

一种三维切削网格上的 N-S 方程离散方法

罗昔联^{1,2}, 顾兆林², 雷康斌³, 加濑究³

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安; 2. 西安交通大学人居环境与建筑工程学院, 710049, 西安;
3. 日本理化学研究所 VCAD 模型研究室, 351-0198, 日本和光市)

摘要: 针对一种计算流体力学的三维切削网格自动生成方法 Kitta Cube, 提出一种新的离散方法 (6+N 模型) 来描述和处理 Kitta Cube 中的任意三维切削网格. 该方法能避免对各种类型的切削网格进行穷举分析, 实现采用统一模式在三维切削网格上离散和求解 N-S 方程. 用该方法对三维同心球和偏心球之间环形通道内的自然对流换热进行模拟, 数值结果表明: 通过 Kitta Cube 能较精确地表达曲面, 面积误差在 1.0% 以内; 利用 6+N 模型能在该网格上实现复杂区域内的流动和传热模拟, 其数值精度与贴体网格相当, 误差在 0.5% 以内; 降低偏心球环形通道内部球心位置, 能增加自然对流的传热性能.

关键词: Kitta Cube; 实体 CAD; 切削网格; 自然对流

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)05-0015-06

A Novel Discretization Method for the N-S Equations on Three-Dimensional Cartesian Cut Cell

LUO Xilian^{1,2}, GU Zhaolin², LEI Kangbin³, KASE Kiwamu³

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. School of Human Settlement and Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 3. VCAD Modeling Team, Riken Institute, Wako 351-0198, Japan)

Abstract: A novel three-dimensional Cartesian cut cell algorithm, referred to as 6+N, is proposed to describe and treat arbitrary three-dimensional Kitta Cube. This method can avoid the enumeration for millions of cutting patterns and implement the discretization and solution of the N-S equations in a unified form. The present method is applied to simulate natural convection heat transfer in an annular tunnel between two concentric or eccentric spheres. The numerical results show that Kitta Cube can express curve surfaces accurately with an error of less than 1.0%. The accuracy of solutions obtained by the present method is approximately equivalent to that by the body-fitted method. In addition, higher overall heat transfer coefficients can be achieved by lowering the position of the inner sphere for eccentric arrangement.

Keywords: Kitta Cube; volume CAD; cut cell; natural convection

计算流体力学(CFD)和计算传热学在推向工程应用过程中所面临的一个重要问题就是网格的生成. 由于应用对象形状往往并不规则, 甚至特别复杂, 如飞行器、建筑物等, 这时网格生成所耗费的工

作量很大. 据对复杂区域内流动数值模拟的估计, 平均约 80% 的时间是花在网格生成上^[1], 因此针对复杂区域的网格自动生成技术是目前 CFD 研究的重要内容. 自 20 世纪 80 年代以来, 以三角形或四面体

作为基本单元的非结构化网格方法得到了快速的发展和广泛的应用^[2-3],成为了模拟复杂区域流动和传热问题的首选。但是,三角形或四面体网格在生成过程中需要首先对边界进行离散生成边界网格,然后根据边界网格生成计算区域背景网格,生成过程的前处理过程较复杂,难以真正实现自动生成。

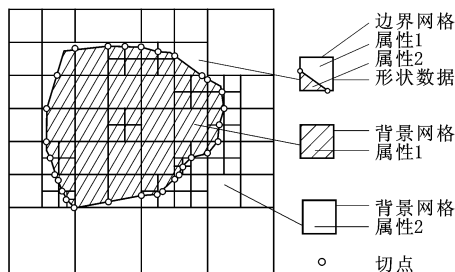
真正的网格自动生成只需用户给定计算区域表达(例如通过 CAD 描述的图形),就能全自动生成网格。基于直角坐标的切削网格方法^[4-5]是实现网格自动生成方法中最具有潜力的一种,其基本思路是用直角网格生成一个包含计算对象的背景区域,然后根据计算对象的轮廓与直角网格的交点进行切削运算,将位于计算区域外的网格去除,剩余部分就是计算网格。由于切削网格在生成过程中不需要单独对边界网格离散,因此可以真正实现网格的自动生成,减小网格生成的工作量。

