

变分水平集方法在 Stokes 问题形状识别中的应用

段现报^{1,2}, 马逸尘¹, 韩西安^{1,3}

(1. 西安交通大学理学院, 710049, 西安; 2. 西安理工大学理学院, 710048, 西安;
3. 装备指挥技术学院基础部, 101416, 北京)

摘要: 对二维定常 Stokes 方程的形状识别问题进行了研究. 直接从变分原理出发, 将经典的形状灵敏度分析方法与水平集方法相结合, 提出了一种可以适用于流体形状识别的新算法. 该算法是在固定的 Euler 网格上进行计算且在优化过程中不需要对水平集函数进行重新初始化, 从而节省了计算时间. 所提供的数值算例验证了所提算法是稳定、高效的.

关键词: 形状识别; 变分水平集方法; 灵敏度分析; Stokes 问题

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)10-1313-04

Shape Identification for Stokes Problem Using Variational Level Set Method

DUAN Xianbao^{1,2}, MA Yichen¹, HAN Xi'an^{1,3}

(1. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 3. Department of Basic Theories, Academy of Equipment Command & Technology, Beijing 101416, China)

Abstract: A shape identification for steady-state Stokes problem is considered. Following the variational principle, an algorithm by integrating the classical shape sensitivity analysis with the level set method to suit to shape identification in fluid flow. The cost of this algorithm is moderate since the shape is captured on a fixed Eulerian mesh and the re-initialization procedure is optional during the optimization process. The numerical examples are given to illustrate the promising features of the present method in stabilization and efficiency.

Keywords: shape identification; variational level set method; sensitivity analysis; Stokes problem

作为形状最优化问题的一部分, 流体中的形状识别问题在现实中有非常广泛的应用, 并且已经发展起来很多比较好的方法^[1]. 在形状优化中常用的、比较成熟的工具是形状灵敏度分析^[2]. 基于灵敏度分析的方法基本能处理大部分的形状或拓扑优化问题. 但是, 在通常情况下, 这一类算法是基于 Lagrange 框架的, 在计算过程中都需要重新划分网格, 这使得计算量非常大. 为了解决经典形状优化中网格重新剖分的问题, 学者们提出了虚拟区域法. 由于该方法不需要网格的重新划分而且网格的剖分是正则的, 大多数快速求解方法都可以使用. 区域(边界)沉浸方法与虚拟区域法也有异曲同工之妙, 这些方法在形状优化中更有吸引力, 这是因为

优化的最终形状在事先是未知的, 并且区域一般比较复杂.

另一种与虚拟区域法类似的方法是水平集方法^[3-4], 近来被引入到形状最优化问题的研究中^[5-8], 并取得了很多成功的应用. 由于这种方法不需要重新划分网格, 从而大大节约了计算时间. 与传统的形状优化方法不同, 水平集方法是基于 Euler 框架的, 计算过程是在固定网格上进行, 从而能有效地节省计算时间. 在水平集方法中, 移动的波前或界面是用水平集函数的零水平集来表示的. 这要求水平集函数在计算过程中要保持为有向距离函数, 但这一性质在界面演化过程中是很难保持的. 一种常用的修正方法是在演化过程中对水平集函数

进行不断的重新初始化,但是重新初始化的过程是非常复杂也非常费时的,而且对边界有很强的依赖性.最近一些学者提出了一种基于变分原理的水平集方法^[9-10],这一方法在水平集函数演化的过程中不再需要对水平集函数进行重新初始化.

由于上述特点,将在结构力学中已经比较成熟的水平集方法应用到流体力学的形状优化问题中.本文将变分水平集方法与流体力学问题的灵敏分析结合起来,使之可以适用于流体形状最优控制问题,并将所提算法应用到 Stokes 问题的形状识别中.所提供的数值算例验证了这一算法是稳定、高效、可行的.

1 问题的提出

考虑二维不可压缩定常 Stokes 方程. 设 Ω 是 R^2 中具有 Lipschitz 连续边界 $\Gamma := \partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_d$ 的一个有界开区域,对于二维不可压缩流体,其速度 $\mathbf{u}$ 和压力 p 满足如下的 Stokes 方程

$$\left. \begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{on } \Gamma_c \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{on } \Gamma_d \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\nu=1/Re$ 表示动力学黏性系数; $\mathbf{f}$ 是体积力.

