

尺度核函数在最小二乘支持向量机 信号逼近中的应用

穆向阳^{1,2}, 张太镒¹, 周亚同³

(1. 西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安; 2. 西安石油大学电子工程学院, 710065, 西安;
3. 河北工业大学信息工程学院, 300401, 天津)

摘要: 针对目前常采用高斯核的最小二乘支持向量机(LS-SVM)不能对信号多尺度逼近的问题, 提出一种采用尺度核的 LS-SVM. 首先, 在再生核希尔伯特空间的框架下构建了一种点积型的尺度核函数, 它满足 Mercer 条件, 并具备平移和扩张的特性, 是尺度子空间的一组完备的基. 然后, 利用拉格朗日乘子法求解 LS-SVM 逼近的约束规划问题, 在结构风险最小化逼近准则下获得了逼近系数. 与传统核函数相比, 采用尺度核的 LS-SVM 可以实现多尺度逼近任意信号, 且应用时仅需对尺度参数调节选优, 简便、实用. 实验结果表明: 所提算法的逼近性能与小波核性能相当; 与传统的高斯核函数相比, 其均方根误差提高 8.4%.

关键词: 最小二乘支持向量机; 尺度核; 信号逼近

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)12-1464-04

Application of a Scaling Kernel in Signal Approximation of Least Squares Support Vector Machines

MU Xiangyang^{1,2}, ZHANG Taiyi¹, ZHOU Yatong³

(1. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China, 2. School of Electronic Engineering, Xi'an Shiyu University, Xi'an 710065, China, 3. School of Information Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: In order to overcome the problem that the least square support vector machines (LS-SVM) using Gaussian kernel cannot approximate arbitrary signal with multi-scale, a scaling kernel for LS-SVM is proposed. The scaling kernel in dot-product type is constructed under the framework of reproducing kernel Hilbert spaces. The kernel satisfies the Mercer condition, has the characteristic of dilation and translation, and forms a set of complete bases in the scale subspace. Then the Lagrangian multiplier is used to obtain the approximation coefficients under the criterion of structure risk minimization by solving the constrained programming of LS-SVM in signal approximation. The LS-SVM with scaling kernel can approximate arbitrary signal with multi-scale, and the proposed algorithm is promising in application since only one free parameter is adjusted for optimization. Simulation results show that the approximation performance of the scaling kernel is similar to the wavelet kernel; and compared with the traditional Gaussian kernel, the normalized root mean squared error increases about 8.4%.

Keywords: least squares support vector machine; scaling kernel; signal approximation

最小二乘支持向量机(LS-SVM)的性能在很大程度上受到所选核函数类型的影响^[1-3]. 实际应用中,使用最多的是高斯(径向基)核,但采用这种核的LS-SVM存在两点缺陷:一是径向基不是一个完备基,不能对任意信号逼近;二是不能进行多尺度信号逼近. 近几年来对于小波核以及多尺度核研究成为热点^[4-10]. 文献[4-5]提出了一种小波核支持向量机,文献[6]在 Sobolev 空间提出了构建尺度再生核的方法,文献[7]设计了一种小波核并应用到函数回归中. 借鉴上述思路^[8-10],本文在再生核希尔伯特空间框架下提出一种最小二乘支持向量机的尺度核函数构建方法,其尺度核由具有平移和扩张特性的尺度函数构成,是一组完备的基. 作为一种点积型的核函数,本文证明了它满足 Mercer 条件,可以作为支持向量机的核函数使用,在实际应用过程中仅需调节尺度参数,简便、实用. 实验结果表明:与传统的核函数相比,采用尺度核的 LS-SVM 可以逼近任意信号,实现了多尺度信号逼近.

1 最小二乘支持向量信号逼近

假设数据集 $D=\{(x_n, t_n), n=1, \dots, N\}$ 是信号 $f(x)$ 进行随机采样后的集合,考虑到测量过程噪声存在,一般数据集表示为

$$t_n = f(x_n) + \epsilon_n \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

式中: ϵ_n 为独立理想、独立分布的随机变量.