Volume CAD 系统(简称 VCAD 或实体 CAD)是我们合作方日本理化学研究所正在开发的下一代三维 CAD 技术^[6]。针对目前广泛应用的切削网格算法 Marching Cubes^[7]对曲面的近似不够精确,并且存在将一个网格分割成多个小网格的可能性,在该 VCAD 系统中提出了一种新的切削网格算法 Kitta Cube 来表达复杂的曲面边界。针对这种网格方法,本文提出了一种可以在任意形状切削网格上离散 N-S 方程的有限体积离散方法(以下称 6+N 模型),从而可将之前研究的二维切削网格方法^[4-5]推广到三维,实现了根据 CAD 图形全自动生成计算网格,并在该网格上对 N-S 方程进行精确求解,为任意复杂三维区域的网格生成及流动、传热模拟提供了一个简单易行的新思路。

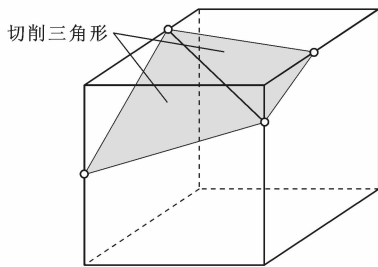
1 VCAD 系统及网格生成

用 VCAD 表达几何形状时,需首先定义一个包含整个物体在内的 VCAD 网格世界,然后根据网格与曲面的交点进行切削运算来近似表达物体的曲面边界。切削算法为 Kitta Cube 算法^[6],该算法的主要特点是:①所有切点都位于六面体网格的顶点或棱边上,且每个棱边最多有一个切点;②物体外形真实边界通过切削面近似,所有切削面都简化成三角形;③网格包含特定的属性,该属性既可以是几何特性,也可以是用户自定义的材料、物理、化学等任意属性。图 1a 为二维 VCAD 网格世界示意图,其中的背景网格被赋予了特定的材料属性,而边界网格除了包含材料属性以外,还包含了切点等形状数据,图

1b 为 Kitta Cube 的一个示例。在 VCAD 数据应用于 CFD 模拟时,将属性 1 设置为固体,属性 2 设置为流体,边界条件定义在切削三角形上,因此只需要对属性为流体的网格进行求解,而将 VCAD 数据用于有限元分析时,定义则刚好相反。



(a)二维 VCAD 网格世界



(b)Kitta Cube

图1 VCAD 网格世界及 Kitta Cube 示意图

2 控制方程及其离散

2.1 6+N 模型

对于不可压缩黏性流体流动,可以用以下通用控制方程进行描述

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho U\phi) = \text{div}(\Gamma_\phi \text{grad}\phi) + S_\phi \quad (1)$$

式中: ρ 为流体密度; t 为时间; U 为流体速度; ϕ 为通用求解变量; Γ_ϕ 为扩散系数; S_ϕ 为源项。将式(1)在任意控制容积 C_0 上积分,并且用散度定律将对流项和扩散项的体积分变换成面积分,可以得到下式

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \Delta V + \sum_{n=1}^M (F_{fn} \phi_{fn}) = \sum_{n=1}^M [(\Gamma_{fn} \nabla \phi_{fn}) \cdot A_{fn}] + S_\phi \Delta V \quad (2)$$

式中:下标 fn 表示控制容积的第 n 个面; F_{fn} 为流量; A_{fn} 为面积; ΔV 为网格体积; M 为控制容积的边(面)数。

对于常见的网格方法,如三角形网格,由于网格形状单一,式(2)中的 M 是一个定值,因此可以采用统一的数组保存网格几何数据,同时式(2)的进一步

离散和求解也可以采用统一方式实现. 对于切削网格方法, 由于网格形状具有多样性, M 的取值具有多种可能性, 以二维切削网格为例, 文献[4-5]将网格的可能性归纳为 6 种, 而在文献[8]中则分成 15 种, 对于三维切削网格方法, 如 Marching Cubes, 可能性有 256 种, 而对于本文研究的 Kitta Cube 算法, 则多达数百万种. 在网格的形状存在多种可能性的情况下, 对式(2)进行求解的过程需要借助穷举法对各种类型的切削方格分别处理, 在网格类型不多的二维情况下, 实现比较容易, 对于网格类型很多的三维情况, 则十分困难, 这也是目前三维切削网格方法应用还不广泛的一个重要原因.

