

空间机构运动学建模与分析方法的研究

袁清珂¹, 姜歌东²

(1. 广东工业大学机电工程学院, 510006, 广州; 2. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为了快速高效地建立空间机构运动模型以进行运动学特性分析, 运用多体动力学原理, 提出了一种计算机符号建模与数值的计算方法. 在每根杆件上的运动副处建立笛卡尔直角坐标系, 用这些坐标系之间的关联关系来描述空间机构的结构形态, 推导了同一杆件上 2 个坐标系之间的变换关系, 得到了杆件形状矩阵. 根据运动副的类型和属性, 推导了同一运动副处不同杆件上 2 个坐标系之间的变换关系, 得到了运动副约束矩阵. 通过在运动链上连续使用变换矩阵, 建立了空间机构的数学模型, 并用推导的运动方程对时间求导, 得到了空间机构的速度和加速度方程. 研究表明, 由开发的空間机构运动学分析软件, 结合空间 4 杆机构的运动学分析, 验证了建模与求解方法的正确性, 从而为空间运动机构建模与运动学分析提供了一种有效的方法.

关键词: 空间机构; 结构形态; 符号建模; 运动学分析

中图分类号: TH112; TP113.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)05-0099-05

Modeling and Analysis Method of Spatial Mechanism Kinematics

YUAN Qingke¹, JIANG Gedong²

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;

2. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To rapidly and efficiently model and analyze the kinematics characteristics of spatial mechanism kinematics, a computer symbols model and a computational method were proposed based on multi-body dynamics theory. The relationship among the Cartesian coordinates which are built on the joints of each link was utilized to describe the configuration of spatial mechanisms. The link shape matrices were obtained from the relationship between the two coordinate systems on the same link. According to the type and property of joints, the joint constrain matrices were obtained from the relationship between the two coordinate systems of the same joint on the two links. Using these transform matrices on the kinematics chains in series, the mathematical model of spatial mechanisms was developed, and the motion equations of spatial mechanisms were derived. The velocity equations and acceleration equations were obtained by the time first derivatives and second derivatives of the motion equations. Accordingly, a general software was developed for analyzing spatial mechanism kinematics. A spatial four bars mechanism was modeled and analyzed by this software, and the correctness of the proposed method and the software were verified.

Keywords: spatial mechanism; mechanism configuration; symbols modeling; kinematics analysis

在开发通用空间机构动力学计算机自动分析软件时, 遇到的关键问题是如何对空间机构建模, 以计

算机能够理解的方式描述机构的结构形态特征, 使计算机能够自动识别、自动建立机构的运动方程, 以

及自动求解运动方程,并以数字和图形的方式输出结果.目前,常用的方法是机构分组的方法,通过数据文件来表达机构的结构形态,实现机构分析软件的真实通用化和自动化,为此必须建立描述机构的通用方法和专用语言.通过通用方法和专用语言描述各种机构,使计算机能够识别这种描述,并且能够通过这种描述,自动识别机构的结构形态和运动链,自动建立机构运动方程,自动进行求解并输出结果.

Denavit 和 Hartenberg 提出了用于低副机构的描述方法^[1-2].该方法采用了4个基本参数来建立低副机构的数学模型,但是不能用于大多数空间机构的描述.本文在此方法的基础上,结合有关分析方法^[3-9]提出了一种新的空间机构运动建模与分析方法.在空间机构约束运动副处的杆件上建立笛卡尔直角坐标系,开发了描述空间机构结构形态的符号体系,讨论了杆件形状矩阵和约束运动矩阵,在运动链上连续使用变换矩阵,建立了空间机构的运动方程,分析了空间机构的运动学建模与分析方法.在此基础上,开发了通用分析软件,并给出了应用实例.

1 坐标系与符号体系的建立

考虑某一空间机构2个相连接的杆件G、H,如图1所示.对于每个杆件建立2个直角坐标系 $x_jy_jz_j$ 和 $u_jv_jw_j$,对于每个运动副,则形成了2个直角坐标系.例如,在运动副 R_j 处,建立了 $x_jy_jz_j$ 和 $u_jv_jw_j$ 直角坐标系,其中 $x_jy_jz_j$ 固结于G, $u_jv_jw_j$ 固结于H,且2个坐标系的原点重合.这样, $x_jy_jz_j$ 描述了运动副 R_j^- , $u_jv_jw_j$ 描述了运动副 R_j^+ ,而这2个坐标系的相对运动则体现了 R_j 运动量的变化.因此,可以利用2个直角坐标系的相对变化来描述空间机构的运动.

