一般形式为

$$\zeta(y) = A_1 \exp(-(a_1y + a_2y^2 + \dots)) + A_2 \exp(a_1y + a_2y^2 + \dots) \quad (21)$$

当 $y \rightarrow \infty$ 时, $\exp(a_1y + a_2y^2 + \dots)$ 递增且趋近于无穷, $\exp(-(a_1y + a_2y^2 + \dots))$ 递减且趋近于 0. 由 Sommerfeld 辐射条件和 Love 波是幅值随深度衰减的波, 可知 $A_2 = 0$, 故有

$$\zeta(y) = A\zeta_1(y) = A \exp(-(a_1y + a_2y^2 + \dots)) \quad (22)$$

功能梯度半空间的位移和应力为

$$w = A\mu^{-1/2}(y) \exp(-a_1y - a_2y^2 - \dots + ik(x - ct)) \quad (23)$$

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} = Aik\mu_0\mu^{1/2}(y) \exp(-a_1y - a_2y^2 - \dots + ik(x - ct)) \quad (24a)$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} =$$

$$A\mu_0\mu^{-1/2}(y) \left(f(y)\mu(y) - \frac{1}{2}\frac{d\mu(y)}{dy} \right) \exp(-a_1y - a_2y^2 - \dots + ik(x - ct)) \quad (24b)$$

式中

$$f(y) = (-a_1 - 2a_2y - \dots - na_ny^{n-1} - \dots) \quad (25)$$

将式(22)代入式(17), 则 Love 波频散方程的一般形式为

$$\tan(qH) - \frac{\mu_0}{q\mu^B} \left[a_1\mu(y) + \frac{1}{2}\frac{d\mu(y)}{dy} \right] \Big|_{y=0} = 0 \quad (26)$$

下面对方程(26)进行一些讨论.

(1) 由于 Love 波存在于弹性半空间的表面附近, 且 $\gamma(y)$ 对自变量 y 的依赖性还较弱, 因此 $\gamma(y)$ 取较少项时方程(10)的解对于频散方程就已经具有较高精度.

(2) 只有当 $\gamma(y) < 0$ 时才存在 Love 波, 由此可得

$$c < \left[\left(1 - \frac{a(y)}{k^2} \right) \frac{\mu(y)}{\rho(y)} \right]^{1/2} c_T \quad (27)$$

由式(2)、式(3)可知, c 必须大于等于 c_T^B , 因此必须在 $c_T^B < c < ((1 - a(y)/k^2)\mu(y)/\rho(y))^{1/2} c_T$ 的范围内寻找方程(26)的根.

(3) 为了讨论方便, 下面列出覆层、半空间均为均质时, Love 波的频散方程^[9]

$$kH((c/c_T^B)^2 - 1)^{1/2} = \arctan\left(\frac{\mu}{\mu^B} \left(\frac{1 - (c/c_T)^2}{(c/c_T^B)^2 - 1} \right)^{1/2}\right) + n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

将均匀覆层梯度半空间中的 Love 波的频散方程(26)改写为

$$kH[(c/c_T^B)^2 - 1]^{1/2} = \arctan\left(\frac{\mu_0}{q\mu^B} \left(\frac{1}{2} \frac{d\mu(y)}{dy} + a_1\mu(y) \right) \Big|_{y=0}\right) + n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

均匀覆层梯度半空间中的 Love 波与均质中的 Love 波皆存在以下特性:

- (1) Love 波的相速度 c 是频散的;
- (2) 频散方程(28)与(29)皆有无穷多个解, 且 n 每取一个数就有一条频散曲线;
- (3) 当两个频散方程中 $n=1, 2, \dots$ 时, 皆存在着

一个最小的波数 $k_{cr}^{(n)}$, 当 $k < k_{cr}^{(n)}$ 时, 两个频散方程无实数解, 频率 $\omega_{cr}^{(n)} = k_{cr}^{(n)} c$ 是 Love 波第 n 阶振型的截止频率。