作为试验函数空间,我们引入

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \mathbf{H}_{\Gamma_c}^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{v}|_{\Gamma_c} = 0\} \quad (2)$$

$$L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p dx = 0\} \quad (3)$$

为了定义 Stokes 方程的弱形式,引入下面的双线性形式

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} dx \quad (4)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad (5)$$

从而式(1)的弱形式可以表述为

$$\left. \begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle_{\Gamma_d} &= \langle \mathbf{g}, \mathbf{s} \rangle_{\Gamma_d} \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

可以证明, $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $b(\mathbf{v}, q)$ 分别在 $\mathbf{H}^1(\Omega)$ 和 $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ 上是连续的,从而可以得到问题(6)解的存在性和唯一性.

2 形状导数

目标泛函的一般形式为

$$J(\Omega, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} j(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) dx \quad (7)$$

定义 1 目标泛函(7)在 Ω 上的形状导数可以定义为空间 $W^{1,\infty}(R^2, R^2)$ 上在 0 点处的 Fréchet 导数

$$J((Id + \mathbf{h})(\Omega, \mathbf{u})) = J(\Omega, \mathbf{u}) + dJ(\Omega, \mathbf{u})(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h})$$

式中: $\mathbf{h}$ 为边界一个小的摄动量; $dJ(\Omega, \mathbf{u})$ 在 $W^{1,\infty}(R^2, R^2)$ 上是线性连续的.

由 Hadamard 结构定理可知,方向导数 $dJ(\Omega, \mathbf{u})$ 只依赖于边界 Γ 上的法向迹 $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$.

引理 1^[2] 设 Ω 是具有光滑边界的有界开集, $j(\mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}) \in W^{1,1}(R^2)$, 则目标泛函(7)可导,且对任意的 $\mathbf{h} \in W^{1,\infty}(R^2, R^2)$, 有

$$dJ(\Omega, \mathbf{u})(\mathbf{h}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{h}(x)) j(\mathbf{u}(x)) dx = \int_{\Gamma} \mathbf{h}(x) \mathbf{n}(x) j(\mathbf{u}(x)) ds \quad (8)$$

成立.

考虑 Stokes 问题的最小能量耗散,从而目标泛函(在不引起混淆的情况下仍记为 $dJ(\Omega, \mathbf{u})$)为

$$J(\Omega, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \quad (9)$$

则要求解的最优化问题可以表述为

$$\min_{\Omega \in \Omega_{ad}} J(\Omega, \mathbf{u}) \quad (10)$$

式中: $\mathbf{u}$ 是 Stokes 式(1)的解; Ω_{ad} 为包含所有可能形状的容许区域.

注意到在式(6)中 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, 由 Green 公式及引理 1 可以得到定理 1.

定理 1 设 Ω 是具有光滑边界的开集, $\mathbf{h} \in W^{1,\infty}(R^2, R^2)$, 设 $\mathbf{f}$ 及式(6)的解足够光滑, 如 $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, 式(7)的形状导数为

$$dJ(\Omega, \mathbf{u})\mathbf{h} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 (\mathbf{h}, \mathbf{n}) ds \quad (11)$$

式中: $\mathbf{u}$ 为状态方程(6)的解.

3 变分水平集方法

与经典的灵敏度分析方法不同,水平集方法是在固定的 Eulerian 网格上进行的. 对于一个给定的包含所有容许区域 Ω 的工作区域 $\Omega_{ad} \in R^2$, 设存在一个函数,即水平集函数 $\phi(x, t)$, 满足

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &> 0 && \forall x \in \Omega \\ \phi(x, t) &= 0 && \forall x \in \Gamma \\ \phi(x, t) &< 0 && \forall x \in \Omega_{ad} \setminus \bar{\Omega} \end{aligned}$$

单位外法向量 $\mathbf{n}$ 和曲率 κ 分别为

$$\mathbf{n} = \nabla \phi(x, t) / |\nabla \phi(x, t)| \quad (12)$$

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} = \operatorname{div}(\nabla \phi(x, t) / |\nabla \phi(x, t)|) \quad (13)$$

在优化的过程中,区域的边界由水平集函数 $\phi(x, t)$ 的零等值面来表示^[3]. 水平集函数 $\phi(x, t)$ 可以通过求解如下的 Hamilton-Jacobi 方程得到

$$\partial \phi(x, t) / \partial t + V |\nabla \phi(x, t)| = 0 \quad (14)$$

如上所述,在优化过程中,要保持水平集函数为一个距离函数. 我们知道,距离函数必需满足性质 $|\nabla \phi(x, t)| = 1$; 反之,如果一个函数 $\phi(x, t)$ 满足 $|\nabla \phi(x, t)| = 1$, 则 $\phi(x)$ 在相差一个常数的情况下也是一个距离函数. 所以,引入如下的积分式来衡量一个函数 $\phi(x, t)$ 是否为 $\Omega \in R^2$ 内的距离函数

$$D(\phi(x, t)) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla \phi(x, t)| - 1)^2 dx \quad (15)$$

