

超声衍射层析成像的高精度核卷积插值重建算法

方杰^{1,2}, 韦穗¹, 霍修坤¹

(1. 安徽大学安徽省现代成像与显示技术重点实验室, 230039, 合肥;

2. 皖西学院机械与电子工程系, 237009, 安徽六安)

摘要: 针对超声衍射层析成像传统采用的双线性插值法重建精度不高的问题, 提出一种高精度的核卷积插值重建算法. 首先, 根据标准的 sheep and Logan 体模算出重建数据点的值, 再选用最小二乘非均匀快速傅里叶变换(LS-NUFFT)算法里的核矩阵作为卷积核, 并用此核矩阵将非笛卡儿分布的重建数据点插值到笛卡儿网格内, 最后用二维的傅里叶逆变换完成图像的重建. 与双线性插值法和高斯核卷积法相比较, LS-NUFFT 核矩阵法所得重建图像的 2-范数误差比双线性法减少了 40% 以上, 重建时间比高斯核卷积法减少约 50%.

关键词: 衍射层析成像; 非均匀快速傅里叶变换; 核矩阵

中图分类号: TN911.72 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)10-0094-05

An Accurate Reconstruction Algorithm in Diffraction Ultrasound Tomography Using Kernel Convolution Interpolation

FANG Jie^{1,2}, WEI Sui¹, HUO Xiukun¹

(1. Anhui Modern Imagery and Display Technique Key Laboratory, Anhui University, Hefei 230039, China;

2. Mechanical and Electronic Engineering Department, West Anhui University, Lu'an, Anhui 237009, China)

Abstract: To overcome the shortage of the conventional bilinear method in diffraction ultrasound tomography reconstruction, an accurate reconstruction algorithm is proposed by using kernel convolution interpolation. The first step of the algorithm calculates the reconstruction data by Shepp and Logan, and the kernel matrix obtained in the least squares nonuniform fast Fourier transform (LS-NUFFT) algorithm is used for the convolution kernel. Then the kernel matrix is used to interpolate the non-Cartesian sampling reconstruction data into the Cartesian grid. The image reconstruction is finally fulfilled by 2-dimensional IFFT. Comparisons with the bilinear method and the Gauss kernel convolution method show that, the reconstruction error in 2-norm is reduced more 40% than the bilinear method, and that the reconstruction time is shortened about 50% compared with the Gauss kernel convolution method.

Keywords: diffraction tomography; nonuniform fast Fourier transform; kernel matrix

超声衍射层析成像频域重建算法具有算法简单、运算量小的优点, 但在频域法重建过程中为了运用快速傅里叶变换, 需要将非均匀分布的重建数据插值到笛卡尔坐标下. 频域法中传统的双线性法^[1]在插值过程中引入的误差较大, 故重建的精度不高.

为了解决这个问题, BRONSTEIN 等人^[2-3]在频域内通过使用迭代求解非均匀傅里叶逆变换的方法来实现衍射层析成像的重建, 该方法在一定程度上改善了成像的质量, 但迭代运算使重建的运算量大大增加. 非均匀快速傅里叶变换算法(NUFFT)^[4]在一

定程度上减少了运算量,但该算法的误差较大. 1998 年, Liu 和 Nguyen^[5-6] 在一维范畴内提出最小二乘非均匀快速傅里叶变换算法 (LS-NUFFT), 减少了 NUFFT 算法的运算量. 此后, LS-NUFFT 算法被运用于核磁图像的重建中^[7-10], 取得了很高的重建精度, 但该算法需要在频域内过采样, 从而增加了运算量.

本文提出了一种高精度的核卷积插值重建算法, 通过与笛卡尔网格几个临近的数据点和核函数进行卷积运算的方法实现插值, 不需要在频域内过采样即可获得较高的插值精度. 本文算法先采用高斯核函数和 LS-NUFFT 核矩阵将非笛卡尔分布的数据点插值到笛卡尔网格内, 再采用二维的傅里叶逆变换完成图像的重建. 仿真结果表明, 重建图像的 2-范数误差比双线性法减少了 40% 以上, 重建时间比高斯核卷积法减少约 50%.