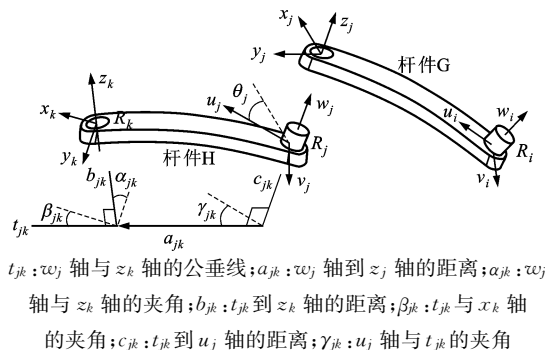


图1 描述空间机构的符号体系

符号体系由6个参数构成,用来描述各杆件运动副处坐标系之间的关系,可以通过这些关系的描

述,来建立机构运动分析的数学模型.对于图1中所示的机构局部,其数学模型 A_{jk} 可以用坐标系 $u_i v_i w_i$ 到 $x_j y_j z_j$ 、 $u_j v_j w_j$,再到 $x_k y_k z_k$ 的变换关系来描述,其符号体系为

$$A_{jk} = \Phi_i(\theta_i) \begin{bmatrix} a_{ij} & \alpha_{ij} \\ b_{ij} & \beta_{ij} \\ c_{ij} & \gamma_{ij} \end{bmatrix} \Phi_j(\theta_j) \begin{bmatrix} a_{jk} & \alpha_{jk} \\ b_{jk} & \beta_{jk} \\ c_{jk} & \gamma_{jk} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: $\Phi_i(\theta_i)$ 和 $\Phi_j(\theta_j)$ 分别是 R_i 和 R_j 的约束矩阵.

对于任何一个空间机构、任意类型的运动副,可以扩展式(1)得到空间机构的统一数学模型

$$A_{jk} = \Phi_i(q_i, r_i) T_{ij} \Phi_j(q_j, r_j) T_{jk} \quad (2)$$

式中: T_{ij} 为杆件形状矩阵; r_j 为运动副特性参数组成的矢量.在运动副处不同杆件上分别建立坐标系的基本准则为:①2个坐标系的原点重合;②2个坐标系的3个坐标轴不能完全重合.

2 杆件的形状矩阵

杆件形状矩阵描述了空间机构中杆件的运动学形状,而不是杆件实体结构形状.由于坐标系固结于杆件上,所以在机构运动过程中,坐标系随杆件一起运动,但相对于杆件是不动的.

用齐次坐标的形式表示空间点矢量,则有

$$\begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ 1 \end{bmatrix} = T_{jk} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

即杆件形状矩阵描述了同一杆件上2个坐标系之间的变换关系.计算 T_{jk} 可以用下面的方法实现:设 $x_k y_k z_k$ 、 $u_j v_j w_j$ 到世界坐标系 $x_0 y_0 z_0$ 的变换矩阵分别为 T_{0k} 和 T_{0j} ,则由式(3)得到

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_{0k} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_{0j} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4),整理后得到

$$\begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ 1 \end{bmatrix} = T_{0j}^{-1} T_{0k} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$T_{jk} = T_{0j}^{-1} T_{0k} \quad (7)$$

3 运动副的约束矩阵

运动副的约束运动可以用该运动副处的2个直角坐标系的相对运动来表示.这2个坐标系的变换矩阵称为运动副的约束矩阵,其元素是运动副的运动变量和运动副的特性参数,通过求解该约束矩阵,即可求得该运动副的运动变量.

