

Zak 变换和平移不变子空间中的抽样定理

吴国昌¹, 程正兴¹, 赵江涛²

(1. 西安交通大学理学院, 710049, 西安; 2. 西安外事学院信息工程学院, 710077, 西安)

摘要: 研究了平移不变子空间中的抽样定理, 首先通过 Zak 变换刻画了抽样空间的一些性质, 然后证明了在一个平移不变的抽样空间中, 由其中任一个函数的整平移所张成的子空间也是抽样空间, 即在平移不变子空间中, 抽样性质具有遗传性. 最后给出了函数满足抽样定理的一些必要条件.

关键词: Zak 变换; 平移不变子空间; 抽样定理; 框架

中图分类号: O174.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)10-1248-03

Zak Transform and Sampling Theorem in the Shift Invariant Subspace

Wu Guochang¹, Cheng Zhengxing¹, Zhao Jiangtao²

(1. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. College of Information Engineering, Xi'an International University, Xi'an 710077, China)

抽样定理在数字信号处理和通信理论中具有重要作用, 其中最为著名的抽样定理是古典 Shannon 抽样定理^[1]. 尽管古典抽样定理在信号处理和通信理论中具有重要的地位, 但是由于这个定理只适用于带限信号, 而且它的插值函数衰减得比较慢, 因此这些缺点限制了它的应用. 考虑到带限的函数空间是一个平移不变子空间, 因此近来人们开始研究平移不变子空间的抽样定理^[2-5], 得到了许多重要的结果. 本文研究了平移不变子空间中的抽样定理, 给出了一些新的刻画.

1 基本概念

我们先介绍本文要用到的一些概念.

定义 1 令 H 为可分的 Hilbert 空间, I 为可数集, $\{f_i\}_{i \in I} \subset H$, 如果存在常数 $A, B > 0$, 使得对任意的 $f \in H$, 有

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} \|\langle f, f_i \rangle\|^2 \leq B \|f\|^2$$

那么称 $\{f_i\}_{i \in I}$ 为 H 的一个框架, 称 A 和 B 为其框架界, 满足条件的最大的 A 和最小的 B 称为最优框架界.

定义 2 如果在 $L^2(R)$ 的一个闭子空间 $V(\varphi)$ 中存在函数 $s(x)$, 满足下面的条件:

- (1) $s(x)$ 的整平移构成 $V(\varphi)$ 的一个框架;
- (2) 对于任意的 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, 级数 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k s(x - k)$ 收敛到一个连续函数;
- (3) 对于 $\forall f(x) \in V(\varphi)$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k+a) s(x-k)$$

这里, $0 \leq a \leq 1$, 级数在 $L^2(R)$ 中收敛且一致收敛, 那么, $V(\varphi)$ 叫做一个抽样空间, 函数 $s(x)$ 叫做其中的抽样函数.

定义 3 对于函数 $f(x) \in L^2(R)$, 定义它的 Zak 变换如下

$$Z_f(x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+a) e^{-2\pi i k \omega}$$

本文做如下的约定: $S(f)$ 表示 f 的整平移所张成线性空间的闭包; 特别地, $V(\varphi)$ 表示函数 $\varphi(x)$ 的整平移所张成线性空间的闭包, 而且 $\varphi(x)$ 的整平移构成这个子空间的框架

$$[\hat{f}, \hat{g}](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega+k) \overline{\hat{g}(\omega+k)}$$

$$G_\varphi(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+k)|^2$$

$$E_\varphi = \{\omega \in R : G_\varphi(\omega) > 0\}$$

$x_E(x)$ 表示在集合 E 上取 1 而在其他点取 0 的函数.

2 主要结果

引理 1 如果 $V(\varphi)$ 是一个抽样空间, $s(x)$ 是其中的抽样函数, 则 $\forall f(x) \in V(\varphi)$, 有

$$G_f(\omega) = |Z_f(a, \omega)|^2 G_s(\omega) \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

证明 对于 $\forall f(x) \in V(\varphi)$, 由于 $V(\varphi)$ 是一个抽样空间, $s(x)$ 是其中的抽样函数, 故

$$f(x) = \sum_{k \in Z} f(k+a)s(x-k)$$

这里, 级数在 $L^2(R)$ 中收敛且一致收敛. 因此, $\hat{f}(\omega)$

$= Z_f(a, \omega) \hat{s}(\omega)$, a. e. $\omega \in R$, 所以

$$\sum_{k \in Z} |\hat{f}(\omega+k)|^2 = |Z_f(a, \omega)|^2 \sum_{k \in Z} |\hat{s}(\omega+k)|^2$$

即 $G_f(\omega) = |Z_f(a, \omega)|^2 G_s(\omega)$, a. e. $\omega \in R$.