从上述分析中可以得知, 利用有限体积法处理切削网格方法的一个重要难点就是网格类型太多, 导致网格形状及边数 M 不确定. 利用网格切削都是在六面体直角网格上进行这一特点, 本文提出用一种新的模式, 即 $6+N$ 模型来描述三维切削网格方法中的所有格子. 该模式中 6 代表六面体直角网格的 6 个基本面, N 则表示网格三角形切削面个数. 通过该模型, 式(2)中的 M 就可以表达为 $M=6+N$, 因此有

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\Delta V + \sum_{n=1}^{6+N} (F_{ln}\phi_{ln}) = \sum_{n=1}^{6+N} [(\Gamma_{ln}\nabla\phi_{ln}) \cdot A_{ln}] + S_{\phi}\Delta V \quad (3)$$

将基本面和切削三角形上的通量分开表达, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\Delta V + \sum_{n=1}^6 (F_{ln}\phi_{ln}) + \sum_{k=1}^N (F_{lk}\phi_{lk}) = \\ \sum_{n=1}^6 [(\Gamma_{ln}\nabla\phi_{ln}) \cdot A_{ln}] + \\ \sum_{k=1}^N [(\Gamma_{lk}\nabla\phi_{lk}) \cdot A_{lk}] + S_{\phi}\Delta V \end{aligned} \quad (4)$$

由于计算流体力学问题属于边值问题, 求解区域边界上的求解值需要提前给定, 而切削面又全部位于边界上, 如图 2 所示, 因此式(4)中切削面上的对流通量 $\sum_{k=1}^N (F_{lk}\phi_{lk})$ 和扩散通量 $\sum_{k=1}^N [(\Gamma_{lk}\nabla\phi_{lk}) \cdot A_{lk}]$ 可以通过给定的边界条件直接计算. 以图 2 网格的切削三角形 B_1 为例, 求解变量 ϕ 在 B_1 上的值等于给定的边界条件

$$\phi_{lk} = \phi_{B_1} \quad (5)$$

而边界上的变量梯度则假定等于网格中心梯度, 用 $6+N$ 模型和梯度重构方法计算

$$\nabla\phi_{lk} = \nabla\phi_{B_1} = \nabla\phi_{C_0}$$

$$\frac{1}{\Delta V} \left[\sum_{n=1}^6 (\phi_{ln}A_{ln}) + \sum_{k=1}^N (\phi_{lk}A_{lk}) \right] \quad (6)$$

因此式(4)中切削三角形上的通量可以纳入源项处理, 用 S_N 表示

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\Delta V + \sum_{n=1}^6 (F_{ln}\phi_{ln}) = \\ \sum_{n=1}^6 [(\Gamma_{ln}\nabla\phi_{ln}) \cdot A_{ln}] + S_{\phi}\Delta V + S_N \end{aligned} \quad (7)$$

切削会导致基本面只有部分面积为流体流通面积, 因此 A_{ln} 的计算需要考虑基本面的开口率(用 D_f 表示). 以图 2 网格的正面为例, 其开口率如图 3 所示, A_{ln} 通过下式确定

$$A_{ln} = D_f (A_{Fnx}\mathbf{i} + A_{Fny}\mathbf{j} + A_{Fnz}\mathbf{k}) \quad (8)$$

式中: A_{Fnx} 、 A_{Fny} 、 A_{Fnz} 为基本面在坐标轴方向的 3 个分量.

