

一类随机性 EOQ 模型的关键路径存贮策略

费蓉¹, 崔杜武¹, 张淳民², 刘萍萍³

(1. 西安理工大学计算机科学与工程学院, 710048, 西安; 2. 西安交通大学理学院, 710049, 西安; 3. 西安通信学院基础部, 710106, 西安)

摘要: 针对已有存贮策略不能直接适用于库存决策模型的问题, 提出了一种基于关键路径的存贮策略, 实现了一类随机性经济订货批量公式(EOQ 模型)的关键路径求解. 通过有限状态机构建算法(BFA), 建立了适用于图论的有限状态机的资金有限型随机性 EOQ 模型, 解决了原随机性 EOQ 模型不能直接应用于图论策略的问题. 基于该有限状态机进一步提出了基于统筹法(PERT)的生成算法(BPA), 其可将有限状态机转换为 PERT 图, 以符合关键路径求解需求, 由此可利用关键路径存贮策略来求解 EOQ 类模型. 通过实例验证表明, 所提策略能够较好地求解资金有限型随机性 EOQ 模型, 并保证结果的完整性, 同时证明了相关算法的理论性.

关键词: 经济订货批量; 关键路径; 决策模型; 生成算法; 存贮策略

中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)04-0431-05

Critical Path Inventory Policy for a Kind of Stochastic EOQ Model

FEI Rong¹, CUI Duwu¹, ZHANG Chunmin², LIU Pingping³

(1. School of Computer Science and Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. School of Science Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 3. Fundamental Training Department, Xi'an Communication Institute, Xi'an 710106, China)

Abstract: It is known that existing inventory policies can't be used in storage decision-making model directly. A critical path inventory policy is presented to solve a kind of stochastic economic order quantity (EOQ) model with limited F (fund). The finite state machine (FSM) is constructed by building FSM algorithm (BFA), which is applicable in graph theory, and then, a build program algorithm (BPA) is presented to convert the FSM into PERT (program evaluation and review technique) for the use of critical path. The critical path inventory policy can be used to solve the PERT. Theoretical properties of the algorithm are analyzed and an example is presented. The results show that the policy is effective to solve the stochastic EOQ model with limited F , and the integrality of the results is guaranteed.

Keywords: economic order quantity; critical path; decision-making model; build program algorithm; inventory policy

经济订货批量公式(EOQ 模型)为现代存贮理论的发展奠定了基础^[1]. 传统的存贮模型大致可分为确定性与随机性 2 类, 如果模型中含有随机变量, 则称为随机性模型^[2]. 针对此类模型, 存在着 3 种常用策略: 定期订货、定点订货及 (s, S) 存贮策略^[3],

存贮策略的优劣是以赢利期望值的大小作为衡量标准的.

近年来, 国内外的大量研究多集中于建立存贮模型和生成相应策略之上, 如在综合考虑了原料、产品存贮而获得的经济批量模型^[4], 将具有数量折扣

的经典 EOQ 公式推广为一般的确定性静态存贮系统^[5],以及讨论了随机情形下的多种物品存贮等^[6-8],这些研究使得经济批量模式的应用范畴得到了显著拓展。

关键路径分析,其目的是找出完成所有关键任务耗时的最短路径.本文基于目标的可重叠性,针对资金有限随机性 EOQ 模型的关键路径存贮策略,通过随机模型的形式变换,实现了基于关键路径分析的最优存贮策略,从而开辟了路径规划在库存决策上的应用。

1 理论基础

存贮策略作为存贮论的基本元素,决定着库存的补充时间和补充数量,其模型是以 (s, S) 策略为基础背景,每当存贮量 $x > s$ 时不补充库存,而当 $x \leq s$ 时补充库存,补充量 $Q = S - x$ 。

统筹法(PERT)是编制大型工程进度计划和生产计划的有效方法,那么以关键路径为应用背景,采用图论语言对 PERT 定义如下。

定义 1 设 D 是 n 阶有向简单带权图,若满足条件:① D 中无回路;② D 中存在一个顶点(又称为发点 v_1),其入度为 0,存在一个顶点(又称为收点 v_n),其出度为 0;③任意的 $v \in V - \{v_1, v_n\}$ 是在从 v_1 到 v_n 的某条路径上.则,称 D 是 PERT 图^[9]。

定义 2 在 PERT 图中的关键路径是从 v_1 到 v_n 的最长(按权计算)路径,处于关键路径上的顶点称为关键状态,处在关键路径上的边称为关键活动^[10]。