引理 2 如果 $V(\varphi)$ 是一个抽样空间, $s(x)$ 是其中的抽样函数, 则有:

(1) 抽样函数满足

$$Z_s(a, \omega) = \chi_{E_s}(\omega) \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

(2) 对于 $\forall f(x) \in V(\varphi)$, 有

$$E_f = \{\omega \in R : Z_f(a, \omega) \neq 0\} \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

(3) 对于每个 $V(\varphi)$ 的生成 $\psi(x)$, 使得 $\psi(x)$ 的整平移构成 $V(\varphi)$ 的一个框架, 则存在惟一的抽样函数 $s(x)$, 满足

$$\hat{s}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{Z_\psi(a, \omega)} \chi_{E_\psi}(\omega)$$

证明 (1) 由于 $V(\varphi)$ 是一个抽样空间, $s(x)$ 是其中的抽样函数, 所以

$$s(x) = \sum_{k \in Z} s(k+a)s(x-k)$$

即 $\hat{s}(\omega) = Z_s(a, \omega) \hat{s}(\omega)$. 对于每个 $\omega \in E_s$, 一定存在 $k_0 \in Z$, 使得 $\hat{s}(\omega+k_0) \neq 0$, 又因为 $\hat{s}(\omega+k_0) = Z_s(a, \omega) \hat{s}(\omega+k_0)$, 故

$$Z_s(a, \omega) = 1 \quad \text{a. e. } \omega \in E_s$$

根据文献[4], 我们有

$$Z_s(a, \omega) = \chi_{E_s}(\omega) \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

(2) 由引理 1 可知, $\forall f(x) \in V(\varphi)$, 有

$$G_f(\omega) = |Z_f(a, \omega)|^2 G_s(\omega) \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

根据文献[3]可假设 $\{s(x-k)\}_{k \in Z}$ 是抽样空间的 Riesz 基. 因此, $\forall f(x) \in V(\varphi)$, 有

$$E_f = \{\omega \in R : Z_f(a, \omega) \neq 0\} \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

(3) $\psi(x)$ 是 $V(\varphi)$ 的生成子, 而且 $\psi(x)$ 的整平移是 $V(\varphi)$ 的一个框架, 则

$$\hat{\psi}(\omega) = Z_\psi(a, \omega) \hat{s}(\omega) \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

根据本引理的结论(2)可知

$$\hat{s}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{Z_\psi(a, \omega)} \quad \text{a. e. } \omega \in E_\psi$$

当 $\omega \notin E_\psi$ 时, 根据文献[2], 有 $\omega \notin E_\psi$, 因此 $\hat{\psi}(\omega) = 0$. 再根据 $\psi(x)$ 的整平移构成 $V(\varphi)$ 的一个框架, 则 $\hat{s}(\omega) = 0$.

因此, 结论(3)成立.

定理 1 如果 $V(\varphi)$ 是一个抽样空间, $s(x)$ 是其中的抽样函数, 则对于 $\forall f(x) \in V(\varphi)$, $S(f)$ 是一个抽样空间, 其中抽样函数 $s_f(x)$ 为 s 到 $S(f)$ 上的正交投影, 记做 $s_f = P_{S(f)}(s)$, 而且 $\hat{s}_f = \hat{s} \chi_{E_f}$.

证明 对于 $\forall f(x) \in V(\varphi)$, 定义

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} \frac{\hat{f}(\omega)}{Z_f(a, \omega)} & \omega \in E_f \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

通过引理 2 中的(2)可知, 函数 $h(x)$ 有很好的定义, 而且根据文献[2], 显然有 $S(h) = S(f)$.

下面证明 $\{h(x-k)\}_{k \in Z}$ 是一个框架序列. 由于 $E_h = E_f$, 故对于 a. e. $\omega \in E_h$, 有

$$G_h(\omega) = \frac{G_f(\omega)}{Z_f(a, \omega)} = G_s(\omega)$$

根据 $s(x)$ 的整平移构成 $V(\varphi)$ 的一个框架可知, $G_s(\omega)$ 有下界和上界, 所以 $G_h(\omega)$ 也有下界和上界, 因此根据文献[4]可知, $\{h(x-k)\}_{k \in Z}$ 是一个框架序列.

下面证明 $S(f) = V(h)$ 是一个抽样空间. 既然 $h \in S(f) \subset V(\varphi)$, 那么 h 是连续的. 根据文献[2, 4], $\sum_{k \in Z} |s(x+k)|^2$ 在 R 上一致有界. 进一步, 对于 a. e. $\omega \in E_h$, $G_h(\omega) = |Z_h(a, \omega)|^2 G_s(\omega)$. 既然 $E_h \subseteq E_s$, 则对于 a. e. $\omega \in E_h$, 有

$$|Z_h(a, \omega)|^2 = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega)}$$

又因为 $G_h(\omega)$ 和 $G_s(\omega)$ 在 E_h 上都有下界和上界, 所以 $|Z_h(a, \omega)|$ 在 E_h 上也有下界和上界. 根据文献[4]可知

$$Z_h(a, \omega) = 0 \quad \forall x \in R \quad \text{a. e. } \omega \in R \setminus E_h$$

最后根据文献[2], 我们得到 $S(f) = V(h)$ 是一个抽样空间.