利用最小二乘法可以解决上述函数的逼近问题,通常借助非线性映射 φ 将数据集映射到特征空间 F ,在此定义

$$f(x) = \mathbf{w}^T \varphi(x) + b \quad (2)$$

式中: $\mathbf{w}$ 为权向量; b 表示偏差. 为求得 $\mathbf{w}$ 和 b , 设

$$\min_{\mathbf{w}, b, e} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + \frac{C}{2} \sum_{n=1}^N \xi_n^2 \quad (3)$$

满足下面等式的约束

$$t_n - \mathbf{w}^T \varphi(x_n) - b = \xi_n \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

式中: ξ_n 为误差变量; C 为正则化因子; ξ_n^2 为最小二乘损失函数.

定义拉格朗日函数

$$\min G(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + \frac{C}{2} \sum_{n=1}^N \xi_n^2 + \sum_{n=1}^N \alpha_n (t_n - \mathbf{w}^T \varphi(x_n) - b - \xi_n) \quad (5)$$

式中: α_n 为可正可负的拉格朗日乘子. 在对偶空间经过最优化可以获得一个线性系统

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \boldsymbol{\chi}^T \boldsymbol{\chi} + C^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{T} = [t_1, t_2, \dots, t_N]^T$; $\boldsymbol{\chi} = [\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_N)]$; $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$; $\mathbf{L} = [1, 1, \dots, 1]^T$

$$\mathbf{w} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi(x_n) \quad (7)$$

最后将式(7)带入式(2)可得

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n K(x_n, x) + b \quad (8)$$

式中: 函数 $K(x_n, x)$ 是特征空间的正定核.

2 多尺度核的构建

2.1 构建再生核希尔伯特空间

核方法是在特征空间中实施的,因此特征空间直接决定了核函数的性能. 再生核希尔伯特空间(RKHS)是具有特殊性质的希尔伯特空间,在信号逼近中起重要作用. 这里首先概要介绍一种基于小波 RKHS 的构建,从中引出尺度核. 假设 $\phi(x)$ 是一实连续尺度函数^[4,6,8]

$$\left. \begin{aligned} \phi(x) &= O(|x|^{-1-\tau}) \quad x \rightarrow \pm \infty, x \in \mathbf{R} \\ \phi(\Omega) &= \sum_n \phi(n) \exp(-j2\pi\Omega n) \neq 0 \quad \Omega \in \mathbf{R} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

而 $\{\phi(x-k)\}$ 由平方可积空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的子集 V_0 的正交集转化而成. 假设闭子集 $L^2(\mathbf{R})$ 的联合多分辨率分析(MSA) $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 存在且满足

$$\begin{aligned} \dots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset \dots \subset L^2(\mathbf{R}) \\ f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \\ \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(\mathbf{R}), \quad \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \emptyset \end{aligned} \quad (10)$$

文献[8]指出在弱假设条件式(6)和式(7)下,每一个多分辨率子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 均为 RKHS.

2.2 尺度核的建立

著名的莫尔定理表明:任意 RKHS 都存在一个惟一的再生核,反之亦然^[8,11]. 对于基于小波核的希尔伯特空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$,我们引入一个相应的尺度核

$$K_j(x, y) = \sum_k 2^{-j} \phi(2^{-j}x - k) \phi(2^{-j}y - k) \quad (11)$$

式(11)的尺度核属于一种点积型的核函数,那么该点积型核能否满足 Mercer 条件,取决于 $k_j(x, y)$ 的性质. 假设对于任意 $\forall g(x) \in L^2(\mathbf{R})$, 有

$$\begin{aligned} \iint K_j(x, y) g(x) \overline{g(y)} dx dy = \\ \iint \sum_k 2^{-j} \phi(2^{-j}x - k) \phi(2^{-j}y - k) g(x) \overline{g(y)} dx dy = \\ \iint \sum_k 2^{-j} \phi(2^{-j}x - k) g(x) \overline{\phi(2^{-j}y - k) g(y)} dx dy = \end{aligned}$$

$$\sum_k 2^{-j} \iint \phi(2^{-j}x - k)g(x) \overline{\phi(2^{-j}y - k)g(y)} dx dy = \sum_k 2^{-j} \left| \int \phi(2^{-j}x - k)g(x) dx \right|^2 \geq 0$$