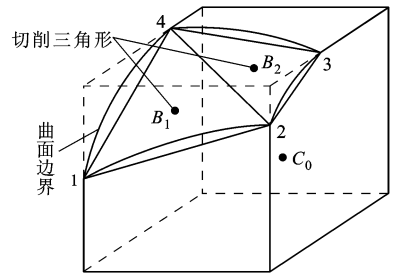


图 2 Kitta Cube 边界示意图

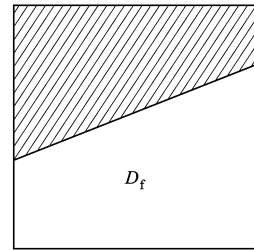


图 3 开口率示意图

2.2 方程的离散

通过 $6+N$ 模型, 将界面通量分解成基本面部分和切削三角形部分后, 切削三角形上的界面通量可根据边界条件直接确定, 而基本面上的对流、扩散通量以及方程源项的进一步离散与文献[4]所用方法相同, 其中压力与速度的耦合采用文献[9]中的方法. 此外, 式(4)中的时间项采用三层二阶隐式格式离散如下

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\Delta V = \frac{3\rho\phi_{C_0}^{t+1} - 4\rho\phi_{C_0}^t + \rho\phi_{C_0}^{t-1}}{2\Delta t}\Delta V \quad (9)$$

以上格式第一个时间步通过隐式欧拉方式实现, 如果计算对象为稳态问题, 则只执行第一个时间步长.

3 计算实例

三维球面之间的自然对流在核反应设计、电子冷却等方面具有重要作用,针对如图 4 所示的三维同心球面之间的自然对流的实验和数值研究已经广泛开展^[10-11]. 目前,针对同心球之间的自然对流主要是简化成二维后,采用柱坐标网格计算,对于三维的计算由于需要引入球坐标系统,控制方程需要通过坐标变换到球坐标系统上,过程相对比较烦琐,并且该方法对于三维偏心球面情况的应用更加复杂. 因此,目前对于偏心球的计算几乎没有报道,本文选取同心球下 3 个 Rayleigh 数 Ra 和两种偏心球工况作为考核,来验证 Kitta Cube 表达曲面的准确性,以及上述离散方法的有效性和精度. 所有工况下都取内外球的直径比 $d_i/d_o=0.5$,流体的普朗特数 Pr 取 0.7.

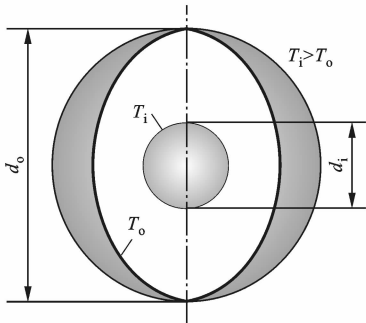
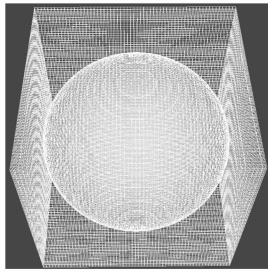


图 4 球面间环形通道示意图

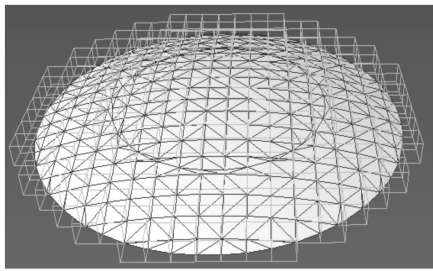
3.1 三维同心球

选取 $Ra=70, 3\ 000, 10\ 500$ 三个计算工况,在网格生成阶段,VCAD 网格世界的网格数取 $61\times 61\times 61$,其中属性为流体的计算网格数为 91 750 (计算区域网格数相当于 $45\times 45\times 45$),文献[10]采用贴体网格对该问题的一个二维剖面进行了模拟,在 $Ra<91\ 000$ 时网格数为 41×46 ,因此本文计算区域的空间解析大致与文献[10]相同. 图 5 所示为计算网格划分,其中图 5a 为 VCAD 网格世界,计算区域就包含在 VCAD 世界中,图 5b 所示为外部球顶部的局部网格. 从图中可以看出,球形表面是通过六面体网格上的切削三角形近似表达的,表达内表面和外表面的切削三角形的总面积计算值分别为 3.153 3 和 12.678 2,这与理论值 3.141 6 和 12.566 4 之间的误差分别为 0.37% 和 0.88%,说明 Kitta Cube 切削网格算法可以实现对曲面的精确表达.

