

近似完全重构交替离散傅里叶变换调制滤波器组

王小龙¹, 水鹏朗¹, 孙晓云²

(1. 西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室, 710071, 西安;

2. 西安科技大学通信学院, 710054, 西安)

摘要: 针对离散傅里叶变换调制滤波器组(DFTMFB)阻带衰减小的问题,提出了一种交替离散傅里叶变换调制滤波器组(IDFTMFB)的设计方法. 其分析滤波器由2个分析原型滤波器经复指数交替调制得到,综合滤波器由2个原型滤波器按同一调制方式得到. 所采用的交替调制方式使IDFTMFB在结构的设计上具有更多的灵活性. 按照滤波器组的通带、阻带和系统失真的要求, IDFTMFB原型滤波器的设计被转化为一个非线性优化问题,避免了传统的DFTMFB中连续参数的离散化运算,算法更为简单. 仿真结果表明,与传统的DFTMFB设计方法相比, IDFTMFB的设计方法使得复调制滤波器组的阻带衰减提高了约3 dB,输出失真减小了约12 dB,而且输出混叠减小了约1 dB.

关键词: 离散傅里叶变换; 调制滤波器组; 近似完全重构

中图分类号: TN911 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)08-1001-05

Near Perfect Reconstruction Interleaved Discrete Fourier Transform Modulated Filter Bank

WANG Xiaolong¹, SHUI Penglang¹, SUN Xiaoyun²

(1. National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China; 2. College of Telecommunication, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: Aiming at the problem of small stopband attenuation of discrete Fourier transform modulated filter bank (DFTMFB), a method that is used to design novel interleaved discrete Fourier transform modulated filter banks (IDFTMFB) is presented. The analysis filter bank of IDFTMFB is generated by alternately modulating two analysis prototype filters with complex exponential function, and the synthesis filter bank of IDFTMFB is generated from two synthesis prototype filters via the same modulating manner. The interleaved modulation method used by IDFTMFB provides more flexibility in its structure design. Based on the requirements on the passband, stopband, and system distortion of the filter bank, the design of the IDFTMFB prototype filters is converted into a non-linear optimization problem. Since the discretization operation of continuous parameter in the design of conventional DFTMFB is avoided, the proposed algorithm is simple. Simulation results show that the improvement on the stopband attenuation of the complex modulated filter bank obtained by the proposed method is approximately 3 dB higher than the traditional DFTMFB method, the improvement on the output distortion is up to approximately 12 dB, while the output aliasing is reduced approximately 1 dB.

Keywords: discrete Fourier transform; modulated filter bank; near perfect reconstruction

调制滤波器组由于结构简单,计算效率高,因而在数据压缩、自适应滤波等领域具有重要的应用^[1]. 调制滤波器组分为余弦调制滤波器组^[2-3]和离散傅里叶变换(DFT)调制滤波器组^[4-5]2类. 与余弦调制滤波器组不同,DFT调制滤波器组可以将信号的正负频率分量分割到不同的子带而独立处理,因而特别适合于处理复值信号. 由于临界采样完全重构或近似完全重构(NPR)DFT调制滤波器组的频率特性较差,且存在较大的带内混叠^[1],因而能同时满足多个性能指标的过采样DFT调制滤波器组受到了人们的广泛关注. 文献[4]提出了过采样近似完全重构DFT调制滤波器组的设计方法,其分析和综合滤波器由1个原型滤波器的指数调制形式组成. 原型滤波器的设计被转化为包含无穷约束的二次优化问题,其运算量巨大,且1个原型滤波器可供优化的自由度有限,这也限制了滤波器组的性能. 本文提出使用4个原型滤波器的交替DFT调制滤波器组. 在这种滤波器组中,交替DFT调制取代了传统DFT调制以获得近似完全重构的复滤波器组. 多个原型滤波器的使用提供了更多的自由度,使获得具有更好性能的复调制滤波器组成为可能.

