

一维子空间的三维重建方法

彭亚丽^{1,2}, 刘芳¹, 刘侍刚^{2,3}

(1. 西安电子科技大学计算机学院, 710071, 西安; 2. 陕西师范大学计算机科学学院, 710062, 西安;
3. 西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为了从图像序列中恢复三维物体,假设相机为正投影模型,提出了一种基于一维子空间的三维重建方法. 利用所有图像序列构成的行向量生成的子空间之和与三维空间点构成的行向量生成的子空间是同一线性子空间、同时由所有图像点构成的 2 个行向量外加一个行向量就可以组成该子空间的一个基底的特性,线性地求取子空间中的行向量,最后完成三维重建. 模拟和真实实验结果表明,该重建方法具有鲁棒性好、重投影误差小等优点,而且能够将图像平等地对待.

关键词: 图像; 三维重建; 正投影; 线性子空间

中图分类号: TP391.41; P232 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)12-0031-04

3D Reconstruction Method with 1D Subspace

PENG Yali^{1,2}, LIU Fang¹, LIU Shigang^{2,3}

(1. School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China; 2. School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China; 3. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To recover 3D objects from a sequence of images, a 3D reconstruction method is presented based on 1D subspace under the orthographic projection assumption. The method relies on the facts that the row vectors composed of all the image points span, the same linear subspace as the row vectors composed of 3D space points span and that a basis of the subspace can consist of two row vectors composed of all the image points and one row vector in 3D space that is orthogonal to the former. The row vector can be determined, and the 3D reconstruction is accomplished. The novelty lies in the fact that the method can treat all the image points uniformly. Experiments with both simulation data and real data show that the method is efficient and robust with small re-projection errors.

Keywords: image; 3D reconstruction; orthographic projection; linear subspace

从图像序列中重建出三维场景结构,即三维重建,是计算机视觉的主要目标之一^[1-3]. 现有的三维重建方法大部分都是基于多线性约束的^[4-6],利用多线性约束关系进行三维重建的缺点是它仅能够利用 2~4 幅图像,而不能够利用更多的图像. 为了克服该缺点, Peter 基于 Tomasi-Kanade^[7] 正交投影分解算法的思想,提出了分解重建算法^[8]. 该算法的缺点是,在进行分解之前,各个图像点的深度因子必须事

先求得,而深度因子的求解又要利用对极几何约束关系,这样又遇到了前面所述的问题. 文献[4-9]基于子空间的约束并利用迭代的方法进行射影重建,但要求有一个较好的初值,若初值远离真实解,就有可能无法收敛到全局最优解,其重建也只能达到射影重建,而不能实现欧氏重建. 在正投影模型下,文献[10]利用子空间的约束实现了物体的三维重建,但并未将所有的图像平等地对待,而是倚重于第

1 幅图像,这样必然会导致重建精度降低.

本文针对上述缺点,利用所有的图像序列生成的子空间之和与三维空间点生成的子空间是同一子空间、同时由所有图像点构成的 2 个行向量外加 1 个行向量就可组成子空间的一个基底特性,由此线性地求得子空间中的行向量,最后完成三维重建.

1 基于子空间的描述

假定相机模型为正投影模型,即成像过程可以表示为

$$m = P X \tag{1}$$

式中: $X = [x \ y \ z]^T$ 表示三维空间点坐标; $m = [u \ v]^T$ 为对应的图像点坐标; P 为相机的投影矩阵.

若有 m 幅图像,每幅图像上有 n 个图像点,则式(1)为

$$m_{i,j} = P X_j \tag{2}$$

式中: $i(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 分别表示第 i 幅图像和第 j 个图像点.

将所有空间点的坐标表示为一个矩阵

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \tag{3}$$

第 i 幅图像上的所有图像点同样也表示为一个矩阵

$$m_i = \begin{bmatrix} u_{i,1} & u_{i,2} & u_{i,3} & \cdots & u_{i,n} \\ v_{i,1} & v_{i,2} & v_{i,3} & \cdots & v_{i,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

则由式(2)可得

$$m_i = P X \tag{5}$$

若用 Ω_i 表示由 m_i 的行向量生成的二维线性子空间,即

$$\Omega_i = \text{span}\{\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i\} \tag{6}$$

同样,用 Ω 表示由 X 的行向量生成的三维线性子空间,即

$$\Omega = \text{span}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\} \tag{7}$$

