

高速透平膨胀机临界转速的计算与分析

陈双涛^{1,2}, 侯予^{1,2}, 陈汝刚², 赵红利²

(1. 西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安;

2. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为了保障高速透平膨胀机的稳定性, 针对高速透平膨胀机转子临界转速的确定问题, 分别讨论了 Prohl 递推法、Riccati 传递矩阵法和有限元 QZ(FEQZ)法在各向异性的弹性支承轴承转子系统阻尼临界转速计算中的优缺点. 考虑到透平膨胀机实际的结构和应用情况, 建议气体轴承支承高速透平膨胀机转子临界转速的计算方法采用 FEQZ 法, 同时运用 Matlab 语言分模块设计了计算程序, 大大简化了编程过程, 提高了计算精度. 在此基础上, 通过在实际工况参数范围内的实例, 分析了某透平膨胀机转子支承刚度和阻尼对转子系统阻尼临界转速的影响, 并与工程实验数据进行了对照, 从而验证了模型与分析计算的可靠性.

关键词: 临界转速; 气体轴承; 透平膨胀机; 有限元 QZ 法

中图分类号: TB653 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)09-0033-05

Calculation and Analysis of Critical Speed of High-Speed Turbo-Expanders

CHEN Shuangtao^{1,2}, HOU Yu^{1,2}, CHEN Rugang², ZHAO Hongli²

(1. State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The advantages and disadvantages of the Prohl method, the Riccati recursive method and the finite element QZ(FEQZ) method in estimating critical speed of turboexpander rotor-bearing systems with anisotropic elastic support were discussed to ensure stable operation of high speed turboexpanders. It is suggested that the FEQZ method be the most effective way when the actual structure and practical application of turboexpanders are considered. The Matlab code was employed to design the program, and the results show that the program process is simplified and the calculation accuracy is higher. In addition, the effects of the support stiffness and the damping coefficient on critical speed of the rotor-bearing system of a turboexpander within actual working condition range were analyzed, and the calculation results were validated by the experimental data.

Keywords: critical speed; gas bearing; turbo expander; finite element QZ method

在透平膨胀机设计过程中, 为了达到较高的绝热效率, 透平转子必须具有较高的工作转速, 而此时转子的稳定性是高速透平设计的关键. 要保证透平机械的平稳运行, 设计转动频率与转子横向振动的固有频率及其倍数不能相等或相近. 当膨胀机转子系统的工作转速接近转子系统的横向振动频率时, 转子会产生强烈的振动和噪声, 进而引起高速转子

失稳, 严重时甚至会造成转子和轴承系统损毁. 因此, 对转子系统固有频率进行计算, 求出其对应的临界转速, 以保证透平膨胀机工作转速处于安全状态是十分必要的^[1].

采用传统的 Prohl 递推法和 Riccati 传递矩阵法在对各向异性支承的轴承转子系统计算时, 需要进行大量的简化^[2-3], 以保证计算的可行性. 在低温

机械中,常用的气体轴承高速透平膨胀机的气膜支承为各向异性支承,该气膜的阻尼会影响转子系统固有振动频率.因此,研发一种适用于具有各向异性支承的,能充分考虑各种因素影响且精度较高、简单可行的高速透平膨胀机轴承转子系统的临界转速计算方法,显得非常重要.

1 临界转速算法

采用气体轴承的小型及微型高速透平膨胀机,由于其支承气膜的厚度和轴承在安装时不对中,所以导致支承为各向异性.具有各向异性弹性支承的转子系统可以简化成为如图1所示的2种模型.膨胀机轴承座一般是固定在机体上的,而机体通常固结在一个较大的刚性基础上,因此可以将支承基础看成是刚性的,如图1b所示.具有各向同性支承(支承刚度 $k_{xx}=k_{yy}$, $k_{xy}=k_{yx}=0$)的且不考虑支承阻尼的系统,采用 Prohl 递推法、Riccati 传递矩阵法进行计算是简便和行之有效的.具有各向异性弹性支承(支承刚度 $k_{xx} \neq k_{yy}$, $k_{xy} \neq k_{yx} \neq 0$)的转子系统,采用 Prohl 和 Riccati 法进行计算的核心是,在整个复平面内寻找含有复变量 $\sigma + i\omega$ 频率方程的根,然后根据 $\Omega = \omega$ 的关系求出临界转速.通常这2种方法建立的频率方程是一个阶数可能高达 $8N$ (N 是系统划分的节点数)次的复数方程,所以求解较为困难.文献[1]对采用构造 Hessenberg 矩阵来求解复矩阵方程解的方法进行了大量的简化,该方法难以保证计算精度,同时对复矩阵进行的多项式转化和求解非常耗时.