1 超声衍射层析成像原理及其重建算法

1.1 重建数据的获取

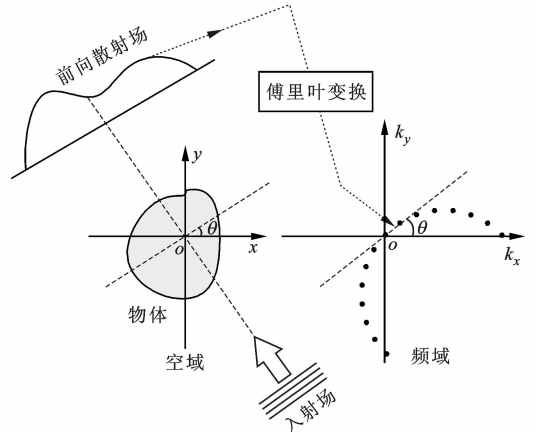
超声衍射层析成像的理论基础是傅里叶衍射投影定理, 其表达式为^[1,9]

$$F\{u_\theta(r)\}(k) = F\{o(x, y)\}(k_x, k_y) \quad (1)$$

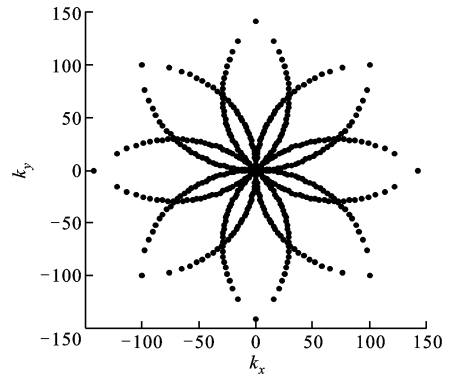
式中: $F\{\cdot\}$ 表示傅里叶变换; $u_\theta(r)$ 为前向散射场 (其中 r 为超声波换能器到接收端的距离, θ 为投影方向); $o(x, y) = K_0^2[n^2(x, y) - 1]$ 为重建对象, 是反映物体内部折射系数变化的函数, 其中 K_0 为入射声波波数, $n(x, y)$ 为物体内部折射系数; k_x, k_y 为重建数据的复平面坐标, $k_x = k \cos \theta - ((K_0^2 - k^2)^{1/2} - K_0^2) \sin \theta$, $k_y = k \sin \theta + ((K_0^2 - k^2)^{1/2} - K_0^2) \cos \theta$, 其中 $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, $\theta = \arctan(k_y/k_x)$.

图 1a 为傅里叶衍射投影定理的原理图, 可将此定理描述为: 平面超声波从不同角度照射物体得到前向散射场 $u_\theta(r)$, 对 $u_\theta(r)$ 做傅里叶变换, 得到对应于 $o(x, y)$ 的二维傅里叶变换在复平面上半径为 K_0 的半圆弧上的值^[2-3]. 图 1b 是 $o(x, y)$ 经过 8 次投影的数据在复平面上的分布, 若从不同方向进行多次投影, 就可以在复平面获得足够多的数据, 然后用傅里叶逆变换完成重建.

仿真用 64×64 的 Shepp and Logan 体模来计算重建数据, 该体模由 10 个不同的椭圆组成. 用体模中的灰度值代表物体内部超声波折射系数, 根据式 (2) 计算每个椭圆的傅里叶变换^[3], 再根据式



(a) 傅里叶衍射投影定理示意图



(b) 8 次投影数据的傅里叶变换在复平面上的分布

图 1 傅里叶衍射投影定理及其投影数据的傅里叶变换在复平面上的分布图

(3) 计算整个体模的傅里叶变换. 将计算所得的在复平面上呈半圆弧状分布的数据, 作为仿真的重建数据.