由于同心球在几何上对称,并且在上述 Ra 范围内环形区域内的流动属于稳态流动^[10],因此可以



(a)VCAD 网格世界



(b)局部切削网格

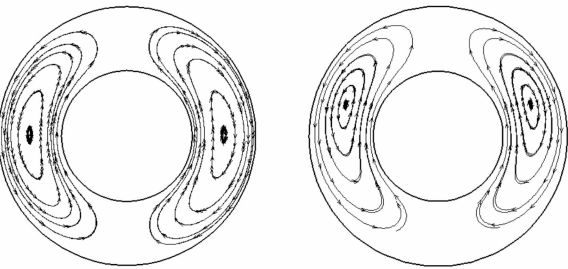
图 5 计算区域网格划分

取一个围绕 z 轴对称的剖面来分析流动和温度分布情况. 图 6 为同心工况下 $y=0$ 剖面上流线和温度的分布情况,在本文选择的 Ra 范围内,环形空间内的涡分布呈新月形,并且随着 Ra 的增大,涡的中心上移. 从温度分布图可以看出,在 Ra 很小($Ra=70$)的情况下,自然对流作用很弱,几乎可以忽略,因此温度的分布呈同心圆,导热换热起着主导作用,随着 Ra 的增加,自然对流作用加强,等温线的分布也开始变得扭曲,这与文献[10]中列出的规律一致.

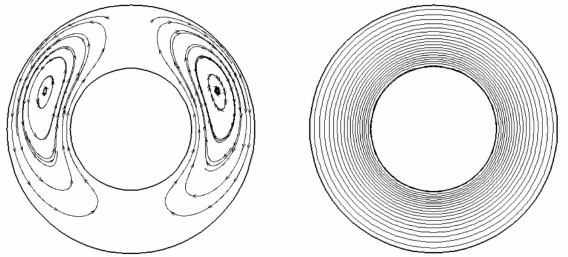
为了进一步对比计算精度,对内外球面的平均 Nusselt 数 $\overline{Nu}$ 进行了计算对比,内外表面 $\overline{Nu}$ 的计算表达式如下

$$\left. \begin{aligned} \overline{Nu}_i &= \frac{d_i}{A_i(T_i - T_o)d_o} \oint_{S_i} \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=r_i} ds \\ \overline{Nu}_o &= \frac{d_o}{A_o(T_i - T_o)d_i} \oint_{S_o} \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=r_o} ds \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

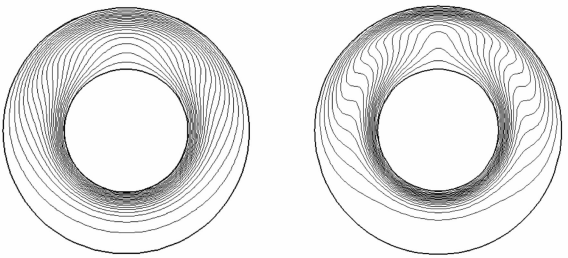
表 1 为内外表面 $\overline{Nu}$ 的计算值与文献[10]提供的参考值的对比,从表中可以得知,本文计算值与文献提供的参考值之间的差别很小,相对误差在 0.5% 以内. 通过式(10)计算的内外球表面的 $\overline{Nu}$ 理论上应该相同,这从表 1 中也得到了体现,在各 Ra 下,差别都很小,但本文计算的内外球面 $\overline{Nu}$ 之间的差别比参考值的差别要大,这主要是球表面采用切削三角形近似后,由式(10)中的积分面积计算误差所引起的.