基于关键路径的存贮策略,资金有限随机性 EOQ 模型的 PERT 图生成算法应该是体系的核心部分。

2 模型描述

定义 3 货物单位成本为 K ,单位存贮费用为 C_1 ,单位缺货费用为 C_2 ,每次订购费用为 C_3 ,需求 r 为连续的随机变量,密度函数为 $\phi(r)$,满足 $\int_0^\infty \phi(r)dr = 1$,分布函数为 $F(a) = \int_0^a \phi(r)dr = 1, a > 0$,期初存贮量为 I ,订货量为 Q ^[3].此时,期单元货物初存贮达到 $S = I + Q$.针对此类模型,常用的存贮策略为 (s, S) 型,可求得单类货物的最低订货量 $Q = S - I$ 。

以此为库存决策的前提条件,可求得库存预警货物的种类.不失一般性,库存决策面对的是多目标界定。

定义 4 设有 M 项货物,每种货物预警阈值 $Q_{mm'} = S_m - I_m, 0 < m \leq M$,若 $I_m < Q_{mm'}$,货物 i 为采购任务;又设 $N = \{i | 0 \leq i \leq M\}$,每项任务 i 的单位价格为 p_i ,固定资金为 F ,则 i 的采购资金为 $f_i = p_i x_i, F \geq \sum_{i=1}^m f_i, p_i \geq 0, x_i \geq 0$ 。

定义 5 若货物需求度为 l_i ,表示单位货物消耗速度及缺货损失的统计综合排序,则 $L = \{l_i | 1 \leq i \leq n\}$ 。

满足定义 4、定义 5 的随机性 EOQ 模型,称为 F 有限型随机 EOQ 模型。

3 关键路径存贮策略

以 F 有限型随机 EOQ 模型为基础,通过构建 PERT 图,便可进行关键路径搜索,从而实现 F 的最高利用率。

关键路径存贮策略的主体架构如图 1 所示。

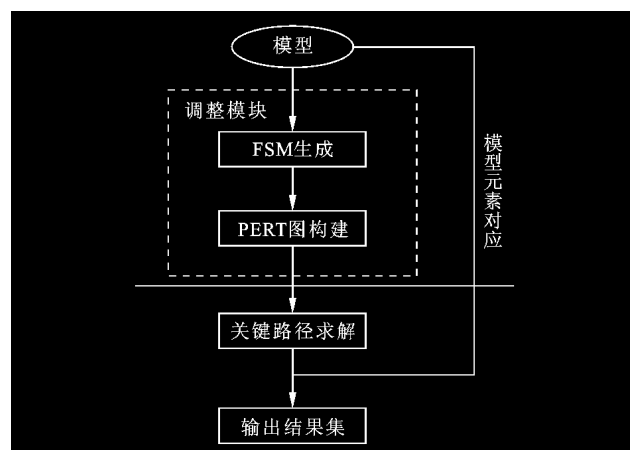


图1 关键路径存贮策略的主体架构

3.1 有限状态机的构建算法

为使 F 有限型随机 EOQ 模型能够用图论策略来处理,应先对任意随机性 EOQ 模型进行处理,以得到有限状态机(FSM),处理算法 1 的步骤如下。

步骤 1: 从 $m=0$ 开始,调用 (s, S) 策略函数,求得每件货物的阈值 $Q_{mm'}$ 并与库存值比较,再将低于 $Q_{mm'}$ 的货物任务加入至采购任务集 N 。

步骤 2: 将 N 中的元素按相应的 $p_i + C_1$ 降序排列。

步骤 3: 从 N 中顺序提取元素作为新建节点集 V 的元素,构成节点集 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ 。

步骤 4: 从 $i=1$ 开始,执行步骤 4、步骤 5,直到 $i=n$,算法结束。

步骤 5: 连接有向弧 v_i, v_{i+1} ,定义该弧为 $a_{ij} =$

0,并加入弧集 $A=\{a_{ij} | 1 \leq i \leq j \leq n$.

步骤6: 连接自反弧 v_i, v_i , 定义该弧为 $a_{ii} = p_i + C_1$, 并加入弧集 A .

根据算法1知,该FSM具有如下性质.

性质1 对每个节点 v_i , 必然有弧 a_{ij} , 若 $i=j$, 则该FSM为自反的.

性质2 当且仅当 $j=i$ 或 $j=i+1$ 时, 存在弧 a_{ij} , 不存在弧 a_{jk} 满足 $k \neq j$ 且 $k \neq j+1$, 则该FSM为不可传递的.

下面给出了一个经过算法1处理的实例, 已有货物情况如表1所示. 若 $F=91\ 135$, 经算法1的步骤3可得到表2所示结果.