1 交替DFT调制的复滤波器组

交替DFT调制滤波器组在结构上不同于传统DFT调制滤波器组及改进的DFT调制滤波器组^[5]. 传统DFT调制滤波器组使用1个(或2个)原型滤波器,改进的DFT调制滤波器组使用1个原型滤波器,为了混叠对消,在子带部分引入了适当修改,交替DFT调制滤波器组使用4个原型滤波器(2个分析原型滤波器和2个综合原型滤波器),从而为减小混叠及改进滤波器组性能提供了更多的设计自由度. 设 $h^{(0)}(n)$ 和 $h^{(1)}(n)$ 为2个分析原型滤波器的脉冲响应, $g^{(0)}(n)$ 和 $g^{(1)}(n)$ 为2个综合原型滤波器的脉冲响应,则分析和综合原型滤波器的 z 域表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} H^{(0)}(z) &= \sum_n h^{(0)}(n)z^{-n} \\ H^{(1)}(z) &= \sum_n h^{(1)}(n)z^{-n} \\ G^{(0)}(z) &= \sum_n g^{(0)}(n)z^{-n} \\ G^{(1)}(z) &= \sum_n g^{(1)}(n)z^{-n} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

对于 M 通道交替DFT调制滤波器组(为叙述简便,文中假定 M 为偶数, M 为奇数时其结论是一样的),分析滤波器的脉冲响应和综合滤波器的脉冲响应分别为

$$\left. \begin{aligned} h_{2k}(n) &= h^{(0)}(n)\exp(j4\pi kn/M) \\ h_{2k+1}(n) &= h^{(1)}(n)\exp(j2(2k+1)\pi n/M) \\ g_{2k}(n) &= g^{(0)}(n)\exp(j4\pi kn/M) \\ g_{2k+1}(n) &= g^{(1)}(n)\exp(j2(2k+1)\pi n/M) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$k = 0, 1, \dots, M/2 - 1$$

分析和综合滤波器的 z 域表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} H_{2k}(z) &= H^{(0)}(zW_M^{2k}) \\ H_{2k+1}(z) &= H^{(1)}(zW_M^{2k+1}) \\ G_{2k}(z) &= G^{(0)}(zW_M^{2k}) \\ G_{2k+1}(z) &= G^{(1)}(zW_M^{2k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$k = 0, 1, \dots, M/2 - 1$$

式中: $W_M = \exp(-j2\pi/M)$. 由式(3)可知,所有偶数通道的分析(或综合)滤波器都由 $H^{(0)}(z)$ (或 $G^{(0)}(z)$)经不同频移得到,所有奇数通道分析(或综合)滤波器都由 $H^{(1)}(z)$ (或 $G^{(1)}(z)$)经不同频移得到. 图1给出了交替DFT调制滤波器组的结构示意图,图2给出了分析滤波器组频率响应的示意图.

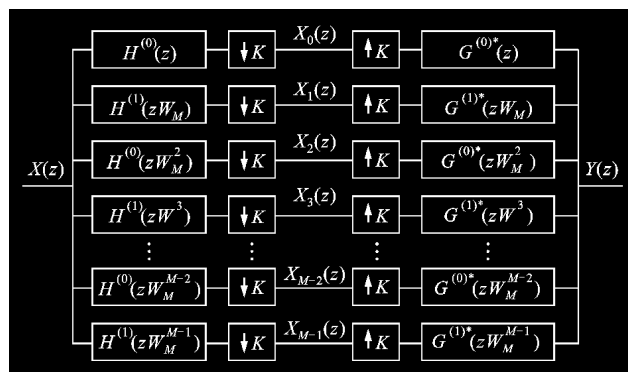


图1 M 通道交替DFT调制滤波器组结构图

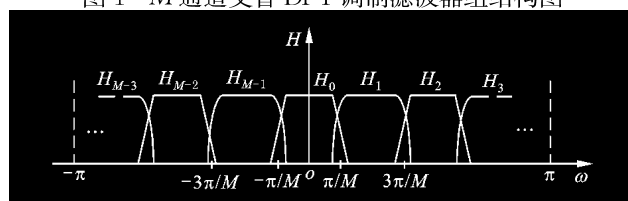


图2 分析滤波器组的频率响应示意图

2 NPR交替DFT调制滤波器组的设计推导

若输入信号 $X(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$, 则第 m 个子带信号的 z 变换为

$$X_m(z) = \frac{1}{K} H_m(z^{1/K}) X(z^{1/K}) + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} H_m(z^{1/K} W_K^k) X(z^{1/K} W_K^k) \quad (4)$$

式中: $W_K = \exp(-j2\pi/K)$; 式右第1项表示子带信号的期望分量,第2项表示子带内的混叠分量.