下面证明 $h(x)$ 是 $S(f)$ 的抽样函数. 我们只需证明, 对于每个 $g \in S(f)$, 有

$$\hat{g}(\omega) = Z_g(a, \omega) \hat{h}(\omega)$$

既然 $g \in S(f) \subseteq V(\varphi)$, 则有

$$\hat{g}(\omega) = Z_g(a, \omega) \hat{s}(\omega)$$

当 $\omega \in E_f$ 时, $\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)$, 因此当 $\omega \in E_f$ 时, $\hat{g}(\omega)$

$$=Z_g(a,\omega)\hat{h}(\omega).$$

另一方面,由于 $g \in S(f)$, 根据文献[2], 存在以 1 为周期的函数, 使得

$$\hat{g}(\omega) = r(\omega)\hat{f}(\omega)$$

而对于 a. e. $\omega \in R \setminus E_f$, 有 $\hat{f}(\omega) = 0$. 进一步, 有 $\hat{g}(\omega) = 0$. 对于 a. e. $\omega \in R \setminus E_f$, 显然有 $\hat{h}(\omega) = 0$.

所以 $h(x)$ 是 $S(f)$ 的抽样函数, 而且

$$\hat{s}_f(\omega) = \hat{h}(\omega) = \hat{s}\chi_{E_f}$$

最后证明抽样函数 $h(x)$ 为 $s(x)$ 到 $S(f)$ 上的正交投影. 对于 a. e. $\omega \in E_f$, 有

$$\begin{aligned} (P_{S(f)}(\hat{s}))^\wedge &= \frac{[\hat{s}, \hat{f}](\omega)}{[\hat{f}, \hat{f}](\omega)} \hat{f}(\omega) = \\ &= \frac{[\hat{s}, Z_f(a, \cdot)\hat{s}](\omega)}{[\hat{f}, \hat{f}](\omega)} Z_f(a, \omega) \hat{h}(\omega) = \\ &= |Z_f(a, \omega)|^2 \frac{[\hat{s}, \hat{s}](\omega)}{[\hat{f}, \hat{f}](\omega)} = \hat{h}(\omega) \end{aligned}$$

对于 a. e. $\omega \in R \setminus E_f$, 有

$$(P_{S(f)}(\hat{s}))^\wedge = \hat{h}(\omega) = 0$$

这就完成了定理 1 的证明.

定理 2 如果 $V(\varphi)$ 是一个抽样空间, $s(x)$ 是其中的抽样函数, 则对于 $\forall f(x) \in V(\varphi)$, 有下面两个结论成立:

(1) 序列 $\{f(a+k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$;

(2) 存在正数 A, B , 使得

$$A |Z_\varphi(a, \omega)|^2 \leq G_\varphi(\omega) \leq B |Z_\varphi(a, \omega)|^2$$

证明 (1) 根据文献[3]可假设 $\{s(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是抽样空间的 Riesz 基, 因此存在正数 A, B , 使得

$$A \leq G_s(\omega) \leq B \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

再根据引理 1, 对于 $\forall f(x) \in V(\varphi)$, 有

$$|Z_f(a, \omega)|^2 = \frac{G_f(\omega)}{G_s(\omega)} \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

由定理 1 可知, 在平移不变子空间中, 抽样性质满足遗传性, 所以 $G_f(\omega)$ 在 R 上几乎处处有界. 因此, $Z_f(a, \omega) \in L^2[0, 1]$, 亦即序列 $\{f(a+k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

(2) 在引理 1 中, 令 $f(x) = \varphi(x)$, 则有

$$G_\varphi(\omega) = |Z_\varphi(a, \omega)|^2 G_s(\omega) \quad \text{a. e. } \omega \in R$$

再结合定理 1 的证明, 就可得到结论.

3 结 论

在本文中, 首先通过 Zak 变换刻画了抽样空间的一些性质, 然后证明了在一个平移不变的抽样空间中, 由其中任一个函数的整平移张成的子空间也是抽样空间, 最后给出了函数满足抽样定理的一些必要条件, 因此我们的结果具有一定的理论意义和现实意义.

参考文献:

- [1] Shannon C E. Communication in the presence of noise [J]. Proc IRE, 1949, 37(1): 10-21.
- [2] Zhou X, Sun W. On the sampling theorem for wavelet subspaces[J]. J Fourier Anal Appl, 1999, 5(4): 347-354.
- [3] Sun W, Zhou X. An aspect of the sampling theorem [J]. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2005, 3(2): 247-255.
- [4] Sun W. Sampling theorems for multivariate shift invariant subspaces [J]. Sampl Theory Signal Image Process, 2005, 4(1): 73-98.
- [5] Blance C, Cabrelli C, Heineken S. Functions in sampling spaces[J]. Sampl Theory Signal Image Process, 2005, 5(3): 275-295.

(编辑 杜秀杰)