若 $v_1=2, v_2=4, v_3=1, v_4=3$, 且对应有 $a_{11}=1\ 050, a_{12}=0, a_{22}=895, a_{23}=0, a_{33}=840, a_{34}=0, a_{44}=210$, 则经算法1处理后的FSM如图2所示.

3.2 PERT图生成算法

对原随机性EOQ模型, 算法1完成了模型中对象的节点化, 生成FSM, 这一算法对EOQ模型具有普遍意义. 但是, 在求解 F 的分配策略上, FSM不能做到关键路径求解, 因此本文进一步提出了PERT图生成算法, 使FSM在符合拓扑有序及逆拓扑有序的前提下能够进行关键路径求解. 其中, 涉及到了附属节点, 对原节点而言, 其附属状态节点的属性应与原节点保持一致, 从逻辑上理解, 遍历附属节点与遍历原节点是一致的.

表1 货物存贮表

	k	C_1	C_2	C_3	I	l_i
$P(r=30)=0.20, P(r=40)=0.20, P(r=50)=0.40, P(r=60)=0.20$	800.0	40	1 015.00	60	10.0	4.0
$P(r=40)=0.25, P(r=50)=0.25, P(r=60)=0.50, P(r=70)=0.25$	1 000.0	50	1 268.75	75	12.5	1.0
$P(r=25)=0.05, P(r=48)=0.05, P(r=61)=0.15, P(r=74)=0.05$	200.0	10	253.75	15	60.0	5.0
$P(r=80)=0.1, P(r=90)=0.2, P(r=100)=0.3, P(r=110)=0.3$ $P(r=120)=0.1$	850.0	45	1 250.00	2 825	60.0	3.0
$\phi(r)=\begin{cases} 10^{-5} \times e^{-10^{-5} \times r_0} & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$	0.2	0	0.30	0	405 100.0	2.0

表2 (s, S) 策略结果

S	s	Q
40	30	30.0
40	40	27.5
61	25	1.0
100	80	40.0
405 000	405 000	无需补充

引理1 当 $F > \sum_{i=1}^n Q_i p_i$, 超额任务需求 x_i 与其需求度 l_i 成反比.

证明 由原随机性EOQ模型确定的需求度 L 可知, 当资金一定时, 为了避免造成损失, 须结合 L 决定进货量. 因 l_i 按升序排列, 假设存在2项任务 i, j , $l_i < l_j$, 根据定义5, 则任务 i 的消耗速度及缺货损失高于任务 j , 即当同时采购 i, j 时, 任务 i 优先, 应先考虑 i 的需求, 再采购 j , 因此任务需求 x_i 与 l_i 成反比. 证毕.

定理1 对任意超额任务 i, j , 若 $l_i < l_j$, 则需求 $x_i - Q_i > x_j - Q_j$.

证明 假设存在货物 i, j , 满足 $l_i < l_j$, 且 $x_i - Q_i < x_j - Q_j$, 则任务需求 $x_i - Q_i$ 与其需求度 l_i 成反比. 这个结果与引理矛盾, 故不存在此类情况. 所以, 对所有货物 i, j , 当 $l_i < l_j$ 时, $x_i - Q_i > x_j - Q_j$. 证毕.

根据定理1, 基于PERT图的生成算法(算法2)如下.

步骤1: 计算 $f = \sum_{i=1}^n Q_i p_i$.

步骤2: 按 l_i 升序对 i 进行排列.

步骤3: 建立系数集 X .

步骤4: 当 $F \geq f$, 转步骤5; 当 $F \leq f$, 转步骤7.

步骤5: 进行 $x_i = Q_i + [(F - f - (x_{i-1} p_{i-1})) / p_i]$ 运算, 将结果加入系数集 X .

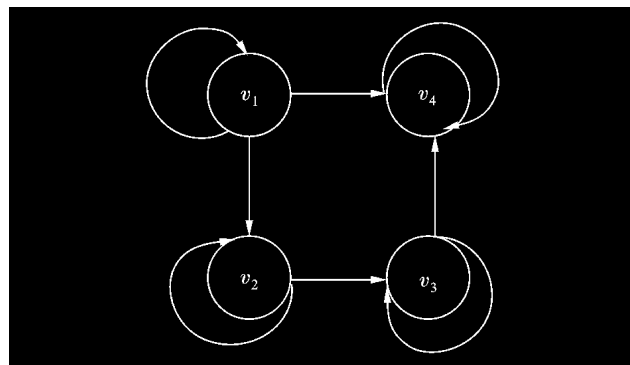


图2 经算法1处理后的FSM

步骤6: 从 $i=1$ 开始, 当 $x_i > 0$ 时, 执行步骤5; 当 $x_i \leq 0$ 且 $i < n$, 从 i 起的所有系数 x_i 均为0, 下转步骤8; 当 $i=n$ 时, 下转步骤8.