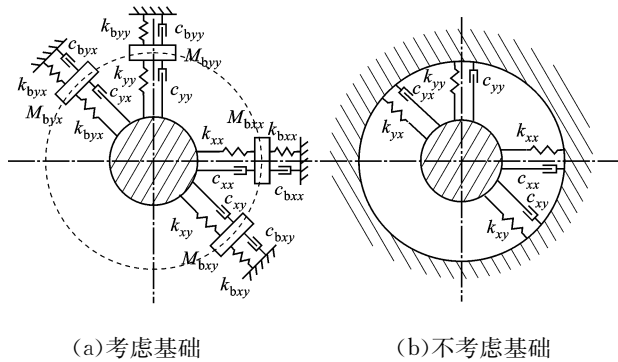


图1 具有各向异性弹性支承的转子系统

Hashish 等人^[4-5]提出并发展了转子系统振动特性的有限元解求解法,其将转子系统临界转速的问题归结为求解典型广义复特征值的问题.求解广义复特征值的 QZ 法是 QR 解法的一种改进,QZ 法不需要对求解过程中的系数矩阵进行逆运算,从而

避免了因系数矩阵产生奇异时计算程序无法正常运行的问题.该算法充分考虑了各向异性支承情况下的阻尼矩阵 C 和刚度矩阵 K 的影响,使得计算结果较为精确.

2 有限元 QZ 法及其实现

2.1 有限元 QZ 法及正反进动判别

2.1.1 有限元 QZ(FEQZ)法 具有各向异性的轴承转子系统,其润滑气膜作用于轴径上的刚度和阻尼系数矩阵分别为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix}$$

考虑了阻尼和刚度的转子轴承系统的运动方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_1 \\ \ddot{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} + \mathbf{G}_1 \\ c_{21} - \mathbf{G}_2 & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} + \mathbf{K}_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} + \mathbf{K}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

节点位移向量

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= [x_1, \theta_{y1}, \dots, x_N, \theta_{yN}]^T \\ \mathbf{U}_2 &= [y_1, -\theta_{x1}, \dots, y_N, -\theta_{xN}]^T \end{aligned} \quad (2)$$

令节点位移矩阵、质量矩阵、陀螺力矩和阻尼矩阵、刚度矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} + \mathbf{G}_1 \\ c_{yx} - \mathbf{G}_2 & c_{yy} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_{xx} + \mathbf{K}_1 & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} + \mathbf{K}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

则式(1)的齐次式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4)$$

通常刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 是不对称的,所以针对大型非对称广义特征值问题,Moler 等人^[6]提出并由 Ward 等人^[7-8]发展了不要求逆运算的 QZ 法,所以本文采用 QZ 法来求解临界转速.采用 QZ 法求解式(4)特征值,需要对典型广义特征值进行如下转化.

令 $\mathbf{U} = \mathbf{Y}e^{\lambda t}$,则 $\dot{\mathbf{U}} = \lambda \mathbf{Y}e^{\lambda t}$, $\ddot{\mathbf{U}} = \lambda^2 \mathbf{Y}e^{\lambda t}$,从而式(4)可化为

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (5)$$

即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \lambda \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \lambda \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{I}$ 是单位矩阵.

令

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \lambda \mathbf{Y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \tag{7}$$

则有

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{X} \tag{8}$$

式中: λ 的虚部就是转子振动的固有频率.

在编写 QZ 算法时,本文运用了 Matlab 的广义特征函数,并联立 $\omega=\Omega$ 进行了求解.