$$E_i(k_{xp}, k_{yp}) = \rho \exp(-i(k_{xp}x_0 + k_{yp}y_0)) A J_1 \cdot \{B[(k_{xp} \cos \alpha + k_{yp} \sin \alpha) A/B]^2 + (-k_{xp} \sin \alpha + k_{yp} \cos \alpha)^2\}^{1/2} / [((k_{xp} \cos \alpha + k_{yp} \sin \alpha) A/B)^2 + (-k_{xp} \sin \alpha + k_{yp} \cos \alpha)^2]^{1/2} \quad (2)$$

$$E(k_{xp}, k_{yp}) = \sum_{i=0}^N E_i(k_{xp}, k_{yp}) \quad (3)$$

式中: ρ 为椭圆的灰度值; α 为椭圆的倾斜角; A, B 分别为椭圆的长轴和短轴的长度; J_1 为一阶贝塞尔函数. 重建后图像的误差用基于 2-范数的误差 E_2 来表示, 同时为了更能说明问题, 再定义一个基于 ∞ -范数的误差 E_∞ , 如下式所示

$$E_2 = \frac{\|I_r - I\|_2}{\|I\|_2} \quad (4)$$

$$E_\infty = \frac{\|I_r - I\|_\infty}{\|I\|_\infty} \quad (5)$$

式中: I 为标准体模图; I_r 为重建的图像.

1.2 直接傅里叶重建算法

将 $u_\theta(r)$ 经过傅里叶变换得到的 M 个数据对应地存放在一个一维数组 S_p 中, 其中 $p=1, \dots, M$, 将 k_x, k_y 对应的 M 个复坐标位置记为 k_{xp}, k_{yp} , 理论上可以用直接傅里叶逆变换精确地重建出图像

$$I(x, y) = \sum_{p=1}^M S_p D_p \exp(i2\pi x k_{xp}) \exp(i2\pi y k_{yp}) \quad (6)$$

式中: $I(x, y)$ 为重建后图像; D_p 为密度补偿值. 由于 S_p 是在复平面上非均匀分布的, 不能用快速傅里叶逆变换 (IFFT) 实现重建, 所以这种直接傅里叶逆变换算法的复杂度为 $O(MN^2)$, 实际重建数据点数 M 是一个与图像像素 N^2 相当的数, 故复杂度可近似为 $O(N^4)$, 运算量相当大.

1.3 核卷积插值重建算法

为了降低式 (6) 的运算量, 传统的做法是用双线性插值法将其插值到笛卡尔坐标下, 然后用 IFFT 完成重建, 该方法插值精度不高, 故重建的图像误差较大. 本文方法是通过选择合适的核函数, 通过与笛卡尔网格几个临近的数据点和核函数进行卷积运算的方法实现插值, 具有很高的插值精度. 选用合适的核函数 ρ_1, ρ_2 和标尺函数 $s_c(x), s_c(y)$, 式 (6) 中的 $\exp(i2\pi x k_{xp})$ 和 $\exp(i2\pi y k_{yp})$ 可以表示成

$$\exp(i2\pi x k_{xp}) = \frac{1}{s_c(x)} \sum_{j_1=-q/2}^{q/2} \rho_1(j_1, k_{xp}) \cdot \exp(i2\pi x ([mk_{xp}] + j_1)/m) \quad (7)$$

$$\exp(i2\pi y k_{yp}) = \frac{1}{s_c(y)} \sum_{j_2=-q/2}^{q/2} \rho_2(j_2, k_{yp}) \cdot \exp(i2\pi y ([mk_{yp}] + j_2)/m) \quad (8)$$

式中: j_1, j_2 分别为插值核在 x 和 y 方向插值的位置坐标; $[\cdot]$ 表示取与括号里面的值最临近的整数; m 表示视场的标尺, 如 m 设置成 2, 相当于将图像的视场加倍; q 相当于传统网格化插值的窗宽, 每个非均匀样点处的参与插值的样点数为 $q+1$.

