

阈值去噪下的改进粒子滤波算法

王向华¹, 覃征¹, 杨新宇², 栗江涛²

(1. 清华大学计算机科学与技术系, 100084, 北京; 2. 西安交通大学计算机科学与技术系, 710049, 西安)

摘要: 针对粒子滤波在非线性系统上具有优越性,但粒子在传播过程中必然受到噪声影响的问题,提出了在阈值去噪下的改进粒子滤波算法. 将小波阈值去噪的思想引入到粒子滤波中,即信号先经过小波包分解,再利用适当的阈值保留分解系数较大者并将系数较小者置为0,这样每个粒子结合其历史信息可降低噪声水平,进而改进滤波的状态估计值. 蒙特卡罗仿真实验表明,加入阈值去噪的粒子滤波法可以有效降低滤波的均方根误差,提高滤波精度. 在所采用的线性及非线性系统中,均方根误差均值分别降低了14%和12%.

关键词: 粒子滤波; 阈值去噪; 非线性系统

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)02-0031-04

Improved Particle Filter Algorithm Based on Threshold De-Noising

WANG Xianghua¹, QIN Zheng¹, YANG Xinyu², LI Jiangtao²

(1. Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. Department of Computer Science and Technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Concerning the advantage of particle filter in non-linear systems, and the problem of noise influence during the dissemination process, an improved particle filter algorithm with threshold de-noising is proposed. The idea of wavelet threshold de-noising is introduced into the particle filter, that is, after applying the wavelet packet decomposition on the signal, the coefficients that are greater than a certain threshold are reserved while other coefficients are set to 0. Thus, with the assistance of particle history information, the noise is reduced and the estimated filter state value is more accurate. Monte Carlo simulation results show that the particle filter with threshold de-noising can effectively reduce the filter root mean square error (RMSE) and improve filter accuracy, and that RMSEs in the corresponding linear and non-linear systems are reduced by 14% and 12% respectively.

Keywords: particle filter; threshold de-noising; nonlinear system

目标跟踪是在时间序列中找出用户所感兴趣的目标,在计算机视觉、导航控制、信号处理等方面得到了广泛的应用. 卡尔曼滤波是一种广泛使用的目标跟踪算法^[1],它对于噪声高斯分布的系统可以得到递推的最小均方误差估计. 然而,在实际中,很多系统是非线性的^[2],扩展卡尔曼滤波(EKF)、无味卡尔曼滤波(UKF)等就是针对系统的非线性对卡尔曼滤波进行了改进,但它们并未从根本上解决系统

的非线性问题.

粒子滤波是一种处理非线性系统的新方法,其核心思想是:利用一组带权的粒子样本来估计系统的后验概率密度. 由于粒子滤波不受非线性、非高斯条件的限制,精度可以逼近最优估计,所以粒子滤波得到了深入研究,并广泛应用于非线性、非高斯情况下的状态估计. 为了提高滤波的精度,必须选取较好的重要性函数,目前对粒子滤波的改进大都是基于

重要性函数的. 例如,文献[3-4]分别用 EKF、UKF 来建立重要性函数, Kotecha 和 Djuric 采用高斯函数来建立重要性函数^[5],文献[6]采用二阶中心差分滤波来建立重要性函数.

本文与以往研究的不同之处在于,没有从研究者广泛关注的角度来研究粒子滤波,而是将小波去噪的思想引入到粒子滤波,从噪声的角度展开研究. 无论是过程模型还是观测模型,都有噪声的影响,那么粒子时间序列必然掺杂噪声,所以算法对每个粒子的时间序列进行阈值去噪处理,从而改进了状态滤波值.

1 粒子滤波

1.1 问题描述

假设离散的状态空间模型为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{z}_k &= h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

式中: $\mathbf{x}_k$ 表示系统的状态向量, $\mathbf{x}_k \in R^n$; $\mathbf{z}_k$ 表示系统的观察向量, $\mathbf{z}_k \in R^p$; $\mathbf{v}_k, \mathbf{e}_k$ 分别为过程噪声和观测噪声; $f(\cdot), h(\cdot)$ 是非线性函数.