例如, $\Phi_j(q_j, r_j)$ 表示坐标系 $u_j v_j w_j$ 到 $x_j y_j z_j$ 之间的坐标变换,反映了该运动副处2杆件的相对约束运动,即

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi_j(q_j, r_j) \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

对于不同约束类型的运动副,其约束矩阵是不同的.在 $\Phi_j(q_j, r_j)$ 中, q_j 为运动副运动变量组成的矢量,其变量数目等于运动副的自由度数(可以是1~5个).例如,如果铰链副和棱柱副只有1个自由度,运动变量也就只有1个,若球铰副和平面副有3个自由度,则运动变量就有3个.铰链副、球铰副等没有特性参数,而齿轮副、螺纹副等有特性参数,分别为齿数比、螺距.例如,图2a所示的球铰副没有特性参数,它有3个自由度,即有3个运动变量,其约束矩阵可由空间几何学原理推导求得

$$\Phi_j(q_j) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 C_3 - S_1 C_2 S_3 & -C_1 S_3 - S_1 C_2 C_3 & S_1 S_2 \\ 0 & S_1 C_3 + C_1 C_2 S_3 & -S_1 S_3 + C_1 C_2 C_3 & -C_1 S_2 \\ 0 & S_2 S_3 & S_2 C_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中

$$q_j = \{\alpha_j, \beta_j, \gamma_j\}$$

$$C_1 = \cos\alpha_j; C_2 = \cos\beta_j; C_3 = \cos\gamma_j$$

$$S_1 = \sin\alpha_j; S_2 = \sin\beta_j; S_3 = \sin\gamma_j$$

$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ 分别是 x_j 与节线、 w_j 与 z_j 及 u_j 与节线的夹角.

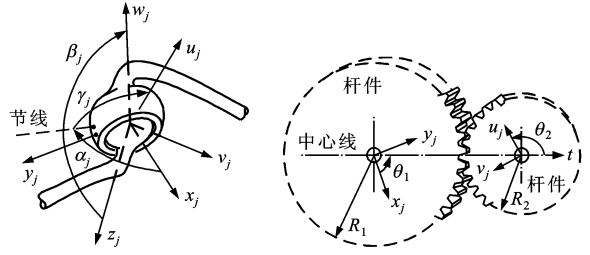
图2b中的齿轮副有1个自由度,即只有1个运动变量,且有1个特性参数,其约束矩阵为

$$\Phi_j(q_j, r_j) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \eta R_2 \cos\theta_2 & \cos(\eta\theta_2) & -\sin(\eta\theta_2) & 0 \\ \eta R_2 \sin\theta_2 & \sin(\eta\theta_2) & \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\eta = 1 + \zeta, q_j = \{\theta_2\}, r_j = \{\xi\}$$

$$\xi = R_1/R_2, \theta_2 = (R_1/R_2)\theta_1$$



(a)球铰副

(b)直齿圆柱齿轮副

α_j : x_j 与节线的夹角; β_j : w_j 与 z_j 的夹角; γ_j : u_j 与节线的夹角; θ_1, θ_2 : 大、小齿轮的转角; R_1, R_2 : 大、小齿轮的半径

图2 运动副的约束矩阵示意图

4 运动方程的建立

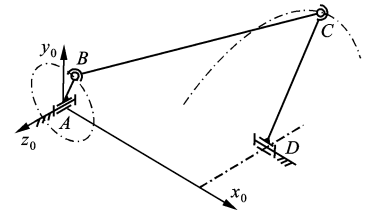
以图3a所示的空间机构(RGGR)为例,说明RGGR运动方程的建立过程.在各运动副处建立的坐标系如图3b和图3c所示.根据图论理论,通过拓扑网络分析,应用基本回路矩阵可以得到该机构的运动链,可用坐标系直观地描述为如图4所示的形式.在该运动链上,连续使用数学模型式(2),可得到该机构的运动方程

$$A_{11} = \Phi_{12}(q_{12}) T_{23} \Phi_{34}(q_{34}) T_{45} \Phi_{56}(q_{56}) \cdot T_{67} \Phi_{78}(q_{78}) T_{81} \quad (11)$$

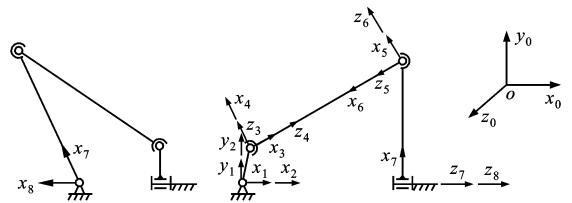
式中: A_{11} 为 4×4 单位矩阵; $j=1, 3, 5, 7$; $k=2, 4, 6, 8$; 运动变量

$$q_{12} = \{\theta_A\}; q_{34} = \{\alpha_B, \beta_B, \gamma_B\}$$

$$q_{56} = \{\alpha_C, \beta_C, \gamma_C\}; q_{78} = \{\theta_D\}$$



(a)空间4杆机构(RGGR机构)