令 $k_1 = [mk_{xp}] + j_1, k_2 = [mk_{yp}] + j_2$. 式 (7) 右边可以看成在笛卡尔坐标系下, 坐标 (k_1, k_2) 值的傅里叶逆变换, 再加上缩放因子, 可改写成

$$I(x, y) = (s_c(x) s_c(y))^{-1} \sum_{k_1=-mN/2}^{mN/2-1} \sum_{k_2=-mN/2}^{mN/2-1} \tau_{k_1, k_2} \cdot \exp(i2\pi(xk_1 + yk_2)/m) \quad (9)$$

式中: τ_{k_1, k_2} 为经过密度补偿的 k 空间数据 $\sum S_p D_p$ 与核函数 $\sum \rho_1(j_1, k_{xp}) \rho_2(j_2, k_{yp})$ 的卷积结果

$$\tau_{k_1, k_2} = \sum_{[mk_{xp}] + j_1 = k_1} \sum_{[mk_{yp}] + j_2 = k_2} S_p D_p \rho_1(j_1, k_{xp}) \rho_2(j_2, k_{yp}) \quad (10)$$

综上, 可以将核卷积重建算法归纳为如下几步:

①根据傅里叶衍射投影定理, 获得 k_{xp}, k_{yp} 及其对应的投影数据 S_p ; ②产生 k_{xp}, k_{yp} 的核函数 ρ_1, ρ_2 和标尺函数 s_c ; ③用 Voronoi 法^[11]对 S_p 密度补偿后的重建数据和核 ρ_1, ρ_2 进行卷积; ④对 τ_{k_1, k_2} 进行二维傅里叶逆变换; ⑤将傅里叶逆变换后的结果用 $(s_c(x) s_c(y))^{-1}$ 进行缩放.

接下来就是核的选取问题. 根据 Liu 和 Nguyen 提出的 LS-NUFFT 算法^[5-6], 在一维范畴内首先给出构成核矩阵的尺度因子, 然后通过一种规则傅里叶矩阵来求解一组核矩阵的最小二乘解. 他们提供了 3 种方案, 根据实验结果^[6]得出采用余弦尺度因子的 NUFFT 算法的误差最小, 并且能够求出核矩阵的闭形式, 故能很容易求出该核矩阵.

若选用余弦标尺 $s_c = \cos(\pi x/mN)$, 则 $(q+1) \times M$ 核矩阵可以写成^[5-6]

$$\rho(j, c_p) = G(j, k) a(k, c_p) \\ j, k = -\frac{q}{2}, \dots, \frac{q}{2}; \quad p = 1, \dots, M \quad (11)$$

式中

$$\alpha(k, c_p) = i \frac{\sin[\pi(2k+1-2\{mc_p\})/(2m)]}{1 - \exp(i\pi(2\{mc_p\}-2k-1)/(Nm))} + \\ i \frac{\sin[\pi(2k-1-2\{mc_p\})/(2m)]}{1 - \exp(i\pi(2\{mc_p\}-2k-1)/(Nm))} \\ \{mc_p\} = mc_p - [mc_p] \\ G(j, k) = \begin{cases} N & j = k \\ \frac{-2i \sin(\pi(j-k)/m)}{1 - \exp(i2\pi(j-k)/mN)} & j \neq k \end{cases}$$

另外, 为了验证式 (11) 所示的插值核矩阵具有精确性和高效性, 本文选用文献[4]提出的 NUFFT 算法中用到的高斯核函数作为核卷积算法的插值核, 该高斯核函数的表达式为

$$\rho(c_p) = (2(b\pi)^{1/2})^{-1} \exp(-(mc_p - [mc_p])^2/4b) \quad (12)$$

式中: $b > 1/2$; q 为大于 $4b\pi$ 的整数.

1.4 核卷积插值重建算法的复杂度

本文重建算法的复杂度主要由 2 部分组成: ①二维 IFFT 的复杂度为 $O((mN)^2 \lg(mN))$; ②核卷积插值运算的复杂度为 $O(q^2 M)$. 算法总的复杂度为 $O((mN)^2 \lg(mN) + q^2 M)$. 双线性插值法算法的复杂度为 $O(2N^2 \lg N + kN)$ (k 通常为 $3 \sim 6$). 本文算法的复杂度比双线性插值法的要高, 但选择较小的 q 值可以降低本文算法的复杂度.