1.2 基本粒子滤波

粒子滤波^[7]是一种近似的贝叶斯解决方法,其思想是构造一个基于样本的后验概率密度函数. 用 $\{x_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N$ 表示系统后验概率密度函数,则有

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i)$$

式中: $\{x_k^i, i=1, \cdots, N\}$ 表示 k 时刻的粒子集合,相应的权值为 $\{w_k^i, i=1, \cdots, N\}$, 满足 $\sum_{i=1}^N w_k^i = 1$; $\delta(\cdot)$ 是狄拉克(Dirac)函数. 任意函数 $g(\cdot)$ 的数学期望可以表示为

$$E(g(\mathbf{x}_k)) = \int g(\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \approx \sum_{i=1}^N w_k^i g(x_k^i) \tag{1}$$

当样本粒子数 N 足够大时,式(1)是收敛的.

2 阈值去噪

函数 $f(x)$ 的小波变换^[8]可定义为

$$C(a,b) = \frac{1}{a^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi^* \left(\frac{x-b}{a} \right) dx$$

式中: $\Psi^*(\cdot)$ 是基本共轭小波; a, b 分别为缩放和平移参数. 变换后得到的小波系数 C 是关于 a, b 的函数,如果 a, b 为离散值,小波变换就是离散的.

执行离散小波变换的有效方法是使用滤波

器^[9]. 输入信号 s 经过低通和高通滤波器可分别得到信号的近似值 A 和细节值 D . 在许多应用中,信号的低频部分是最重要的,而高频部分起着“添加剂”的作用. 犹如声音,把高频分量去掉之后,听起来声音确实变了,但还能够听清楚所说内容. 相反,如果把低频部分去掉,听起来就莫名其妙. 如果经滤波器的信号再次通过滤波器,就可以得到信号的小波包分解. 图 1 为三级小波包分解树.

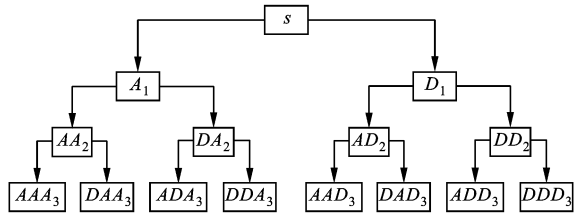


图 1 三级小波包分解树

Donaho 阈值去噪算法^[10]是一种典型的小波去噪算法,其基本思想是:信号经过小波包分解后,系数较大者保留的能量较大,而系数较小者所含的多为噪声,选取适当的阈值,将低于阈值的系数置为 0,从而可降低噪声.

3 基于阈值去噪的粒子滤波算法

粒子滤波是迭代进行的,随着算法的运行,粒子值会不断地更新,这样每个粒子都会形成一个时间序列. 粒子在传播过程中,必然受到噪声的影响. 从模型上看,这些噪声干扰既受状态方程的影响,也受观测方程的影响,是二者共同作用在粒子时间序列上的结果. 基于此,本文提出一种去噪的粒子滤波算法,即对于每一个粒子,结合其历史信息(粒子时间序列)进行去噪处理,从而降低粒子的噪声水平,进而优化滤波值.

去噪的粒子滤波算法描述如下.

步骤 1: 对 k 时刻的粒子样本 $\{x_k^i, i=1, \cdots, N\}$ 进行重要性采样, $x_{k+1}^i \sim q(\mathbf{x}_{k+1} | x_{0:k}, \mathbf{z}_{k+1}), i=1, 2, \cdots, N$, 得到 $k+1$ 时刻的粒子样本,其中 $q(\cdot)$ 为重要性函数. 在工程应用上,一般选取转移概率密度 $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)$ 作为重要性函数.

步骤 2: 计算每个粒子的权值,并进行归一化处理,即

$$\begin{aligned} w(x_{k+1}^i) &= w(x_k^i) \frac{p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)}{q(\mathbf{x}_{k+1} | x_{0:k}, \mathbf{z}_{1:k})}, \\ i &= 1, 2, \cdots, N \end{aligned} \tag{2}$$

$$\hat{w}(x_{k+1}^i) = \frac{w_{k+1}(x_{k+1}^i)}{\sum_{j=1}^N w_k(x_{k+1}^j)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

步骤 3: 根据粒子归一化权值对粒子进行重新采样,使得权值大的粒子得以保留、复制,而权值小的粒子予以消除.一种典型的方法是,将原来的粒子样本映射为等权粒子样本,映射方法为

$$\{x_{k+1}^i, \hat{w}(x_{k+1}^i)\} \rightarrow \{\hat{x}_{k+1}^i, 1/N\}$$

步骤 4: 对每个粒子根据其历史值进行小波阈值去噪.