(a) $Ra=70$ 的流线 (b) $Ra=3\ 000$ 的流线



(c) $Ra=10\ 500$ 的流线 (d) $Ra=70$ 的温度场



(e) $Ra=3\ 000$ 的温度场 (f) $Ra=10\ 500$ 的温度场

图 6 同心工况下 $y=0$ 剖面上流线和温度场分布

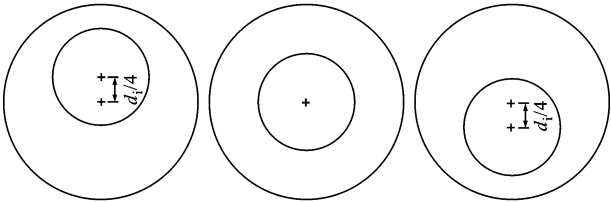
表 1 内外表面 $\overline{Nu}$ 的计算值与参考值

Ra	$\overline{Nu}_i$	$\overline{Nu}_o$	$\overline{Nu}_i^{[10]}$	$\overline{Nu}_o^{[10]}$
70	0.990 9	1.013 1	1.000 6	1.000 6
3 000	1.419 2	1.435 9	1.421 3	1.421 3
10 500	1.978 7	1.999 8	1.984 8	1.984 7

3.2 三维偏心球

内外球的几何参数与以上同心球取值相同,内部球中心沿 z 方向分别向上和向下偏移 $0.25d_i$,同时取同心球作为对比.图 7 为 3 种球心位置示意图,其中图 7a 所示工况为球心向上偏移,图 7c 所示工况为球心向下偏移,计算中取 $Ra=10^5$.

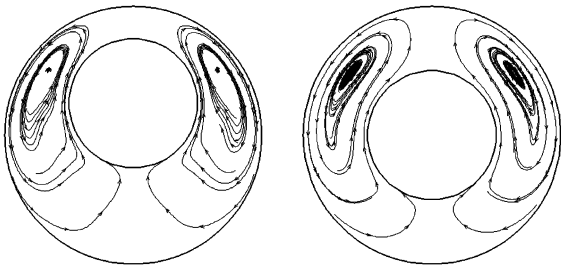
同样,由于流场和温度场沿 z 轴对称分布,可以选择一个对称面进行分析,图 8 为偏心工况下 $y=0$ 剖面上流线和温度场的分布.从流线的分布来看,由于计算中 Ra 较大,环形空间内的涡分布呈肾形分布,并且涡中心位置随着内部球心位置下移而下移.由于环形空间内的自然对流由内部热球面上升的热羽流所驱动,因此内部球心位置下移,环形区域上部



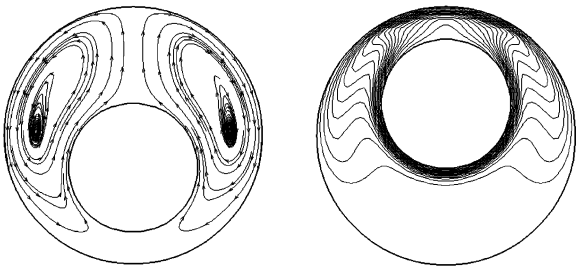
(a) 上偏心 (b) 同心 (c) 下偏心

图 7 偏心球中心位置示意图

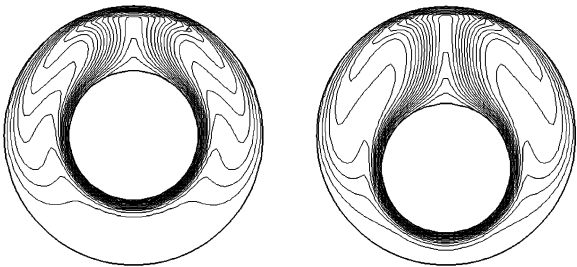
空隙的增大会增加自然对流的强度,这也体现在 3 种情况下随着内部球心位置下移,等温线的扭曲程度加深.表 2 所列为内外球面的 $\overline{Nu}$ 和换热量对比, $\overline{Nu}$ 和换热量随着内部球心位置的下移而增大,进一步说明了对流换热效果加强,这为今后设计和控制球面之间的换热提供了思路 and 理论支持.