2.1.2 正、反进动判别 经临界转速求解得到第 m 阶临界转速 ω_m 对应的复特征值 $\lambda_m=s_m+\mathrm{j}\omega_m$,该值的复特征向量为

$$\mathbf{X}_m = \begin{bmatrix} p_1 + q_1 \mathrm{j} \\ \vdots \\ p_{8N} + q_{8N} \mathrm{j} \end{bmatrix} \tag{9}$$

其第 m 列前 $4N$ 行为复向量

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}}_m &= \mathrm{e}^{\sigma_m t} \cdot \\ &\begin{bmatrix} (p_1 \cos \omega t - q_1 \sin \omega t) + \mathrm{j}(p_1 \sin \omega t + q_1 \cos \omega t) \\ \vdots \\ (p_{2N} \cos \omega t - q_{2N} \sin \omega t) + \mathrm{j}(p_{2N} \sin \omega t + q_{2N} \cos \omega t) \end{bmatrix}_m = \\ &\left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathbf{U}}_1 \\ \overline{\mathbf{U}}_2 \end{array} \right\}_m \end{aligned} \tag{10}$$

式中

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}}_{1m} &= [\bar{x}_1, \bar{\theta}_{y1}, \cdots, \bar{x}_N, \bar{\theta}_{yN}]_m^T \\ \overline{\mathbf{U}}_{2m} &= [\bar{y}_1, -\bar{\theta}_{x1}, \cdots, \bar{y}_N, -\bar{\theta}_{xN}]_m^T \end{aligned} \tag{11}$$

结合式(9)、式(10)可得

$$\begin{aligned} x_{mci} &= \mathrm{e}^{\sigma_m t} (p_i \cos \omega t - q_i \sin \omega t)_m \\ x_{msi} &= \mathrm{e}^{\sigma_m t} (p_i \sin \omega t + q_i \cos \omega t)_m \\ y_{mci} &= \mathrm{e}^{\sigma_m t} (p_{i+N} \cos \omega t - q_{i+N} \sin \omega t)_m \\ y_{msi} &= \mathrm{e}^{\sigma_m t} (p_{i+N} \sin \omega t + q_{i+N} \cos \omega t)_m \end{aligned} \tag{12}$$

式中: $i=2n-1, n=1, 2, \cdots, N$.

因为

$$\begin{aligned} U_{1m} &= \mathrm{Re}(\overline{\mathbf{U}}_{1i} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_m t}) \\ U_{2m} &= \mathrm{Re}(\overline{\mathbf{U}}_{2i} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_m t}) \end{aligned} \tag{13}$$

即

$$\begin{aligned} x_{ni} &= (x_{mci}^2 + x_{msi}^2)^{1/2} \cos(\omega_m t + \phi_{mci}) \\ y_{ni} &= (y_{mci}^2 + y_{msi}^2)^{1/2} \cos(\omega_m t + \phi_{myi}) \end{aligned} \tag{14}$$

式中

$$\begin{aligned} \varphi_{mci} &= \arctan(x_{msi}/x_{mci}) \\ \varphi_{myi} &= \arctan(y_{mci}/(-y_{msi})) \end{aligned} \}$$

根据文献[9],有

$$\text{正进动} \quad x_{msi}y_{mci} - x_{mci}y_{msi} > 0 \tag{15}$$

$$\text{反进动} \quad x_{msi}y_{mci} - x_{mci}y_{msi} < 0 \tag{16}$$

结合式(10)、式(12),且 $\mathrm{e}^{2\sigma_m t} > 0$,则式(15)、式(16)的判据直接用式(8)相关元素表示为

$$\text{正进动} \quad q_i p_{i+N} - p_i q_{i+N} > 0, \quad i = 2n-1, n = 1, 2, \cdots, N \tag{17}$$

$$\text{反进动} \quad q_i p_{i+N} - p_i q_{i+N} < 0, \quad i = 2n-1, n = 1, 2, \cdots, N \tag{18}$$

事实上,根据文献[10]所述,对于支承各向异性比较严重的某些转子,会出现部分节点正进动、部分节点反进动的情况.因此,对于阻尼影响较大的系统,正、反进动是无法区分的.

2.2 FEQZ 法实现

本文程序流程如图 2 所示.前处理模块包括基本参数输入和系数矩阵计算.在求解模块中,利用 Matlab 自带的函数进行求解.后处理的核心思想是寻找频率曲线上 $\omega=\Omega$ 的点.