假设根据 m 个粒子的历史值进行去噪,即 $\{\hat{x}_{k-m+2}^i, \hat{x}_{k-m+3}^i, \dots, \hat{x}_{k+1}^i\}$, 执行小波去噪算法后得到 $\{\ddot{x}_{k-m+2}^i, \ddot{x}_{k-m+3}^i, \dots, \ddot{x}_{k+1}^i\}$, 显然 m 值对算法的影响是比较大的: m 值较小,算法的去噪效果较差,若 m 值很大,又会使算法的复杂度提高.

步骤 5: 根据去噪后的粒子样本以及权值系数,可以得到 $k+1$ 时刻系统的状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ddot{x}_{k+1}^i$$

4 仿真实验

仿真实验采用 2 个系统模型来验证改进算法的有效性.模型 1 为线性模型,其过程模型和观测模型分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \mathbf{G} \nu_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H} \mathbf{x}_k + e_k \end{aligned}$$

式中

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

分别表示转移矩阵、噪声输入矩阵、观测矩阵; $\nu_k \sim N(0, 1)$ 、 $e_k \sim N(0, 0.000\ 1)$ 是过程噪声和观测噪声值.用观测量 $\mathbf{z}_k$ 表示 $\mathbf{x}_k$ 的位置分量,运动物体的初始位置和速度分别为 $x=0$ 、 $v=0$,加速度为 0.5 m/s^2 ,仿真时间间隔 $T=0.5\text{ s}$,仿真时间是 30 s .蒙特卡罗独立实验次数为 100,每次实验后统计 $\mathbf{x}_{k+1}$ 的均方根误差(RMSE),结果如图 2 所示.最后,计算全部实验 RMSE 数据的均值和方差,结果见表 1.

模型 2 为离散的非线性模型,其过程方程和观测方程分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= 1 + \sin(0.4\pi k) + 0.5\mathbf{x}_k + \nu_k; \\ \mathbf{z}_k &= \begin{cases} 0.2\mathbf{x}_k^2 + e_k, & k \leq 30 \\ 0.5\mathbf{x}_k - 2 + e_k, & k > 30 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

式中:过程噪声 $\nu_k \sim N(0, 0.2)$;观测噪声 $e_k \sim$

$N(0, 0.000\ 01)$.观测模型分为两段,分别采用不同的观测方程.在实验初始状态 $\mathbf{x}_1=1$,观测时间是 60 s ,蒙特卡罗仿真次数为 100 每次实验统计系统的 RMSE,结果如图 3 所示.最后,计算 RMSE 的均值和方差,结果见表 1.

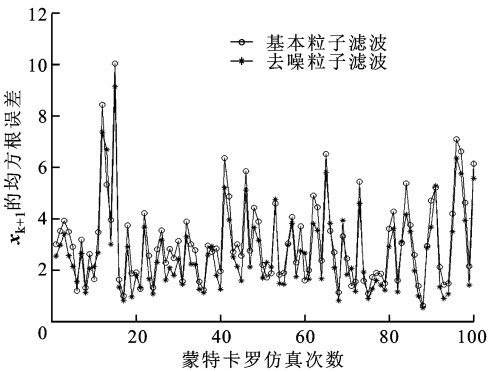


图 2 模型 1 的均方根误差

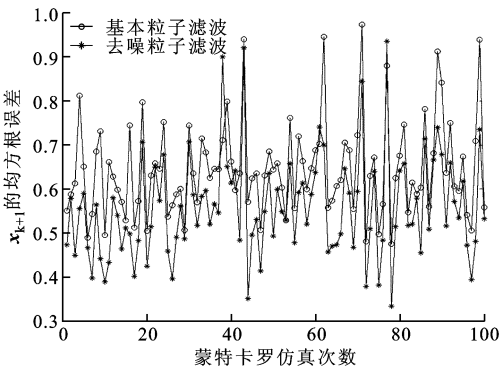


图 3 模型 2 的均方根误差

表 1 模型的均方根误差结果统计

模型	方法	均值	方差
模型 1	基本粒子滤波	3.107 4	2.862 4
	去噪粒子滤波	2.670 2	2.469 1
模型 2	基本粒子滤波	0.647 2	0.032 8
	去噪粒子滤波	0.568 4	0.021 7