由于面波的大部分能量通常都由前几阶振型携带, 因此在工程中, 面波的前几阶振型最为重要。下面的计算实例中只给出了最低阶频散曲线。

4 算例及分析

在本算例中, 均匀覆层的材料参数为 $\mu^B = 26.3$ GPa, $\rho^B = 2700$ kg/m³, 剪切波波速 c_T^B 为 3121 m/s。

4.1 功能梯度材料参数随深度均呈指数变化

功能梯度材料的 μ 和 ρ 的表达式为

$$\mu = \mu_0 \exp(\alpha y); \quad \rho = \rho_0 \exp(\beta y) \quad (30)$$

取 $\mu_0 = 80$ GPa, $\rho_0 = 7800$ kg/m³, 剪切波波速 $c_T = 3203$ m/s。将上述条件代入式(10)可得

$$\gamma(y) = \left(\frac{c}{c_T}\right)^2 \exp((\beta - \alpha)y) - \left(\frac{\alpha}{2k}\right)^2 - 1 \quad (31)$$

由于 Love 波存在于弹性半空间的表面附近, 且 $\gamma(y)$ 对自变量 y 的依赖性还较弱, 因此方程(9)中的 $\gamma(0)$ 函数特别重要, 这里只对 $y=0$ 时 γ 函数的性质进行讨论。功能梯度材料指数因子 $\alpha=0.10, 0.15, 0.20$ 时, $\gamma(0)$ 函数特性曲线如图 2 所示。

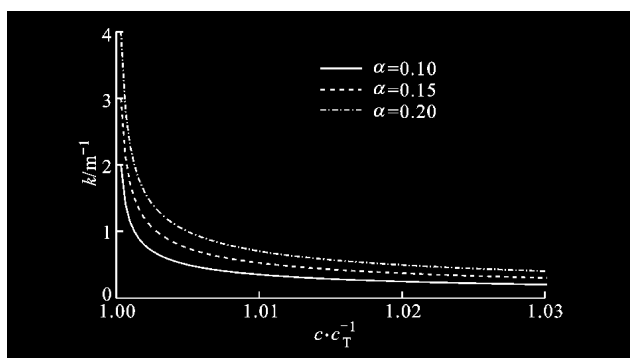


图 2 $\gamma(0)$ 函数特性曲线随 α 的变化

由 $\gamma(0) < 0$ 和图 2 可得: 频散方程(29)中的相速度 c 有可能大于 c_T 。在最低阶振型频散曲线中, 波数 $k \neq 0$ 。随 $(\beta - \alpha)$ 的增加, Love 面波在半空间中的存在范围越来越小。

当 $\alpha = \beta$ 时, $\gamma(y)$ 函数与自变量 y 无关, 方程(9)变为常系数微分方程, 可直接求解。当 $\alpha \neq \beta$ 时, 采用级数理论求解。当 $\alpha = 0.1, \mu^B/\mu_0 = 0.327, c_T^B/c_T = 0.974$ 时, Love 波的频散关系曲线如图 3 所示, 图中均匀介质材料参数为 $\mu = 80$ GPa, $\rho = 7800$ kg/m³, $\mu^B = 26.3$ GPa, $\rho^B = 2700$ kg/m³。