(a) 上偏心流线 (b) 同心流线



(c) 下偏心流线 (d) 上偏心温度场



(e) 同心温度场 (f) 下偏心温度场

图 8 偏心工况下 $y=0$ 剖面上流线和温度场分布

表 2 内外球面的 $\overline{Nu}$ 及换热量计算值

球心位置	$\overline{Nu}_i$	$\overline{Nu}_o$	Q_i	Q_o
上偏心	3.104 1	3.125 1	1.029 1	1.042 2
同心	3.373 3	3.374 5	1.112 6	1.113 2
下偏心	3.485 6	3.502 1	1.154 8	1.163 8

4 结 论

(1) Kitta Cube 切削网格方法在生成过程中不需要对边界的单独离散, 可实现网格的自动生成, 并且可以精确实现对曲面的表达. 以本文计算的球面为例, 切削三角形表达的曲面面积与理论值之间的误差小于 1.0%, 同时由于背景网格为六面体网格, 在求解 N-S 方程时网格界面通量计算十分方便, 这为 CFD 技术推广到具有复杂形状的应用场合提供了一个新的思路.

(2) 本文针对 Kitta Cube 提出的 $6+N$ 离散模型, 可以统一描述可能性多达几百万种的切削网格, 并且利用该模型成功实现了任意形状切削网格上对 N-S 方程的离散和求解. 计算算例表明, 该网格方法的计算精度与贴体网格方法相当, 在网格数相同的情况下, 数值误差在 0.5% 以内.

(3) 通过对偏心球之间的自然对流的模拟, 得出了球心位置对球面之间传热效果的影响规律, 为航空和电子等领域设计应用这种结构提供了依据.

参考文献:

- [1] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [2] 张楚华, 谷传纲, 苗永森. NS 方程的非结构化网格方法及其差分格式[J]. 西安交通大学学报, 1999, 33(9): 58-61.
ZHANG Chuhua, GU Chuangang, MIAO Yongmiao. Unstructured grid method and its differential schemes for NS equations [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1999, 33(9): 58-61.
- [3] 徐明海, 陶文铨. 一种求解不可压 N-S 方程的非结构化网格方法[J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(1): 83-86.
XU Minghai, TAO Wenquan. Method on unstructured grid for incompressible flows [J]. Journal of Xi'an

Jiaotong University, 2005, 39(1): 83-86.

- [4] 罗昔联, 顾兆林, 雷康斌, 等. 一种求解 N-S 方程的自适应直角网格方法[J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(11): 11-17.
LUO Xilian, GU Zhaolin, LEI Kangbin, et al. An adaptive Cartesian grid method for the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(11): 11-17.
- [5] LUO X L, GU Z L, LEI K B, et al. Solution of N-S equations based on quadtree cut cell method[J]. Science in China, Series G: Physics, Mechanics & Astronomy, 2009, 52(6): 877-884.
- [6] KASE K, TESHIMA Y, USAMI S, et al. Volume CAD: CW-complexes based approach[J]. Computer-Aided Design, 2005, 37(14): 1509-1520.
- [7] LORENSEN W E, CLINE H E. Marching cubes: a high-resolution 3D surface construction algorithm [J]. Computer Graphics, 1987, 21(4): 163-169.
- [8] 孔铁全, 任钧国. 二叉树法网格划分的数据结构及算法设计[J]. 航空计算技术, 2003, 33(2): 82-84.
KONG Tiequan, REN Junguo. Data structured and algorithm of mesh generation by quadtree approach[J]. Aeronautical Computer Technique, 2003, 33(2): 82-84.
- [9] DATE A W. Complete pressure correction algorithm for solution of incompressible Navier-Stokes equations on a nonstaggered grid [J]. Numerical Heat Transfer: Part B, 1996, 29(4): 441-458.
- [10] GARG V K. Natural convection between concentric spheres [J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 1992, 35(8): 1935-1945.
- [11] TEERTSTRA P M, YOVANOVICH M M, CULHAM J R. Natural convection measurements for a concentric spherical enclosure[J]. Transactions of the ASME, 2006, 128(6): 580-587.

(编辑 荆树蓉)