(b)机构右视图

(c)机构正视图

A, B: 曲柄; C, D: 摆杆

图3 空间4杆机构及其坐标系

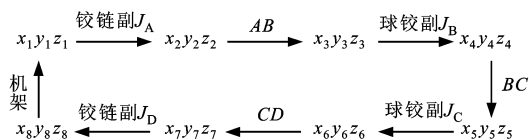


图4 空间4杆机构运动链的坐标系描述

5 运动学分析

若空间机构有 λ 条运动链, t 个运动变量,则运动方程可表示为

$$\mathbf{N}_{6\lambda \times t} \mathbf{q}_{t \times 1} = \mathbf{R}_{6\lambda \times 1} \quad (12)$$

式中: $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{R}$ 为系数矩阵; $\mathbf{q}$ 是由运动变量组成的矢量.若 $\mathbf{N}$ 的秩为 $r(v)$,则空间机构的自由度个数和独立运动变量个数分别为

$$s = t - r(v) \quad (13)$$

$$n = s - m \quad (14)$$

式中: m 为给定运动输入的个数.

求解式(12),便可得到 $\mathbf{q}$ 的值,进而可获得空间机构中任意杆件和运动副的位置.对运动变量求1阶、2阶导数则可求得相应的速度和加速度.设机构的自由度为 n ,对应广义坐标 $f_k (k=1, 2, \dots, n)$,则任一约束变量可表示为

$$q_{ji} = q_{ji}(f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (15)$$

将式(15)对时间求1阶导,得到

$$\dot{q}_{ji} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_{ji}}{\partial f_k} \dot{f}_k \quad (16)$$

将式(15)对时间求2阶导数,则得到

$$\ddot{q}_{ji} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_{ji}}{\partial f_k} \ddot{f}_k + \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 q_{ji}}{\partial f_k \partial f_m} \dot{f}_k \dot{f}_m \quad (17)$$

6 空间机构分析软件与应用

采用空间机构运动学建模方法,开发了空间机构运动学和动力学分析软件(Spatial Mechanism Kinematics & Dynamics Analysis,简称SMKDA),它提供了描述机构的专用语言,并通过该语言来描述机构,使计算机能够理解这种描述,从而识别机构的结构形态,自动求解机构运动链,自动建立机构运动方程,并进行计算、输出结果.

对图3a所示的空间4杆机构进行运动分析,并通过已知条件—— AB 的转动半径为28.4 mm, BC 的长度为475.1 mm, CD 的长度为220 mm, AB 以50 rad/s匀速转动,计算 CD 的摆动角速度 ω .

应用SMKDA语言描述该空间4杆机构的分析程序如下:

SYSTEM=Spatial Four Bar Mechanism

GROUND=AD

REVLOT(AD,AB)=JA

SPHERE(AB,BC)=JB

:

DATA/LINK(DC,JA)=0,0,0/0,0,

100/100,0,0

DATA/LINK(AB,JA)=0,0,0/0,0,

100/100,0,0

:

DATA/POST(JA)=0,10,36

DATA/VELOCITY(JA)=50

:

PRINT/VELOCITY(JD)

EXECUTE

FINISH

SMKDA语言由3大类语句构成:①定义语句,用来定义杆件、运动副等;②数据语句,用来定义各坐标系、定义运动输入等;③请求语句,用来控制程序的执行、定义输出等.在SMKDA语言中,运动输入可以是一个常用数学函数,也可以是用户自定义的函数.自定义函数包括:①常数项;②瞬时量DELTA;③突变量STEP;④正比项RAMP;⑤正弦函数等.如图5所示,可在分析程序中加入定义语句:2-2*STEP*DELAY(2)+2*cos(1.5708*T)*DELAY.

在SMKDA软件环境下,将用SMKDA语言编写的机构运动描述与分析程序提交计算机,SMKDA软件自动完成分析过程,并输出分析结果,如图6所示.图6反映了摆杆的 ω 随曲柄转角 θ 的变化关系.图6的分析结果与用解析法求解得到的结果是一致的.