从图 3 中可见: 随着指数因子 β 的增加, 截止频

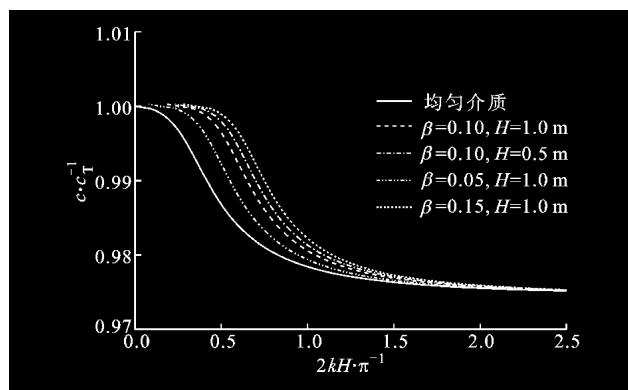


图 3 Love 面波的频散曲线

率逐渐增大; 随着覆层厚度 H 的增加, 截止频率逐渐减小; c 的最大值大于 c_T 。

4.2 功能梯度材料参数随深度均呈抛物线变化

功能梯度材料的 μ 和 ρ 的表达式为

$$\mu = \mu_0 (1 + \epsilon_1 y + \epsilon_2 y^2) \quad (32a)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \epsilon_3 y + \epsilon_4 y^2) \quad (32b)$$

将上述条件代入式(10)可得

$$\gamma(y) = \left(\frac{c}{c_T}\right)^2 \frac{1 + \epsilon_3 y + \epsilon_4 y^2}{1 + \epsilon_1 y + \epsilon_2 y^2} - \frac{4\epsilon_2 - \epsilon_1^2}{(2k(1 + \epsilon_1 y + \epsilon_2 y^2))^2} - 1 \quad (33)$$

功能梯度材料参数 $\epsilon_1 = 0.4, \epsilon_2 = 0.02, 0.06$ 时, $\gamma(0)$ 函数的特性曲线如图 4 所示。

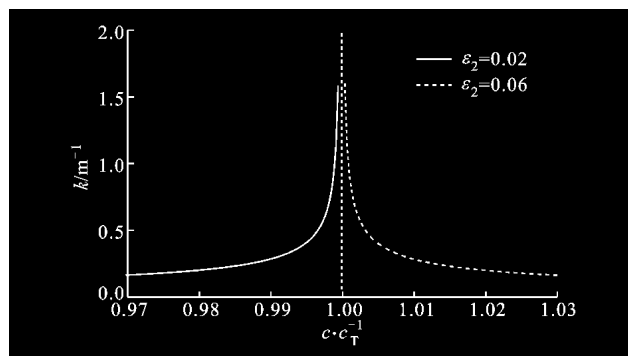


图 4 $\gamma(0)$ 函数特性曲线随 ϵ_2 的变化

由 $\gamma(0) < 0$ 和图 4 可得: 在最低阶振型频散曲线中, 当 $c = c_T$ 时, 波数 $k \neq 0$; 当 $4\epsilon_2 - \epsilon_1^2 < 0$ 时, 相速度 c 的最大值趋近于 c_T ; 当 $4\epsilon_2 - \epsilon_1^2 > 0$ 时, 相速度 c 可以大于 c_T 。

当 $\epsilon_1 = 0.4, \epsilon_3 = 0.3, \epsilon_4 = 0.07, \mu^B/\mu_0 = 0.327, c_T^B/c_T = 0.974$ 时, Love 波的频散关系曲线如图 5 所示。由图 5 可见: 当 $4\epsilon_2 - \epsilon_1^2 < 0$ 时, 随着 H 的增加, 截止频率逐渐增大, c 的最大值趋近于 c_T ; 当 $4\epsilon_2 - \epsilon_1^2 > 0$ 时, 随着 H 的增加, 截止频率逐渐减小, c 的最大值大于 c_T ; 当 $4\epsilon_2 - \epsilon_1^2 = 0$ 时, 截止频率与 H 无

关, c 的最大值等于 c_T .