如图1所示,滤波器组的输出信号为

$$Y(z) = \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{M-1} H_m(z) G_m^*(z) X(z) + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} H_m(z W_K^k) G_m^*(z) X(z W_K^k) \quad (5)$$

式中:传递函数 $T(z) = \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{M-1} H_m(z) G_m^*(z)$; 式右第2项表示输出混叠分量。

设 $h^{(0)}(n)$ 、 $h^{(1)}(n)$ 和 $g^{(0)}(n)$ 、 $g^{(1)}(n)$ 满足因果性,且滤波器长度为 L ,则它们的脉冲响应序列分别为

$$\begin{aligned} h^{(0)} &= [h^{(0)}(0), h^{(0)}(1), \dots, h^{(0)}(L-1)]^T \\ h^{(1)} &= [h^{(1)}(0), h^{(1)}(1), \dots, h^{(1)}(L-1)]^T \\ g^{(0)} &= [g^{(0)}(0), g^{(0)}(1), \dots, g^{(0)}(L-1)]^T \\ g^{(1)} &= [g^{(1)}(0), g^{(1)}(1), \dots, g^{(1)}(L-1)]^T \end{aligned}$$

滤波器组的子带内混叠分量和输出混叠分量均直接影响滤波器组重构误差的大小,在滤波器组的设计中,总是希望子带内的混叠分量和输出混叠分量尽可能地小.由于直接控制子带内混叠分量和输出混叠分量过于复杂,通常对子带内混叠分量和输出混叠分量进行间接控制以达到控制滤波器组重构误差的目的^[1,4].对于交替DFT调制滤波器组,子带内的混叠分量的减小可以通过最小化子带内混叠 $\beta(h^{(0)}, h^{(1)})$ 来实现

$$\begin{aligned} \beta(h^{(0)}, h^{(1)}) &= \frac{1}{4\pi K^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{K-1} [|H^{(0)}(\exp(j\omega/K) W_K^k)|^2 + \\ &\quad |H^{(1)}(\exp(j\omega/K) W_K^k)|^2] d\omega \quad (6) \end{aligned}$$

令 $E_H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{2\pi-\pi/K} |H(\exp(j\omega))|^2 d\omega$ 为低通滤波器 $H(\exp(j\omega))$ 的阻带能量,容易证明子带内混叠可由2个分析原型滤波器的阻带能量所确定

$$\beta(h^{(0)}, h^{(1)}) = \frac{E_{H^{(0)}} + E_{H^{(1)}}}{2K} \quad (7)$$

类似地,输出混叠分量的减小可以通过最小化输出混叠 $\gamma(h^{(0)}, h^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)})$ 来实现

$$\begin{aligned} \gamma(h^{(0)}, h^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi K^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} |H_m(\exp(j\omega) W_K^k) \cdot \\ &\quad G_m^*(\exp(j\omega))|^2 d\omega + \\ &\quad \frac{1}{2\pi K^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=2}^{K-2} \sum_{m=0}^{M-1} |H_m(\exp(j\omega) W_K^k) \cdot \\ &\quad G_m^*(\exp(j\omega))|^2 d\omega \quad (8) \end{aligned}$$

式(8)右端第1项表示输出混叠中相邻子带间的混叠,第2项表示输出混叠中非相邻子带间的混

叠.考虑如下事实:当原型滤波器具有较大的阻带衰减时,式(8)右端第2项总是比第1项小得多,因此最小化式(8)中相邻子带间的混叠以代替最小化总的输出混叠.相邻子带间的混叠可表示为

$$\begin{aligned} \xi(h^{(0)}, h^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi K^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} |H_m(\exp(j\omega) W_K^k) \cdot \\ &\quad G_m^*(\exp(j\omega))|^2 d\omega \end{aligned}$$