从而证明了内积 $K_j(x, y)$ 符合可容许条件, 因此这种点积型的核函数满足 Mercer 条件, 完全可以作为支持向量机的核函数使用. 实际上, 式(11)尺度核函数是具有平移因子的多维尺度函数, 是一组完备的基.

2.3 最优尺度 j 的选择

从式(11)可以看出, 尺度核仅有一个自由参数, 即尺度 j 需要调节, 这是一个典型的模型选择问题, 可利用集合校验或者数据重新采样技巧, 如交叉验证和步步为营法, 有时也可基于结构风险最小化理论, 通过预测泛化误差的上界来实施选择^[12]. 为简单起见, 在本文中最优尺度 j 通过交叉验证来取得. 这里我们所选的函数 ϕ 是不同阶的 Daubechies 小波所对应的尺度函数.

3 具有尺度核的 LS-SVM

在 LS-SVM 中采用式(11)的尺度核作为核函数, 便可在尺度子空间 V_j 寻求下面逼近式

$$f_j(x) = \sum_k c_k^{(j)} \phi_{jk}(x) + b^{(j)} \tag{12}$$

为了逼近函数 $f_j(x)$, 式(3)可以改写为

$$\min_{w,b,e} \frac{1}{2} \|f_j\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{C}{2} \sum_{n=1}^N \xi_n^2 \tag{13}$$

式中: $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ 表示在 RKHS 定义的 H 范数.

由文献[8]可得

$$\|f_j\|_{\mathbb{H}}^2 = \sum_k c_k^{(j)2} \tag{14}$$

将式(14)代入式(13), 其优化问题变为

$$\min_{w,b,e} \frac{1}{2} \sum_k c_k^{(j)2} + \frac{C}{2} \sum_{n=1}^N \xi_n^2 \tag{15}$$

式(15)服从下式约束

$$t_n - \mathbf{w}^T \varphi(x_n) - b^{(j)} = \xi_n \quad n = 1, 2, \dots, N \tag{16}$$

利用拉格朗日乘子技巧, 可解决上述约束优化问题, 定义

$$G = \frac{1}{2} \sum_k c_k^{(j)2} + \frac{C}{2} \sum_{n=1}^N \xi_n^2 + \sum_{n=1}^N \alpha_n^{(j)} (t_n - f_j(x_n) - \xi_n) \tag{17}$$

式中: $\alpha_n^{(j)}$ 为尺度 j 的拉格朗日乘子; 系数 $c_k^{(j)}$ 可以通过分别求导获得, 即

$$\frac{\partial G}{\partial c_k^{(j)}} = 0 \Rightarrow c_k^{(j)} = \sum_{n=1}^N \alpha_n^{(j)} \varphi_{jk}(x_n) \tag{18}$$

再将式(18)代入式(12)得

$$f_j(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n^{(j)} K_j(x, x_n) + b^{(j)} \tag{19}$$

这里的核函数就是通过式(11)取得的尺度核函数.

4 实验结果

4.1 与其他类型核函数的比较

为了验证尺度核的性能和效果, 本实验选择高斯(径向基)核和小波核 2 种核函数进行比较, 其中高斯(径向基)核选取

$$K(x, y) = \exp(-\beta(x - y)^2)$$

而小波核采用文献[4]提出的形式. 为了说明本文提出尺度核的效果, 逼近信号也选用文献[4]所使用的信号

$$f(x) = \begin{cases} -2.186x - 12.864 & -10 \leq x < -2 \\ 4.246x & -2 \leq x < 0 \\ 10e^{-0.05x-0.5} \sin((0.03x + 0.7)x) & 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

实验过程中, 我们以规一化均方根误差(E_{NRMS})作为评价信号逼近精度的标准, E_{NRMS} 定义为

$$E_{\text{NRMS}} = \left[\frac{\sum_{n=1}^N (t_n - f(x_n))^2}{\sum_{n=1}^N (t_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_n)^2} \right]^{1/2}$$

实验数据集 $D = \{(x_n, t_n), n = 1, \dots, N\}$ 的产生: 从 $[-10, 10]$ 均匀抽取了 148 个样本点, 其中个 74 作为训练样本, 其余为测试样本.