设如果 $\phi(x, t)$ 在区域 Ω_{ad} 的边界上的法向导数为 0, 即

$$\partial \phi(x, t) / \partial n = 0 \quad \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \quad (16)$$

则 $D(\phi(x, t))$ 关于 $\phi := \phi(x, t)$ 在 $\psi := \psi(x, t)$ 方向上的 Gâteaux 导数为

$$(\partial D(\phi(x)) / \partial \phi, \psi) = - \int_D (\Delta \phi - \kappa) \psi dx$$

事实上

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial D(\phi(x))}{\partial \phi}, \psi \right) = \\ & \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_D 0.5 (|\nabla(\phi + t\psi)| - 1)^2 dx - \int_D 0.5 (|\nabla \phi| - 1)^2 dx \right) / t = \\ & \int_D \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} (2t \nabla \phi \cdot \nabla \psi + t^2 |\nabla \psi|^2 - 2 |\nabla(\phi + t\psi)| - 2 |\nabla \phi|) / t dx = \\ & \int_D \left(\nabla \phi \cdot \nabla \psi - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\nabla(\phi + t\psi)|^2 - |\nabla \phi|^2}{2t} \right) dx = \\ & \int_D \left(\nabla \phi \cdot \nabla \psi - \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \psi}{|\nabla \phi|} \right) dx = \\ & - \int_D (\Delta \phi - \kappa) \psi dx + \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\psi}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \\ & - \int_D (\Delta \phi - \kappa) \psi dx \end{aligned}$$

由定理 3, 形状导数可以写为如下的形式

$$dJ(\Omega) \mathbf{h} = \int_{\Gamma} V \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} ds$$

式中: $V = (\partial u / \partial \mathbf{n})^2$. 因为在式(11)中, $\mathbf{u}, \mathbf{n}$ 在整个区域 Ω_{ad} 上有定义, 所以可以在整个区域 Ω_{ad} 而不仅

是边界 Γ 上定义下降方向 $\mathbf{h} = -V \mathbf{n}$. $\mathbf{h}$ 的法向分量 $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = -V$ 可以作为式(14)的对流方向^[3]. 在本文算法中, 水平集函数由改进了的式(14)求得

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - V |\nabla \phi| - \lambda (\Delta \phi(x, t) - \kappa) = 0 \quad (17)$$

式中: λ 为平衡 $(\Delta \phi(x, t) - \kappa)$ 项影响的一个正常数. 在式(17)的左端, 第 2 项使得水平集函数的零等值线(面)趋向于区域的边界, 而第 3 项使得水平集函数 $\phi(x)$ 在优化过程中保持为一个距离函数, 所以在整个过程中重新初始化不再是必要的了.

4 算法及算例

在上面讨论的基础上, 我们给出了如下算法:

(1) 给定初始区域 Ω_0 , 并由此给出初始水平集函数 ϕ_0 ;

(2) 对 $k=1, 2, 3, \dots$ 进行迭代, 直至收敛. 由式(6)求出状态方程的解 $\mathbf{u}_k$, 再由式(11)求得目标泛函的形状导数; 由式(17)求出水平集函数 ϕ_{k+1} , 并由 ϕ_{k+1} 的零等值面确定出新区域的边界 $\Gamma_{k+1} = \partial \Omega_{k+1}$.

与经典的水平集方法不同, 这里不再需要对水平集函数重新初始化处理.

所用的计算模型如图 1 所示, 流体从左到右流过一个包围想要识别(反演)的形状为 Ω_0 的矩形区域, 除了在入流处和出口处, 其他的边界上都采用无滑移条件. 在入流处速度的水平分量为 1, 垂直分量为 0, 在出口处压力为 0.