令 $U_H = \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} |H(\exp(j\omega))|$ 为低通滤波器 $H(\exp(j\omega))$ 的最大频谱分量,通过适当的等式和不等式变换,可得到如下约束

$$\begin{aligned} \xi(h^{(0)}, h^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)}) &\leq \frac{M}{K^2} [U_{H^{(0)}}^2 E_{G^{(0)}} + \\ &\quad U_{G^{(0)}}^2 E_{H^{(0)}} + U_{H^{(1)}}^2 E_{G^{(1)}} + U_{G^{(1)}}^2 E_{H^{(1)}}] \quad (9) \end{aligned}$$

式(9)右端是原型滤波器阻带能量与最大频谱分量平方之积的线性组合,显然输出混叠分量的减小转化为在给定最大频谱分量条件下最小化原型滤波器的阻带能量.4个原型滤波器阻带能量的和表示为

$$\begin{aligned} E(h^{(0)}, h^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/K}^{2\pi-\pi/K} [|H^{(0)}(\exp(j\omega))|^2 + \\ &\quad |H^{(1)}(\exp(j\omega))|^2 + |G^{(0)}(\exp(j\omega))|^2 + \\ &\quad |G^{(1)}(\exp(j\omega))|^2] d\omega = h^{(0)T} T(K, L) h^{(0)} + \\ &\quad h^{(1)T} T(K, L) h^{(1)} + g^{(0)T} T(K, L) g^{(0)} + \\ &\quad g^{(1)T} T(K, L) g^{(1)} \quad (10) \end{aligned}$$

式中: $T(K, L)$ 为对称的 $L \times L$ 维 Toeplitz 矩阵,其第1行矢量为 $[t(0), t(1), \dots, t(L-1)]$, 其中

$$t(n) = \begin{cases} 1 - 1/K & n = 0 \\ -\frac{\sin(n\pi/K)}{n\pi} & n \neq 0 \end{cases} \quad (11)$$

显然,原型滤波器阻带能量之和是原型滤波器系数的二次函数。

滤波器组的输出失真也是必须考虑的因素.传递函数 $T(z)$ 总是被期望等于 z 的单项式,即 $T(z) = cz^{-n_d}$.不失一般性,考虑 $T(z) = 1$ 的情况,输出失真的能量可以通过下式来约束

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{M-1} H_m(\exp(j\omega)) G_m^*(\exp(j\omega)) - 1 \right|^2 d\omega &\leq \\ \frac{M^2}{4K^2} \left[\sum_{n \neq 0} \left| \sum_l h^{(0)}(nM+l) g^{(0)}(l) + \right. \right. & \\ \left. \left. \sum_l h^{(1)}(nM+l) g^{(1)}(l) \right|^2 \right] &\quad (12) \end{aligned}$$

此时原型滤波器的互相关需满足

$$\begin{cases} \sum_n h^{(0)}(n) g^{(0)}(n) = K/M \\ \sum_n h^{(1)}(n) g^{(1)}(n) = K/M \end{cases} \quad (13)$$

由式(12)和式(13)可知,输出失真由原型滤波器的互相关所明确限制。

在滤波器组的设计中,通常期望滤波器的通带尽可能地平坦.传统的通带平坦性约束导致优化问题须通过半无穷规划来求解^[4].在 M 带小波的设计中,尺度滤波器的通带平坦性通过零频率点的导数及高阶导数来保证^[6].本文借用这一方法来约束原型滤波器的通带平坦性以简化设计.由于原型滤波器的幅度响应关于 $\omega=0$ 对称,实际上只需约束原型滤波器的偶数阶导数,即

$$\left. \begin{aligned} |H^{(0)}(0)|^2 &= K; \frac{d^{2r_1} |H^{(0)}(\omega)|^2}{d\omega^{2r_1}} \Big|_{\omega=0} = 0 \\ |H^{(1)}(0)|^2 &= K; \frac{d^{2r_2} |H^{(1)}(\omega)|^2}{d\omega^{2r_2}} \Big|_{\omega=0} = 0 \\ |G^{(0)}(0)|^2 &= K; \frac{d^{2r_3} |G^{(0)}(\omega)|^2}{d\omega^{2r_3}} \Big|_{\omega=0} = 0 \\ |G^{(1)}(0)|^2 &= K; \frac{d^{2r_4} |G^{(1)}(\omega)|^2}{d\omega^{2r_4}} \Big|_{\omega=0} = 0 \\ r_1 &= r_2 = 1, 2, \dots, R_1; \quad r_3 = r_4 = 1, 2, \dots, R_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: R_1, R_2 分别为分析和综合原型滤波器通带平坦性参数,均为正整数, R_1 和 R_2 的不同取值代表对分析和综合原型滤波器通带平坦性的不同要求.显然,式(14)可以表示为原型滤波器系数的一组线性及二次方程.