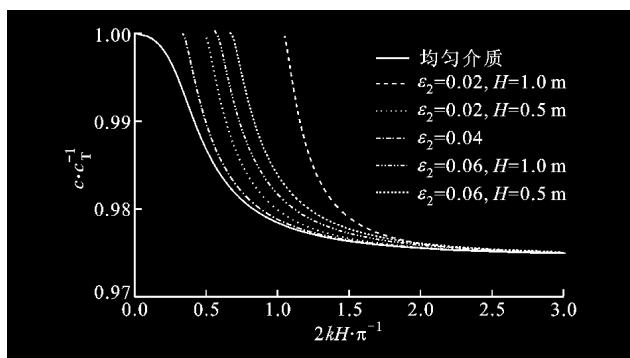


图5 Love面波频散曲线

5 结 论

(1) 均匀覆层梯度半空间中与均质中皆存在 Love 波. Love 波是频散波, 频散方程中的 n 每取一个值就对应一条频散曲线. 当 $2kH/\pi$ 增加时, 相速度减小; 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $c/c_T \rightarrow c_T^B/c_T$.

(2) 在最低阶振型频散曲线中, 对于均匀介质中的 Love 波, $c_T^B < c < c_T$, 不存在截止频率; 对于均匀覆层梯度半空间中的 Love 波, 有些情况下 c 的最大值大于 c_T , 存在截止频率.

(3) 对于均匀介质中的 Love 波, c/c_T 和 $2kH/\pi$ 的频散关系与覆层的厚度无关; 对于均匀覆层梯度半空间中的 Love 波, 当 $2kH/\pi$ 较小时, 覆层厚度对 c/c_T 和 $2kH/\pi$ 的频散关系影响较大, 但随着 $2kH/\pi$ 的增大, 其影响越来越小.

参考文献:

[1] Ewing W M, Jardetzky W S, Press F. Elastic waves

in layered media [M]. New York: McGraw-Hill, 1957: 205-212.

- [2] Ke Liaoliang, Wang Yuesheng, Zhang Zimao. Love wave in an inhomogeneous fluid saturated porous layered half-space with linearly varying properties [J]. Soil Dyn and Ear Eng, 2006, 26(6/7): 574-581.
- [3] Ke LiaoLiang, Wang Yuesheng, Zhang Zimao. Propagation of Love waves in an inhomogeneous fluid saturated porous layered half-space with properties varying exponentially [J]. J Eng Mech, 2005, 131(12): 1322-1328.
- [4] Roznowski T. Surface waves in an isotropic elastic non-homogeneous semi-space [J]. Arch Mech, 1987, 39(4): 337-358.
- [5] Sotiropoulos D A. Dispersion of elastic waves in periodically inhomogeneous media [J]. Comput Mech, 1993, 12(3): 134-146.
- [6] Li X Y, Wang Z K, Huang S H. Love waves in functionally graded piezoelectric materials [J]. Int J Solids Struct, 2004, 41(26): 7309-7328.
- [7] Liu H, Wang Z K, Wang T J. Effect of initial stress on the propagation behavior of Love waves in a layered piezoelectric structure [J]. Int J Solids Struct, 2001, 38(1): 37-51.
- [8] Abd-Alla A M, Ahmed S M. Propagation of Love waves in a nonhomogeneous orthotropic elastic layer under initial stress overlying semi-infinite medium [J]. Appl Math and Comput, 1999, 106(2/3): 265-275.
- [9] 黎在良, 刘殿魁. 固体中的波[M]. 北京: 科学出版社, 1995: 220-222.

(编辑 葛赵青)

《西安交通大学学报》再次被评为“百种中国杰出学术期刊”

科技部中国科技信息研究所根据期刊的影响因子、引文频次和他因比等学术计量指标计算, 并征求全国 600 多名专家意见评定的“百种中国杰出学术期刊”, 在业界具有较大的影响, 2006 年《西安交通大学学报》再次获得此项荣誉. “百杰”不仅是包括《中国科学》、《物理学报》等在内的 1 600 多种“科技论文统计源期刊”中评定出来的, 关键是评定既有硬性的国际通用的学术期刊评价指标(引文频次和影响因子), 又有全国相关学科的 600 多位专家的评议, 具有一定的含金量, 对学术期刊的评价比一般评奖更有意义.