对式(11)的尺度核, 我们选择的函数 ϕ 采用 2 阶 Daubechies (DB) 小波所对应的尺度函数, 同时最优尺度 j 通过 5 折交叉校验确定, 表 1 分别列出了本文提出的尺度核与其他类型核函数在数据集上的评价结果.

表 1 本文尺度核与其他核逼近函数的评价结果比较

核函数类型	E_{NRMS}
高斯(径向基)核	0.051 2
小波核	0.045 7
本文尺度核	0.047 2

从表 1 可以看出, 本文提出的尺度核性能与小波核相当, 与高斯(径向基)核函数相比, 性能占优.

4.2 多尺度信号逼近

为了检验具有尺度核的最小二乘支持向量机对信号多尺度的逼近能力, 选择如图 1a 所示的某段信号为待逼近信号, 实验过程中共采集样本 180 个, 函

数 ϕ 选用 2 阶 Daubechies (DB) 小波所对应的尺度函数,正则化因子根据经验设定为 $C=10^4$,不同尺度信号逼近的结果如图 1b~图 1d 所示。

从图 1 可以看出,对于给定信号,在不同分辨率水平下,采用尺度核的 LS-SVM 可实现分层多尺度函数逼近,在不同尺度下,通常能够刻画不同信号结构的特点。

5 结 论

采用传统的核函数如多项式核、径向基核函数的 LS-SVM 有许多局限性,本文借鉴函数的多尺度表示和小波变换的思路,提出一种新型的核函数,即在再生核希尔伯特空间(RKHS)上构建了一种点积型尺度核函数,它具有平移和扩张的特性,是一组完