步骤7: 计算 $x_i = Q_i$, 直到 $F - \sum x_i p_i \leq 0$. 若 $F - \sum x_i p_i = 0$, 转入步骤8; 若 $F - \sum x_i p_i < 0$, 取当前 $x_i = [(F - \sum x_{i-1} p_{i-1}) / p_i]$, 此时 $x_i < 0$, 从系数集 X 中删去 x_i , 并逆向取前一任务 $i-1$, 再依 $x_i = [(F - \sum x_{i-1} p_{i-1}) / p_i]$ 计算, 直到 $x_i > 0$ 为止, 下转步骤8.

步骤8: v_j 的自反弧为 $a_{ij} = p_i + C_1$, 令 $k = i + n$, 添加 v_k 节点于 v_i, v_j 之间, 连接 v_i, v_k , 定义 $a_{ik} = x_i(p_i + C_1)$, 连接 v_k, v_j , 定义 $a_{kj} = 0$. 若原图中存在 a_{ij} 且 $i \neq j$, 连接 $a_{(i+n)(j+n)}$, 定义 $a_{(i+n)(j+n)} = 0$.

步骤9: 断开 $a_{(n+1)1}$, 连接有向弧 v_1, v_{n+1} .

步骤10: 反复执行步骤8、步骤9, 直到所有的弧被处理.

至此, 随机性 EOQ 模型的 PERT 图初步建立, 其可用于关键路径求解.

性质3 算法2运行结束后, PERT 图中必定不存在回路.

证明 假设算法2运行结束后 PERT 图中存在回路, 则必有2节点 v_i, v_k , v_i 可达 v_k , 并存在弧 a_{ik} , 以构成回路. 若 $i < n, k < n$, 由算法1生成的 FSM 的不可传递性可知, 不存在弧 a_{ik} ; 若 $i < n, k > n$, 由算法2步骤5、步骤6可知, 当且仅当 $k - n = i$ 时, 存在弧 a_{ik} , 但同时不存在弧 a_{ki} , 即 v_i 不可达 v_k ; 若 $i > n, k > n$, 2个节点均为附属节点, 又知 v_i 可达 v_k , 如果存在弧 a_{ki} , 必然 v_k 可达其原节点 $v_{(k/n)}$, 即存在弧 $a_{k(k/n)}$, 这与算法2的步骤3不符. 综上所述, 这种假设不成立, 因此算法2结束后, PERT 图中不存在回路. 证毕.

定理2 经过算法2处理之后, 简单带权图为一个 PERT 图.

证明 由性质1可知, 简单带权图无回路; 由算法2的步骤7可知, 该图存在一个发点 v_0 和一个收点 v_n ; 若该图无回路且为有向图, 则对任意 $v \in V - \{v_1, v_n\}$, 不存在孤立点(由算法1、算法2知), 即该图为连通的, 满足 v 在 v_1 到 v_0 的某条路径上.

满足上述3个条件的简单带权图与定义1相符, 则简单带权图 D 是 PERT 图.

定理3 算法结束时, 所有原 FSM 中的弧均被转化, 并生成新的 PERT 图.

证明 根据算法2的步骤8~步骤10, 当 $i=j$, 有新点 v_k 加入 PERT 图, 总有 $a_{ik} = x_i(p_i + C_1)$, $a_{kj} = 0$; 当 $i \neq j$, 总有 $a_{(i+n)(j+n)} = 0$; 所有弧经步骤10处理, 若仍有弧需处理, 则算法2继续执行. 由此可知, FSM 中所有弧均转入 PERT 图. 证毕.

在本文实例中, $a_{15} = 29\ 925$, $a_{18} = 0$, $a_{52} = 0$, $a_{56} = 0$, $a_{58} = 0$, $a_{26} = 35\ 800$, $a_{63} = 0$, $a_{67} = 0$, $a_{37} = 25\ 200$, $a_{74} = 0$, $a_{78} = 0$, $a_{48} = 210$, 经算法2处理, 所得结果如图3所示.