3 原型滤波器的优化描述

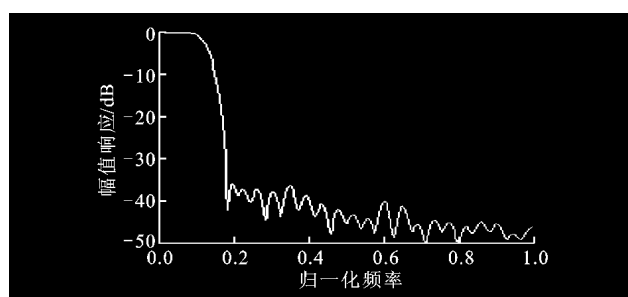
根据前面的讨论,结合式(10)、式(12)~式(14),原型滤波器的设计转化为如下的优化问题

$$\begin{aligned} & \min_{h^{(0)}, h^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)}} \{E(h^{(0)}, h^{(1)}, g^{(0)}, g^{(1)})\} \\ \text{s. t.} & \left. \begin{aligned} \sum_n h^{(0)}(n) &= \sum_n h^{(1)}(n) = \sum_n g^{(0)}(n) = \\ & \sum_n g^{(1)}(n) = K^{1/2} \\ \sum_n n^{2r_1} \left(\sum_l h^{(0)}(l+n) h^{(0)}(l) \right) &= 0; r_1 = 1, 2, \dots, R_1 \\ \sum_n n^{2r_2} \left(\sum_l h^{(1)}(l+n) h^{(1)}(l) \right) &= 0; r_2 = 1, 2, \dots, R_2 \\ \sum_n n^{2r_3} \left(\sum_l g^{(0)}(l+n) g^{(0)}(l) \right) &= 0; r_3 = 1, 2, \dots, R_3 \\ \sum_n n^{2r_4} \left(\sum_l g^{(1)}(l+n) g^{(1)}(l) \right) &= 0; r_4 = 1, 2, \dots, R_4 \\ \sum_n h^{(0)}(n) g^{(0)}(n) &= \sum_n h^{(1)}(n) g^{(1)}(n) = K/M \\ 0 \leq \sum_{n \neq 0} \left| \sum_l h^{(0)}(Mn+l) g^{(0)}(l) + \right. & \\ \left. \sum_l h^{(1)}(Mn+l) g^{(1)}(l) \right| &\leq \epsilon_d \end{aligned} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

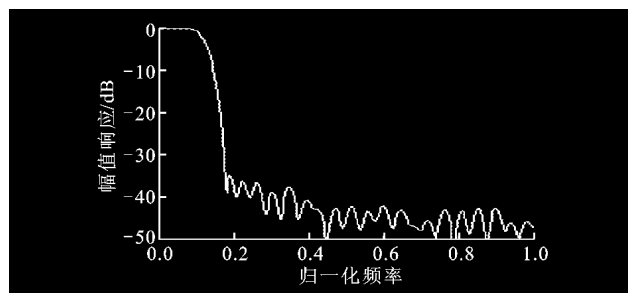
式中: ϵ_d 是给定的正数. 式(15)中目标函数是原型滤波器系数的二次函数,约束条件由有限个线性等式、二次等式及二次不等式约束组成,式(15)的优化描述比文献[5]更为简单,因而求解更为容易。