从图 2、图 3 可以看出,去噪粒子滤波算法的 RMSE 曲线大体在基本粒子滤波算法的下方,而表 1 中模型 1、模型 2 的 RMSE 均值、方差都要比基本粒子滤波算法的小,所以去噪粒子滤波算法的 RMSE 均值分别降低了 14%、12%,方差分别降低了 13%、33%.这说明,通过噪声处理,降低了滤波误差,提高了滤波精度.模型 1 是线性的,模型 2 是非线性的,无论是哪一种系统,去噪粒子滤波算法均可取得较好的效果.可以预见,如果将去噪的思想引

入到其他改进的粒子滤波器中,同样会取得一定的效果,这是下一步工作需要思考的。

5 结束语

粒子滤波是近年来研究的热点之一,很多关于粒子滤波的改进算法都关注于重要性函数.本文将小波去噪的思想引入到粒子滤波之中,从噪声的角度来改进粒子滤波,同时从理论上阐述了去噪粒子滤波算法相对于基本粒子滤波算法的优越性,并通过仿真证明了去噪粒子滤波算法的有效性。

参考文献:

- [1] GREG W, BISHOP G. An introduction to the Kalman filter 95-041[R]. Chapel Hill, NC, USA: University of North Carolina at Chapel Hill. Department of Computer Science, 2003; 1-16.
- [2] DAUM F. Nonlinear filters beyond the Kalman filter [J]. IEEE A&E Systems Magazine, 2005, 20(8): 57-69.
- [3] Doucet A. On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering [EB/OL]. [2008-10-20]. <http://www.researchindex.com>.
- [4] VAN DER MERWE R, DOUCET A. The unscented particle filter advances in neural information processing systems [M]. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2000.
- [5] KOTECHA J H, DJURIC P M. Gaussian particle filtering [J]. IEEE Trans on Signal Process, 2003, 51(10): 259-260.
- [6] 石勇, 韩崇昭. 二阶中心差分粒子滤波算法 [J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(4): 409-413.
SHI Yong, HAN Chongzhao. Particle filter using second-order central difference [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42(4): 409-413.
- [7] FORD J J. Non-linear and robust filtering: from the Kalman filter to the particle filter [J]. DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory, 2002 (4): 1-39.
- [8] 孙延奎. 小波分析及其应用 [M]. 北京:机械工业出版社, 2005.

- [9] MALLAT S G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7): 674-693.
- [10] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Trans on Information Theory, 1995, 41(3): 613-627.

[本刊相关文献链接]

- 求积分卡尔曼粒子滤波算法. 2009, 43(2): 25-28.
- 二阶中心差分粒子滤波算法. 2008, 42(4): 409-413.
- 无线传感器网络下的粒子滤波分布式目标跟踪算法. 2007, 41(8): 912-916.
- 基于辅助粒子滤波的盲多用户检测快速算法. 2007, 41(6): 636-639.
- 用于弹道目标跟踪的有限差分扩展卡尔曼滤波算法. 2008, 42(2): 143-146.
- 多输入多输出系统中基于多级维纳滤波的均衡算法. 2008, 42(2): 218-221.
- 一种基于耦合矩阵的微带线带通滤波器的设计方法. 2007, 41(6): 679-682.
- 一种 Log-Gabor 滤波结合特征融合的虹膜识别方法. 2007, 41(8): 889-893.
- 移动数字电视调谐器中低噪声模拟滤波器的设计. 2009, 43(2): 72-76.
- 一种 Log-Gabor 滤波器结合多分辨率分析的虹膜识别方法. 2009, 43(4): 31-33.
- 一种自相似业务量预测的卡尔曼滤波算法. 2009, 43(4): 57-61.
- 基于小波变换的扩散滤波模型数值解的收敛性. 2009, 43(4): 121-124.
- 合成孔径雷达图像的最小均方误差线性最优滤波. 2009, 43(12): 6-10.
- 近似完全重构交替离散傅里叶变换调制滤波器组. 2008, 42(8): 1001-1005.

(编辑 苗凌)