则由式(5)可得线性子空间 Ω_i 与 Ω 的关系为

$$\Omega_i \subset \Omega; \quad \sum_{i=1}^m \Omega_i = \Omega \tag{8}$$

从式(5)中可以看出,对于任何一个 3×3 的非奇异矩阵 A ,都有

$$m_i = P_i X = P_i A^{-1} A X = P'_i X' \tag{9}$$

式中

$$P'_i = P_i A^{-1}; \quad X' = A X \tag{10}$$

即对于一组图像点序列 m_i ,如果存在一组重建

$\{P_i \ X_i\}$,则同样存在另一组重建 $\{P'_i \ X'_i\}$. 对于无穷多的非奇异矩阵 A ,存在无穷多组重建满足要求. 如果没有任何先验知识,不能确定所求得的重建对应的是哪个变换矩阵 A ,则该重建将落在仿射空间,而不是欧氏空间. 本文假设相机为正投影模型,即投影矩阵 P_i 要满足一定的特性,可以利用投影矩阵 P_i 的约束条件,使重建结果由仿射空间过渡到欧氏空间. 从式(10)还可以看出,由于 A 为非奇异矩阵,因此重建结构 X 和 X' 的行向量生成的线性子空间为同一线性子空间 Ω ,只是它们的基底不一样,而且 X 和 X' 的行向量都可以作为该子空间的一个基底.

2 基于一维子空间重建

令 $\bar{m}$ 为所有图像的平均值,即

$$\bar{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m m_i \tag{11}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i; \quad \bar{v} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i \tag{12}$$

式中
$$\bar{m} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$

令
$$\bar{E} = \text{span}\{\bar{u}, \bar{v}\} \tag{13}$$

由于行向量 $\bar{u}, \bar{v}$ 分别是由向量 $u_i, v_i (i=1,2,\cdots,m)$ 线性组合的,所以

$$\bar{E} \subset \Omega \tag{14}$$

由于线性子空间 Ω 中的任何一组基底都可以作为仿射重建结构 X 的结果,而且有 $\bar{E} \subset \Omega$,因此 $\bar{E}$ 空间中的任意一组基底加上一个行向量 w (该向量既在 $\bar{E}$ 正交补空间,又在 Ω 空间),就可以构成 Ω 空间中的一组基,即完成了仿射结构重建 X . 令仿射结构重建为

$$X = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ w \end{bmatrix} \tag{15}$$

下面将求解线性子空间 Ω 中的 w 向量. 空间中一个向量投影到由矩阵 $\bar{m}$ 行所生成的线性子空间的正交补空间的投影矩阵为

$$T_{\perp} = I - \bar{m}^T (\bar{m} \bar{m}^T)^{-1} \bar{m} \tag{16}$$

令
$$m'_i = m_i T_{\perp} \tag{17}$$

$$X' = X T_{\perp} \tag{18}$$

式(17)和式(18)表示的线性子空间 $\Omega_i (i=1,2,\cdots,m)$ 和 Ω 经投影矩阵 $T_{\perp}$ 变换后,成为新的线性子空间 Ω'_i 和 Ω' ,子空间 Ω'_i 和 Ω' 分别由 m'_i 和 X' 的行向量所生成.

由于 $\dim(\mathbf{X})=4, \dim(\bar{\mathbf{m}})=3$, 且 $\bar{E} \subset \Omega$, 则

$$\dim(\mathbf{X}') = \dim(\mathbf{X}) - \dim(\bar{\mathbf{m}}) = 1 \quad (19)$$

由于 $\mathbf{m}'_i$ 行向量生成的子空间 Ω'_i 之和与 $\mathbf{X}'$ 行向量生成的子空间 Ω' 是同一子空间, 且维数为 1, 令

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}'_1 \\ \mathbf{m}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{m}'_m \end{bmatrix} \quad (20)$$

对 $\widetilde{\mathbf{M}}$ 进行奇异值分解, 即

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \quad (21)$$

式中: $\mathbf{V}$ 是一个对角阵. 在没有噪声的情况下, 对角阵 $\mathbf{V}$ 只有第一个元素 $v_{1,1}$ 为非 0, 其他元素均为 0. 令 $\mathbf{w}$ 为 $\mathbf{D}$ 的第 1 列元素, 可求得仿射重建结构 $\mathbf{X}$.