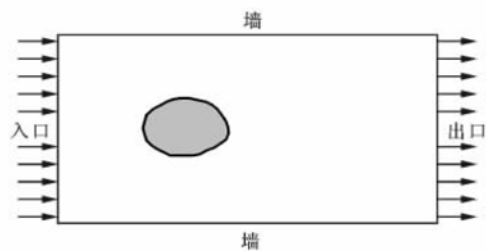
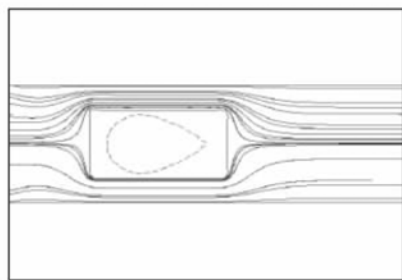
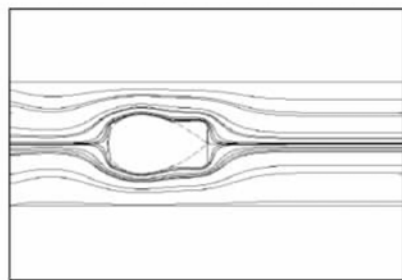


图 1 设计区域

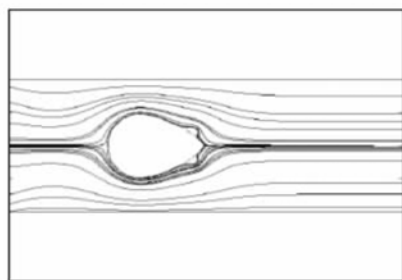
算例是一个流线体的优化问题, $Re=500$. 图 2 中所有的虚线为优化后想要得到的流场形状. 初始区域为一个矩形区域(图 2a), 图 2b 和图 2c 是分别经过 30 次迭代和 50 次迭代后得到的区域形状和流场, 最终得到的形状和流场如图 2d 所示, 目标泛函在每一步迭代的值见图 3.



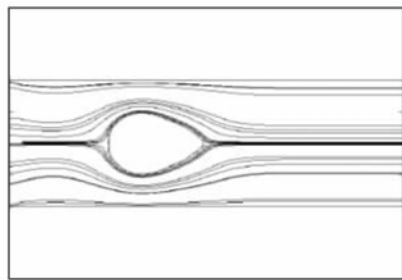
(a)初始的形状和流场



(b)30次迭代



(c)50次迭代



(d)最终的形状和流场

图2 流线体的形状识别

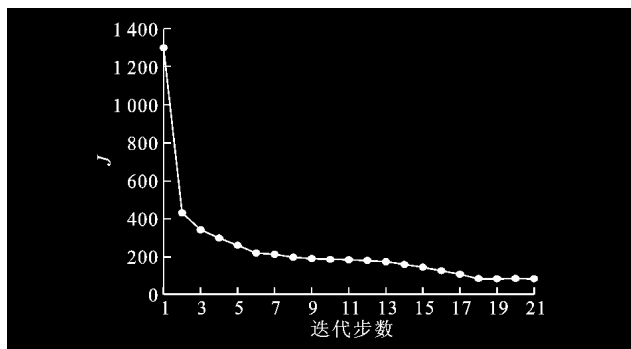


图3 目标泛函的收敛过程

5 结 论

结合经典的形状灵敏度分析方法和水平集方法,提出了一种流体形状优化的算法.尽管我们是以二维不可压缩 Stokes 为例,算法也可以适用于其他大部分类似的问题.由于算法是在固定欧拉网格上进行的,所以运算量大大减小,虽然在我们的算例中没有出现,但这种算法得到的结果有可能是局部最小的,这是我们下一步的研究目标之一.

参考文献:

- [1] MODHAMMADI B, PIRONNEAU O. Applied shape optimization for fluid[M]. Oxford, UK: Oxford University Press, 2001.
- [2] SOKOLOWSKI J, ZOLESIO J P. Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis [M]. Berlin, Germany: Springer, 1992.
- [3] OSHER S, SETHIAN J A. Level set methods and dynamic implicit surface[M]. New York, USA: Springer-Verlag, 2002.
- [4] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. J Comp Phys, 1988, 79: 12-49.
- [5] ALLAIRE G, JOUVE F, TOADER A M. A level-set method for shape optimization[J]. C R Acad Sci Paris: I, 2002, 334: 1125-1130.
- [6] WANG M Y, WANG X M, GUO D M. A level set method for structural topology optimization[J]. Comp Meth Appl Mech Eng, 2003, 192: 227-246.
- [7] ALLAIR G, JOUVE F, TOADER A M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method[J]. Journal of Computational Physics, 2004, 194: 363-393.
- [8] MEI Y L, WANG X M. A level set method for structural topology optimization and its applications[J]. Advances in Engineering Software, 2004, 35: 415-441.
- [9] CHAN T, VESE L. Active contours without edges [J]. IEEE Trans Image Process, 2001, 10: 266-277.
- [10] DUAN X B, MA Y C, ZHANG R. Optimal shape control of fluid flow using variational level set method [J]. Physics Letters A, 2008, 372: 1374-1379.

(编辑 杜秀杰)