本文程序也可以为各向同性支承转子系统进行计算,计算时令 $k_{xx}=k_{yy}=K, k_{xy}=k_{yx}=0$ 即可.当考虑基础质量和支承时, K 可按照文献[10-11]相关

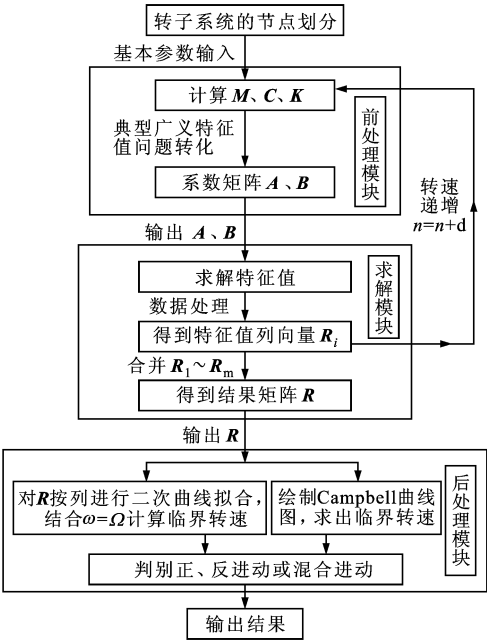


图 2 程序流程图

定义进行计算.

2.3 算法验证

首先对长度 $L=1.0\text{ m}$ 、直径为 0.04 m 的不锈钢光轴(忽略支承刚度、阻尼和陀螺力矩的影响),分别利用 Riccati 传递矩阵法、FEQZ 法和 ANSYS 三维实体模态分析法进行了临界转速计算,结果如表 1 所示(表中 1F~4F 表示一阶~四阶正进,1B~4B 表示一阶~四阶反进). FEQZ 法 Campbell 图如图 3 所示. 从表 1 可以看出,本文的 FEQZ 法误差最小.

表 1 不同方法临界转速计算结果

$\omega/\text{rad}\cdot\text{min}^{-1}$				
	ANSYS 法	FEQZ 法	Riccati 法	改进 Riccati 法
1F	11 094.6	11 409.81	10 712.76	10 733.23
1B	11 094.6	11 563.3	10 720.57	—
2F	30 950.4	29 622.62	28 962.37	29 033.41
2B	30 951.0	30 579.74	29 695.67	—
3F	61 848.0	57 245.14	55 715.70	55 941.33
3B	61 848.0	59 032.93	57 585.35	—
4F	95 882.0	94 138.46	90 457.83	90 996.18
4B	104 970.0	98 554.23	94 134.33	—

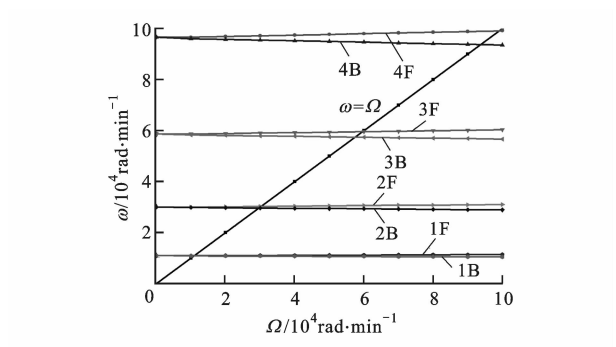


图 3 FEQZ 法 Campbell 图

3 透平膨胀机临界转速计算及分析

3.1 临界速度计算实例及其实验验证

图 4 是西安交通大学制冷低温研究所研制的标准状况下的 $150\text{ m}^3/\text{h}$ 制氧机用透平膨胀机转子三维示意图. 该高速透平采用一体化静压气体轴承,轴承轴颈直径为 25 mm ,转子质量为 891 g ,设计转速为 $107\,500\text{ r/min}^{[12]}$. 表 2 列出了该转子系统分段参数.

静压气体轴承支承的刚度系数和阻尼系数定义为 $\bar{k}=\frac{k}{W/C_r}$ 和 $\bar{c}=\frac{c}{W/C_r\Omega}$,其中 Ω 为角频率.