当求得了仿射重建结构 $\mathbf{X}$, 可利用式(5)线性地求得投影矩阵 $\mathbf{P}_{A_i}$, 至此本文已经求得仿射空间中的三维重建 $\{\mathbf{P}_{A_i} \ \mathbf{X}_{A_i}\}$, 该重建和欧氏重建相差了一个非奇异变换矩阵 $\mathbf{A}$. 本文利用欧氏空间下的投影矩阵 $\mathbf{P}_i$ 为旋转矩阵的前 2 行的特性, 即投影矩阵 $\mathbf{P}_{A_i}$ 满足

$$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_i^T = \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad (22)$$

将式(10)代入式(22)得

$$\mathbf{P}_{A_i} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{A_i}^T = \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad (23)$$

由此, 可以求得变换矩阵 $\mathbf{A}$, 即可以完成欧氏重建 $\{\mathbf{P}_i \ \mathbf{X}_i\}$.

3 算法总结

(1) 利用式(11)求得所有图像的平均值 $\bar{\mathbf{m}}$.

(2) 利用式(16)求得投影矩阵 $\mathbf{T}_\perp$.

(3) 利用式(17)和式(20)求得经过投影矩阵 $\mathbf{T}_\perp$ 投影后的图像矩阵 $\widetilde{\mathbf{M}}$.

(4) 利用式(21)及式(15)求得仿射空间结构点 $\mathbf{X}_{A_i}$.

(5) 利用式(5)求得仿射重建 $\{\mathbf{P}_{A_i} \ \mathbf{X}_{A_i}\}$.

(6) 利用式(23)的约束方程, 求得由仿射重建到欧氏重建的变换矩阵 $\mathbf{A}$.

(7) 利用式(10)完成欧氏重建.

4 模拟与真实图像实验

4.1 模拟实验

为了比较本文方法和文献[10]方法的重建精度, 用计算机模拟单位球内随机产生的 100 个空间点, 变换相机的外参数以产生 10 幅大小为 640×480 像素的图像, 并在图像中加入均值为 0、方差为 0~2 的高斯噪声, 再利用这些模拟图像点分别用本

文方法及文献[10]方法进行三维重建.

本文在每个噪声级下分别运行 100 次, 然后求解重投影误差的平均值, 模拟结果如图 1 所示. 从图 1 可以看出, 本文方法的重投影误差仅高于图像噪声的 50%, 而文献[10]方法却高于图像噪声的 70%, 因此本文方法的重建精度更高. 原因是, 本文方法将所有的图像平等地对待, 而文献[10]方法却倚重第 1 幅图像.

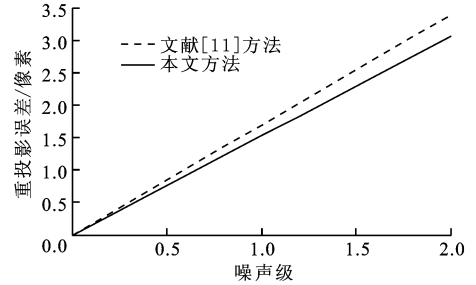


图 1 重投影误差随图像噪声的变化

为了研究图像数及空间点对本文方法的影响, 本文首先保持 100 个空间点, 变化图像数, 然后保持 10 幅图像, 变化空间点数. 在上述实验过程中, 对图像点加入均值为 0、方差为 1 的高斯噪声, 在每种情况下各运行 100 次, 取平均值, 得到如图 2 和图 3 所示的曲线.

从图 2 和图 3 可以看出, 随着图像数及空间点数的增加, 重投影误差会增加, 但增加的速度越来越慢, 最后达到稳定.

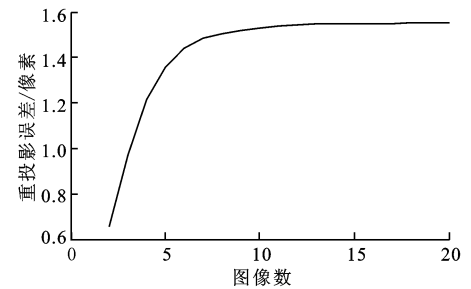


图 2 重投影误差随图像数的变化

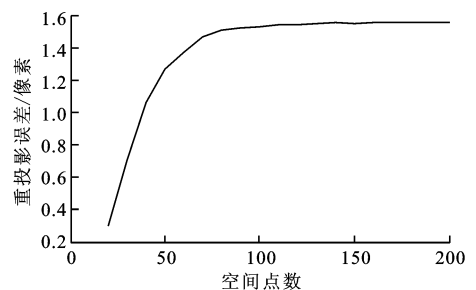
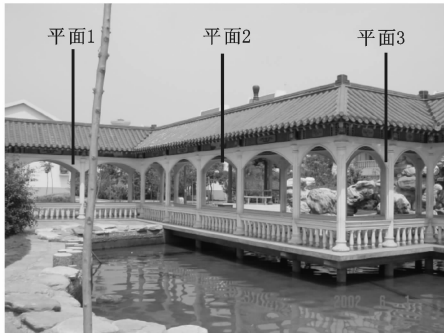