2 仿真实验

仿真实验的硬件设备是 Pentium(R) D CPU

2.80 GHz, 软件版本是 Matlab7.0, 操作系统为 Windows XP.

LS-NUFFT 核矩阵的大小为 $(q+1) \times M$, 下面的仿真是来讨论具有最佳重建效果的核矩阵的 q 值. 重建数据点数为 $M=8\,192$, 不同 q 值下对 Shepp and Logan 体模图的重建结果如图 2 所示. 表 1 是对上述仿真在不同 q 值下重建的 2-范数、 ∞ -范数误差及时间的比较. 重建的时间不包括投影数据获取的时间, 因为实际中这部分是用 CT 设备获得的.

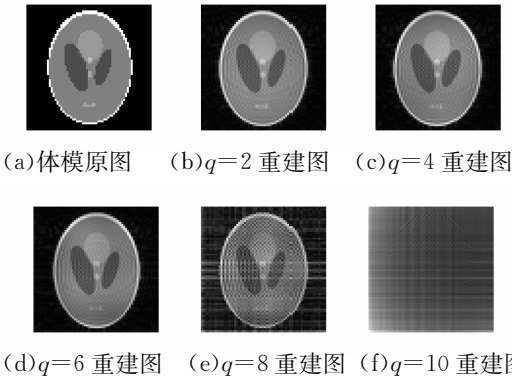


图 2 不同 q 值下对 64×64 像素 Shepp and Logan 体模图的重建结果

表 1 本文方法在不同 q 值下重建的误差及时间比较

q	E_2	E_∞	重建时间/s
2	0.231 6	0.416 8	0.797 0
4	0.229 1	0.417 0	0.835 0
6	0.237 9	0.420 1	1.341 7
8	0.444 6	0.944 7	1.341 7
10	0.970 8	1.595 1	2.761 0

根据图 2 和表 1 可知, q 取 2、4、6 的时候重建效果差不多, 但随着 q 的增加重建质量迅速变差. 这种结果是我们所希望的, 因为较小的 q 意味着较小的运算量. 综合 2 种误差, 当 $m=2$ 、 $q=4$, 核矩阵为 $5 \times 8\,192$ 时, 重建效果最佳.

选用高斯核卷积法 (其中 $q=8, q \geq 4b\pi$) 和双线性插值法来重建图像, 重建数据点数 M 为 8 192 和 4 096. 将重建结果与 LS-NUFFT 核矩阵插值法的最优结果 (取 $m=2, q=4$) 作比较, 如图 3、图 4

所示.

表 2 是在 2 种采样点数情况下, 对使用上述 3 种不同重建方法所得结果的 2-范数、 ∞ -范数误差及时间的比较.

由图 3 可以看出, 核卷积法的重建效果要好于双线性插值法. 由图 3、表 2 可知, 在核卷积重建算中, 使用 LS-NUFFT 核卷积法的 E_2 误差要比双线性插值法减小 40% 以上, 比高斯核卷积法也要减小 30%. 当重建数据点数 ($M=8\,192$) 与图像像素数相同时, LS-NUFFT 核卷积法的 E_∞ 也是最小的.

因为双线性插值法算法的复杂度比核卷积插值重建算法的要低, 所以它的重建速度比核卷积插值法要快. 高斯核卷积法 q 值能选择的最小偶数是 8, 故其复杂度中的 q^2M 部分要大于 LS-NUFFT 核卷积法的此部分. 根据表 2 中的结果, LS-NUFFT 核卷积法要比高斯核卷积法的重建时间短约 50%.

图 4 是将重建数据减少 50% ($M=4\,096$), 在 1/2 降采样的情形下采用 3 种方法的重建图像, 由于图 4d 在高强度区域 (白色区域) 有较多的能量泄漏到黑色背景区域, 故引起的 E_∞ 要大于其他 2 种方法, 但图 4d 的 E_2 仍然比图 4b、和图 4c 的要小, 且在图像区域视觉效果也最好.