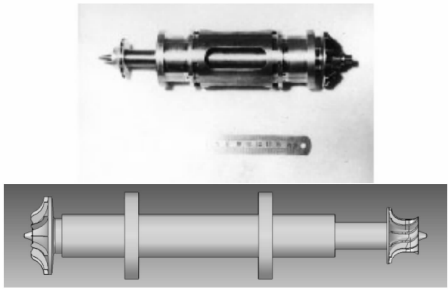


图 4 透平转子三维视图

表 2 转子系统分段参数

分段号	分段长度/mm	分段直径/mm
1	3.80	4.50
2	6.50	6.00
3(附加工作轮)	6.50	0.25
4	0.15	0.25
5	0.15	0.25
6	0.18	0.36
7(支点单元)	0.18	0.36
8	4.00	0.50
9	4.00	0.50
10	0.20	0.36
11	0.20	0.36
12	0.20	0.36
13	4.00	0.50
14	4.00	0.50
15	0.18	0.36
16(支点单元)	0.18	0.36
17	4.00	0.36
18(附加风机轮)	6.50	8.00
19	6.50	8.00
20	8.00	6.00

通过计算得到的刚度和阻尼系数分别为 $\bar{k}_{xx}=9.758$ 、 $\bar{k}_{xy}=1.058$ 、 $\bar{k}_{yx}=-1.043$ 、 $\bar{k}_{yy}=9.731$ 、 $\bar{c}_{xx}=1.055$ 、 $\bar{c}_{xy}=-1.30$ 、 $\bar{c}_{yx}=1.312$ 、 $\bar{c}_{yy}=1.046$.

气体轴承高速透平转子振幅-频率实验结果如图 5 所示. 图中结果表明,当轴承径向间隙 $C_r=57\text{ mm}$ 、供气压力为 0.7 MPa 时,在 $41\,000\sim42\,000\text{ r/min}$ 附近出现了一个最大振幅,可判断为一阶临界转速. 表 3 列出了正进动前三阶临界转速的计算结

果. 从中可以看出, 本文计算结果与实测值较为接近, 进一步验证了本文算法的正确性.

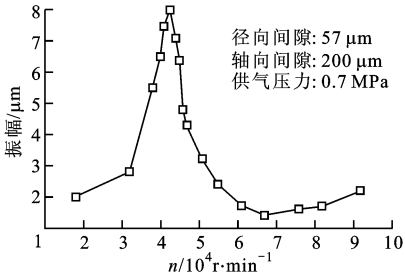


图 5 气体轴承高速透平转子振幅-频率实验曲线

表 3 正进动阻尼下临界转速

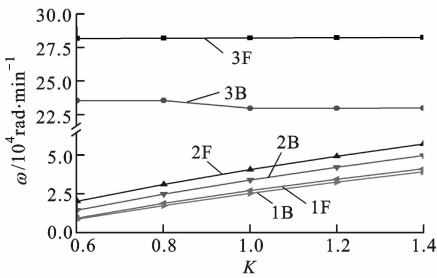
	$\omega/\text{rad} \cdot \text{min}^{-1}$		
	1F	2F	2F
本文计算	38 844.80	44 197.85	279 389.33
文献[12]估算	60 000.00	66 000.00	—
实验	41 000.00~42 000.00	—	—

3.2 刚度和阻尼对阻尼临界转速的影响

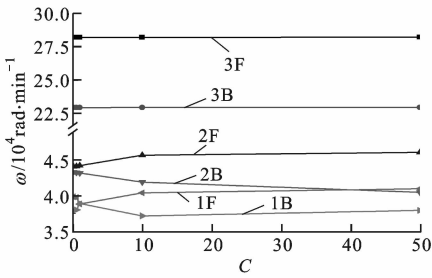
在运行过程中, 转子的系统载荷、系统温度变化导致的润滑气膜物理性质的变化会引起支承气膜刚度和阻尼发生变化, 尤其是当透平膨胀机启动时, 刚度和阻尼的变化更大. 刚度的增大往往会引起系统固有频率增加, 而阻尼对临界转速的影响比较复杂, 对于不同的转子, 阻尼的变化会产生不同的影响.