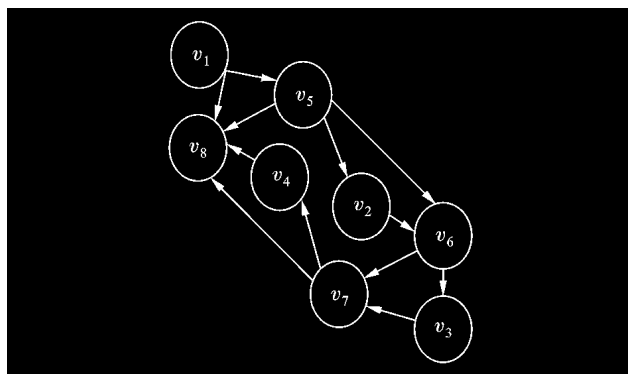


图3 PERT图

3.3 基于关键路径的存贮策略

针对 F 有限型随机 EOQ 模型, 在上述算法基础上, 结合关键路径的分析思想, 提出了一种新的存贮策略, 步骤描述如下.

步骤1: 录入模型数据.

步骤2: 执行算法1, 生成 FSM.

步骤3: 执行算法2, 构建 PERT 图.

步骤4: 从发点 v_0 出发, 按拓扑有序求解其余各顶点的最早发生时间.

步骤5: 从收点 v_n 出发, 按逆拓扑有序求解其余各顶点的最迟发生时间.

步骤6: 求每条弧 a_{ij} 的最早的开始时间和最迟的开始时间, 找出所有关键活动.

步骤7: 输出路径结果, 以获得收益最大解.

定理4 关键路径长度必定小于等于 F .

证明 由算法2的步骤4~步骤7可知, 当 $F > f$ 时, 由 $x_i = [(F - f - (x_{i-1} p_{i-1})) / p_i]$ 可推得 $\sum_{i=1}^n x_i p_i \leq F - f$; 当 $F = f$ 时, $x_i = Q_i$, 存在 $\sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n Q_i p_i = f = F$; 当 $F < f$, 由步骤7可知, $\sum_{i=1}^n x_i p_i \leq F$; 由定理2知, 简单带权图为 PERT 图, 基于关键路径的特点, 每条弧应走一遍且仅走一遍, 所以该路径长度必定小于等于 F , 证毕.

文中实例通过运行本文策略,其路径必经弧 a_{15} 、 a_{28} 、 a_{37} 、 a_{48} ,而且途经 $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_2 \rightarrow v_6 \rightarrow v_3 \rightarrow v_7 \rightarrow v_4 \rightarrow v_8$ 之后得到一条长度值为 91 135 的关键路径,对应活动顺序也符合定义 5.

4 结束语

针对普遍意义上的库存决策,先将模型转化为相应的 FSM,并针对该 FSM 设计了 PERT 图生成算法,再依据 PERT 图进行关键路径求解,能够获得 F 有限型随机 EOQ 模型.通过实例验证了本文策略的可行性,并对其理论性进行了证明.

通过路径规划策略处理后的 F 限制型随机 EOQ 模型,可保证模型在转换过程中路径是完整的.鉴于库存决策的广泛适用性,所提策略可应用于计算机网络通信、交通运输等众多领域.

参考文献:

- [1] 张坚,张怀胜.多时段 EOQ 问题的一种策略的改进优化方法[J].运筹学学报,2004,8(4):61-65.
ZHANG Jian, ZHANG Huaisheng. Optimal method comparisons about a multistage EOQ inventory policy [J]. OR Transactions, 2004, 8(4):61-65.
- [2] BAZARAA M S, SHETTY C M. Nonlinear programming theory and algorithms [M]. New York, USA: John Wiley & Sons, 1976:216-301.
- [3] 运筹学编写组.运筹学[M].2版.北京:清华大学出版社,1990:353-387.
- [4] 王昌福,周诚.一类新的经济批量公式[J].数量经济技术经济研究,1999(10):73-74.
- WANG Changfu, ZHOU Cheng. A New kind of EOQ [J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 1999(10):73-74.
- [5] 孙庆文,方影.关于最优存贮策略的两点注记[J].数学的实践与认识,2003,33(7):20-24.
SUN Qingwen, FANG Ying. Some notes on optimal inventory policy [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003,33(7):20-24
- [6] DIXON P, SILVER E A. A heuristic solution procedure for the multi-item, single level, limited capacity, lot-sizing problem [J]. Journal of Operations Management, 1981,2(1):23-40.
- [7] OHNO K, ISHIGAKI T. A multi-item continuous review inventory system with compound Poisson demands [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2001,53(1):147-165.
- [8] ZHAO Peixin, ZHAO Bingxin, WANG Hong. An EOQ model for multi-item and multi-storehouse with stochastic demand [C]// Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Los Alamitos, USA: Computer Society, 2006:1567-1570.
- [9] JOHNSONBAUGH R. Discrete mathematics [M]. 6th ed. 北京:电子工业出版社,2005.
- [10] SAHNI S. Data structures, algorithms, and applications in C++ [M]. 北京:机械工业出版社,1999.

(编辑 苗凌)