图7a是某一工程机械中的曲柄齿轮摆动机构,在设计开发过程中,为确定该机构的尺寸及有关运动参数,应用SMKDA对该机构进行了运动学分析,最终确定了合理的尺寸参数,获得了满意的设计方案.图7b的分析结果,反映了齿轮的摆动角 θ_B 随OA转角 θ_{OA} 的变化关系.

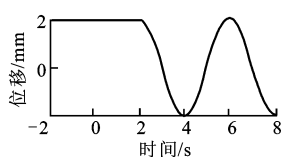


图5 自定义函数

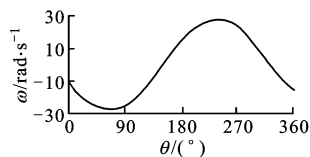
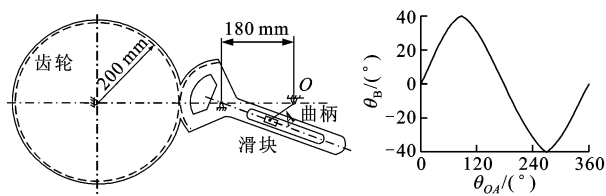


图6 空间4杆机构的分析结果



(a)机构简图 (b)分析结果
图 7 曲柄齿轮摆动机构与分析结果

7 结束语

本文运用空间机构分析的直角坐标系法,以及描述机构的符号体系,在空间机构约束运动副处的不同杆件上分别建立了直角坐标系,通过 2 个坐标系的变换关系描述了运动副的约束运动情况.利用同一杆件上的 2 个坐标系之间的关系,描述了杆件的运动学形状,揭示了这一关系在运动过程中是不变的.通过在机构运动链上连续使用坐标系和符号体系,建立了空间机构的运动方程,在此基础上开发了通用分析软件,通过工程实例验证了本文所述理论与方法的正确性.将该软件初步实现了商品化,为工程应用提供了一种新的方法和实用工具.

参考文献:

[1] BI Z M, ZHANG W J, CHEN I M, et al. Automated generation of the D-H parameters for configuration design of modular manipulators [J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2007, 23(5): 553-562.

[2] 王存堂,周天悦. 基于 D-H 矩阵的径向柱塞泵的运动学分析 [J]. 拖拉机与农用运输车, 2008, 35(3): 74-76.

WANG Cuntang, ZHOU Tianyue. Kinematic analysis of radial piston pump based on D-H matrix [J]. Tractor & Farm Transporter, 2008, 35(3): 74-76.

[3] 朱拥勇,王德石. 基于封闭矩阵方程的空间摆盘机构运动学分析 [J]. 机械设计, 2006, 23(2): 57-59.

ZHU Yongyong, WANG Deshi. Dynamics analysis of spatial swinging plate mechanism based on closed matrix equation [J]. Journal of Machine Design, 2006, 23(2): 57-59.

[4] ARSENAULT M, GOSSELIN C M. Kinematic static and dynamic analysis of a planar 2-DOF tensegrity mechanism [J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41: 1072-1089.

[5] YANG Jingzhou, KARIM A M. Design propagation in kinematics of mechanical systems [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42: 807-824.

[6] YAO Qing, DONG Jingyan, FERREIRA P M. A novel parallel-kinematics mechanism for integrated, multi-axis nanopositioning part 1: kinematics and design for fabrication [J]. Precision Engineering, 2008, 32: 7-19.

[7] DONG Jingyan, YAO Qing, FERREIRA P M. A novel parallel-kinematics mechanism for integrated, multi-axis nanopositioning part 2: dynamics control and performance analysis [J]. Precision Engineering, 2008, 32: 20-33.

[8] 刘玉斌,赵杰,杨永刚,等. 6-PRRS 并联机器人正逆奇异性研究 [J]. 西安交通大学学报, 2007, 41(8): 922-926.

LIU Yubin, ZHAO Jie, YANG Yonggang, et al. Study on forward and inverse singularity of a 6-PRRS parallel robot [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, 41(8): 922-926.

[9] 黄昔光,廖启征,魏世民,等. 基于 Groebner-Sylvester 法的一般 6-6 型台体并联机构位置正解 [J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(3): 300-303.

HUANG Xiguang, LIAO Qizheng, WEI Shimin, et al. Forward kinematics of general 6-6 Stewart mechanisms based on Groebner-Sylvester approach [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42(3): 300-303.

(编辑 管咏梅)