4 仿真结果

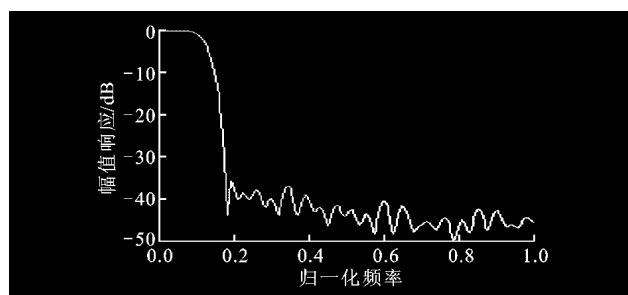
设 $L=48, M=8, K=6, R_1=3, R_2=3, \epsilon_d=1 \times 10^{-3}$, 采用本文设计方法得到的原型滤波器 $h^{(0)}(n), h^{(1)}(n), g^{(0)}(n)$ 和 $g^{(1)}(n)$ 的幅频响应如图3所示. 图4给出了文献[5]中单原型滤波器 $p(n)$ 的幅频响应(其参数 $L=48, M=8, K=6$). 表1比较了这2种方法所得原型滤波器及相应滤波器组的



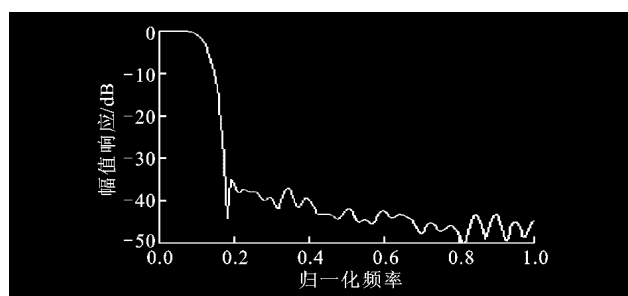
(a) $H^{(0)}(\omega)$



(b) $H^{(1)}(\omega)$



(c) $G^{(0)}(\omega)$



(d) $G^{(1)}(\omega)$

图3 本文所得原型滤波器的幅频响应

性能.

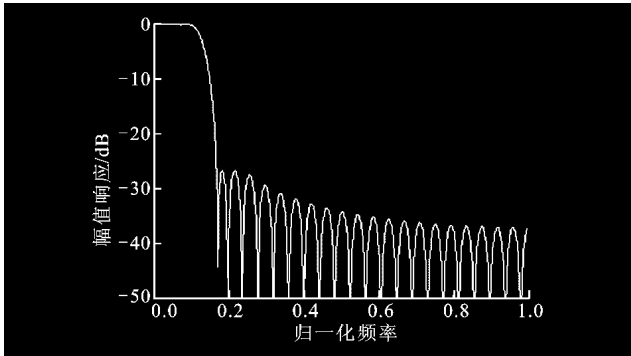


图 4 文献[5]所得原型滤波器的幅频响应

表 1 2 种方法所得滤波器组性能比较
($M=8,K=6,L=48$)

设计方法	原型滤波器最大阻带水平/ dB	原型滤波器最大通带波纹/ dB	滤波器组最大输出失真/ dB	滤波器组输出混叠/ dB	滤波器组子带内混叠/ dB
本文方法	-35.0	0.01	-45.6	-32.1	-40.7
文献[5]方法	-32.0	0.07	-34.2	-31.5	-40.0

5 结 论

本文提出了一种交替 DFT 调制滤波器组,其原型滤波器的设计由滤波器组的输出混叠和输出失真所导出.与传统的 DFT 调制滤波器组相比,4 个

原型滤波器的使用提供了更多的设计自由度,从而使获得性能更好的复调制滤波器组成为可能.仿真结果也证实了这一点.

参考文献:

[1] VAIDYANATHAN P P. Multirate systems and filter banks [M]. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1993.

[2] NGUYEN T Q, KOILPILLAI R D. The theory and design of arbitrary-length cosine-modulated filter banks and wavelets, satisfying perfect reconstruction [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1996, 44(3): 473-483.

[3] ARGENTI F, RE E D. Design of biorthogonal M -channel cosine-modulated FIR/IIR filter banks [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2000, 48(3): 876-881.

[4] WILBUR M R, DAVIDSON T N, REILLY J P. Efficient design of oversampled NPR GDFT filterbanks [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2004, 52(7): 1974-1962.

[5] KARP T, FLIEGE N J. Modified DFT filter banks with perfect reconstruction [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems: II, 1999, 46(11): 1404-1414.

[6] SHUI Penglang, BAO Zheng. M -band biorthogonal interpolating wavelets via lifting scheme [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2004, 52(9): 2500-2512.

(编辑 刘杨)