图 3 重投影误差随空间点数的变化

4.2 真实图像实验

为了验证方法的正确性及重建效果,本文获得一个由7幅图像组成的亭子序列,图像大小为480×640像素,其中的两幅图像如图4所示.用Harris

算子提取并跟踪了150个特征点,依据这些特征点再用本文方法进行三维重建,重建结果如图5所示.从图5可以看出,本文方法的重建精度较高.

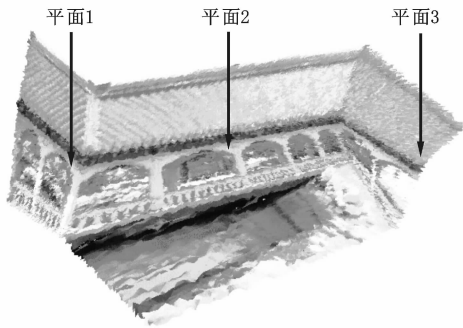


(a)图像 1

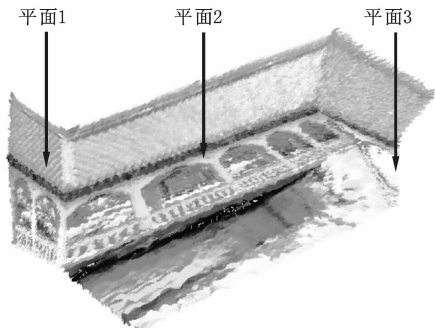


(b)图像 2

图4 重建物体的图像



(a)图 4a 重建结果



(b)图 4b 重建结果

图5 经过重建后的纹理实体模型在不同方位的投影图

5 结束语

本文假设相机为正投影模型,提出了一种基于一维子空间的三维重建方法,该方法的最大优点是能够将所有的图像平等地对待.模拟实验结果表明,该方法的重投影误差约大于图像噪声的50%,说明重投影误差比较小,真实图像实验结果也证明该方法是非常有效的.

参考文献:

[1] 刘哲,卫军胡,赵军,等. 多源二维测角信息的三维动态目标跟踪定位算法[J]. 西安交通大学学报,2008,42(4):462-465.
LIU Zhe, WEI Junhu, ZHAO Jun, et al. Tracking and locating algorithm of 3-dimensional moving targets using 2-dimensional angular measurements from multiple passive sensors[J]. Journal of Xi'an Jiaotong Uni-

versity, 2008, 42(4):462-465.
[2] 刘侍刚,彭亚丽,韩崇昭,等. 3维子空间约束的遮挡点恢复方法[J]. 西安交通大学学报,2009,43(4):10-13.
LIU Shigang, PENG Yali, HAN Chongzhao, et al. An occlusion recovery method based on 3D subspace[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(4):10-13.
[3] YAN Jingyu, POLLEFEYS M. A factorization-based approach for articulated nonrigid shape, motion and kinematic chain recovery from video[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2008, 30(5):865-877.
[4] NEGAHDARIPOUR S. Epipolar geometry of opti-acoustic stereo imaging[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(10):1776-1788.
[5] VIDAL R, HARTLEY R. Three-view multibody

structure from motion [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2008, 30(2):214-227.

[6] TANG W K, HUNG Y S. A subspace method for projective reconstruction from multiple images with missing data [J]. Image and Vision Computing, 2006, 24(5):515-524.

[7] TOMASI C, KANADE T. Shape and motion from image streams under orthography: a factorization method [J]. International Journal of Computer Vision, 1992, 9(2):137-154.

[8] STURM P, TRIGGS B. A factorization based algorithm for multi-image projective structure and motion [C]//European Conference on Computer Vision. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1996:709-720.

[9] AGUIAR P, MOURA J. Factorization as a rank 1 problem [C]// IEEE Conferee Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1999:178-184.

[10] 刘侍刚,彭亚丽,韩崇昭,等. 基于 1 维子空间的 3 维重建算法 [J]. 机器人, 2009, 31(3):224-228.

LIU Shigang, PENG Yali, HAN Chongzhao, et al. A 3D reconstruction algorithm based on 1D subspace [J]. Robot, 2009, 31(3):224-228.

(编辑 苗凌)