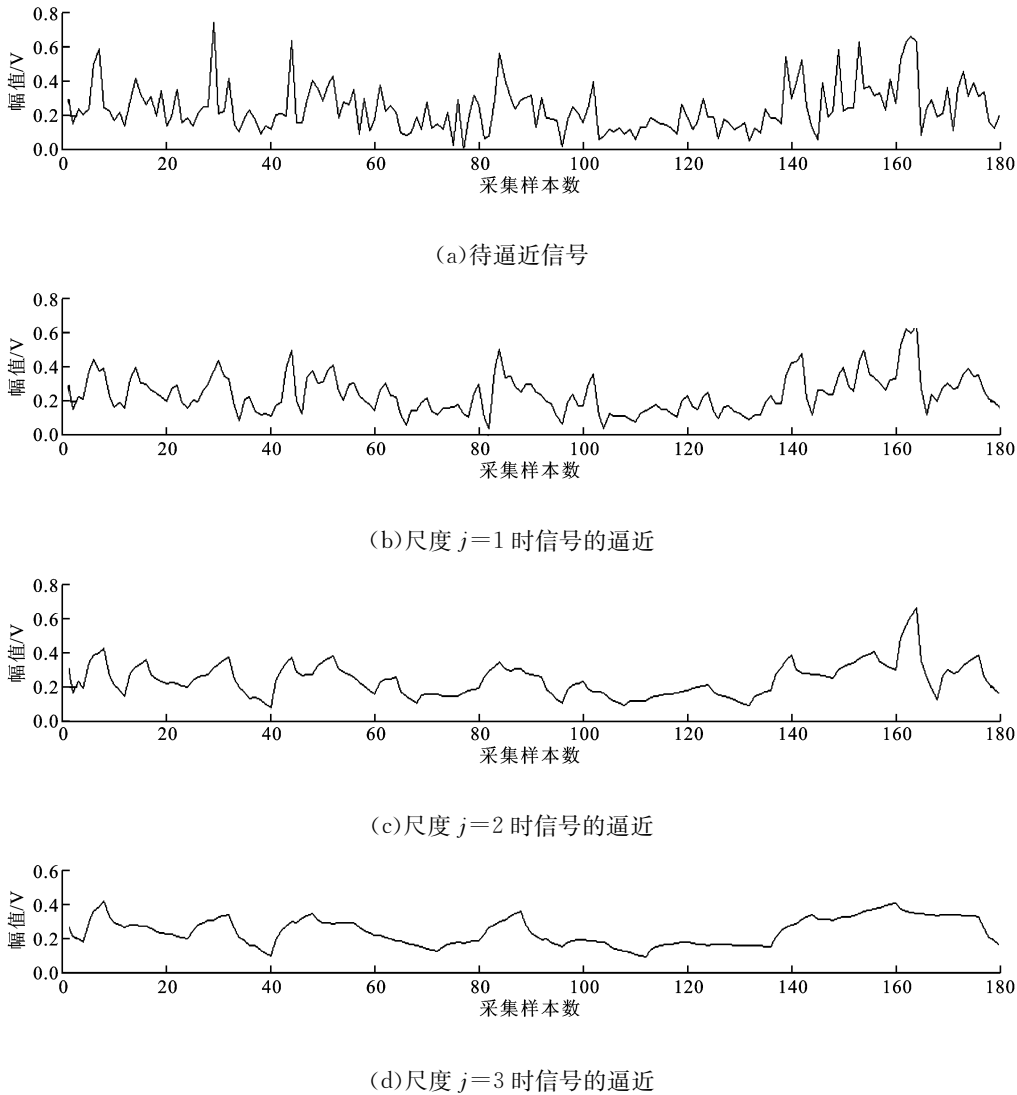


图 1 不同尺度 j 的信号逼近

备的基.实际应用过程仅需调节尺度参数,方法简便、实用.仿真实验表明,具有尺度核的 LS-SVM 可完成多尺度逼近任意信号,且能够取得较好的逼近性能。

参考文献:

[1] MULLER K R, MIKA S, RATSCH G, et al. An in-

troductio to kernel-based learning algorithms [J]. IEEE Trans Neural Networks, 2001, 12(2): 181-201.
[2] CRISTIANINI N, TAYLOR J S. An introduction to support vector machines and other kernel-based learning methods[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
[3] SUYKENS J A K, GESTEL T V, BRABANTER J D,

- et al. Least squares support vector machines [M]. Singapore: World Scientific Pub Co. , 2002.
- [4] ZHANG Li, ZHOU Weida, JIAO Licheng. Wavelet support vector machine [J]. IEEE Trans System, Man, Cybernetics, 2003, 34(1): 34-39
- [5] 周伟达. 核机器学习方法研究[D]. 西安: 西安电子科技大学电子工程学院, 2003.
- [6] OPFER R. Tight frame expansions of multiscale reproducing kernels in Sobolev spaces[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2006, 20(1): 357-374.
- [7] AMATO U, ANTONIADIS A, PENSKEY M. Wavelet kernel penalized estimation for non-equispaced design regression [J]. Statistics and Computing, 2006, 16(1): 37-55.
- [8] RAKOTOMAMONJY A, CANU S. Frame, reproducing kernel, regularization and learning [J]. Journal of Machine Learning Research, 2005, 6(12): 1485-1515.
- [9] WALTER G G. A sample theorem for wavelet subspaces [J]. IEEE Trans Information Theory, 1992, 38(2): 881-884.
- [10] MALLAT S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation [J]. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 1989, 11(7): 674-693.
- [11] GIROSI F. An equivalence between sparse approximation and support vector machines [J]. Neural Computation, 1998, 10(6): 1455-1480.
- [12] CHAPELLE O, VAPNIK V. Model selection for support vector machines [M]//Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2000: 349-355.

(编辑 刘杨)