阻尼为定值(设计阻尼系数), 当刚度系数为设计值的 0.6、0.8、1、1.2、1.4 倍时, 正、反进动前三阶阻尼临界转速的变化如图 6 所示. 从图中可知, 在所讨论的刚度范围内, 正、反进动的前二阶阻尼临界转速增大了近 1 倍, 而正、反进动的第三阶阻尼临界转速变化不大.

在设计刚度系数下, 阻尼取值为设计值的 0.1、0.5、1、5、10 倍时, 正、反进动的前三阶阻尼临界转速的变化如图 7 所示. 从图中可知, 随着阻尼的增



K 为设计刚度值的倍数
图 6 刚度对临界转速的影响



C 为设计阻尼值的倍数
图 7 阻尼对临界转速的影响

大, 正进动的前二阶临界转速有所上升, 反进动的前二阶临界转速总体呈现下降趋势, 但二者的变化趋势随着阻尼的增加趋于平缓. 阻尼对第三阶临界转速的影响较小. 由于气体轴承支承阻尼的大小与转速有关, 因此其对临界转速的影响需要根据具体情况进行分析.

总的来说, 当阻尼不可忽略时, 低阶阻尼临界转速对刚度和阻尼的变化较为敏感, 而透平的设计工作区域往往处于前几阶的阻尼临界转速之间, 因此在这情况下, 对设计的轴承转子系统进行阻尼临界转速校核是十分必要的.

4 结 论

通过对比分析几种常用临界转速算法的优缺点, 提出了 FEQZ 法, 以适于进行具有各向异性支承的高速透平膨胀机阻尼临界转速的计算, 同时论证了直接采用计算所得特征值矩阵来判别正、反进动的方法. 另外, 本文采用 Matlab 语言简化了 FEQZ 法的实现过程, 再用实例分析验证了支承刚度与阻尼对高速透平膨胀机转子系统临界转速的影响, 得出的结论如下.

(1) 支承气膜刚度的增加会引起正、反进动临界转速增大, 刚度对正、反进动各自前二阶临界转速的影响较大.

(2) 阻尼大小对正、反进动各阶阻尼临界转速的影响差异较大, 其对不同的轴承转子系统的影响要根据实际情况具体分析.

参考文献:

[1] 陈汝刚, 侯予, 袁秀玲, 等. 气体轴承在高速透平机械中的应用 [J]. 流体机械, 2007, 35(4): 55-58.
CHEN Rugang, HOU Yu, YUAN Xiuling, et al. Application of gas bearings on high speed turbo-machinery [J]. Fluid Machinery, 2007, 35(4): 55-58.
[2] 赵永辉. 离心式压缩机转子-轴承系统临界转速计算

- [D]. 沈阳: 沈阳工业大学机械工程学院, 2006.
- [3] 陆颂元. 转子系统阻尼固有频率的传递矩阵-多项式计算法[J]. 应用力学学报, 1986(3):73-82.
LU Songyuan. A method for calculating damped critical speeds and stability of rotor-bearing systems [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1986(3):73-82.
- [4] CHILDS D W, NOTEON G K A. Critical-speed solutions for finite element-based rotor models [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1982,104:412-416.
- [5] HASHISH E, SANKAR T S. Finite element and modal analyses of rotor-bearing systems under stochastic loading conditions [J]. ASME Journal of Vibration, Acoustics Stress and Reliability in Design, 1984, 106: 80-89.
- [6] MOLIER C B, STEWART G W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. [J] SIAM Journal on Numerical Analysis, 1973,10(2):241-256.
- [7] KAUFMAN L. A generalization of the LR algorithm to solve $Ax = \lambda Bx$, AD0745022 [R]. Stanford, CA, USA: Stanford University. Department of Computer Science, 1972.
- [8] WARD R C. The combination shift QZ algorithm [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1975, 12(6): 835-853.
- [9] 钟一镔, 何衍宗, 王正, 等. 转子动力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.
- [10] 闻邦椿, 顾家柳, 夏松波, 等. 高等转子动力学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.
- [11] 虞烈, 刘恒. 轴承-转子系统动力学 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2000.
- [12] 吴县制氧机厂, 江西制氧机厂, 西安交通大学. 空气轴承中压透平膨胀机研制第一阶段报告 [R]. 西安: 西安交通大学, 1978.

(编辑 苗凌 王焕雪)