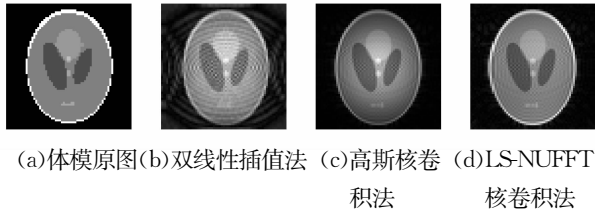


图 3 $M=8\,192$ 时采用 3 种方法对 64×64 像素 Shepp and Logan 体模图的重建结果

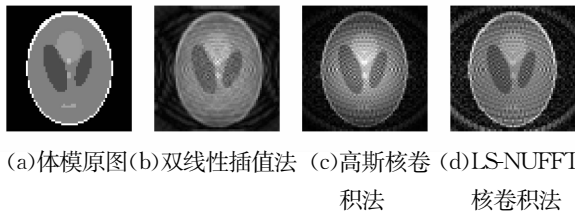


图 4 $M=4\,096$ 时采用 3 种方法对 64×64 像素 Shepp and Logan 体模图的重建结果

表 2 64×64 像素体模在 3 种重建算法下的误差与重建时间比较

M	E_2			E_∞			重建时间/s		
	双线性	高斯核	LS-NUFFT	双线性	高斯核	LS-NUFFT	双线性	高斯核	LS-NUFFT
	插值法	卷积法	核卷积法	插值法	卷积法	核卷积法	插值法	卷积法	核卷积法
819 2	0.383 9	0.334 6	0.229 1	0.542 1	0.383 7	0.317 0	0.706 0	1.640 2	0.835 0
409 6	0.410 2	0.392 9	0.382 8	0.518 0	0.466 3	0.561 4	0.474 0	1.140 0	0.588 0

3 结 论

超声衍射 CT 采用高精度的核卷积插值重建算法,比传统双线性插值算法具有更高的重建精度. 在该重建算法下,选用 LS-NUFFT 的核矩阵进行插值比选用高斯插值核具有更高的重建质量与效率.

参考文献:

- [1] KAK A C, SLANEY M. Principles of computerized tomographic imaging [M]. New York, USA: Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [2] BRONSTEIN M M, BRONSTEIN A M, AZHAI H. Reconstruction in diffraction ultrasound tomography using nonuniform FFT [J]. IEEE Trans on Med Imaging, 2002, 21(11): 1395-1401.
- [3] ZHANG Dongwen, TAO Jinxu. A novel gridding algorithm using NUFFT with applications to ultrasound diffraction tomography [C]// Proceedings of the 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2008: 2473-2476.
- [4] Dutt A, ROKHLIN V. Fast Fourier transforms for nonequispaced data [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1993, 14 (6): 1368-1393.
- [5] LIU Qinhua, NGYEN N. An accurate algorithm for nonuniform fast Fourier transforms [J]. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1998, 8 (1): 18-20.
- [6] NGYEN N, LIU Qinhua. Regular Fourier matrices and nonuniform fast Fourier transforms [J]. Journal of Scientific Computing, 1999 21 (1): 283-293.
- [7] FESSLER J A, SUTTON B P. Nonuniform fast Fourier transforms using min-max interpolation [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2003, 51(2): 560-574.
- [8] SHA Liewei, GUO Hua, SONG Anwen. An improved gridding method for spiral MRI using nonuniform fast Fourier transforms [J]. Journal of Magnetic Resonance, 2003, 162(2): 250-258.
- [9] FESSLER J A. On NUFFT-based gridding for non-Cartesian MRI [J]. Journal of Magnetic Resonance, 2007, 188(1): 191-195.
- [10] SONG Jiayu, LIU Qinhua. Improving non-Cartesian MRI reconstruction through discontinuity subtraction [J]. International Journal of Biomedical Imaging, 2006, 1(2): 1-9.
- [11] RASHE V, PROKSA R, SINKUS R, et al. Resampling of data between arbitrary grids using convolution interpolation [J]. IEEE Trans on Med Imaging, 1999, 18(5): 385-392.

(编辑 刘杨)