

叶轮机械通道内压力的修正方程和数值模拟

陈浩¹, 李开泰², 王尚锦¹

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安; 2. 西安交通大学理学院, 710049, 西安)

摘要: 为了解决有限元法直接求解不可压流动存在离散 Babuska-Brezzi 条件限制而使得压力求解精度相对较低的问题, 根据维数分裂法思想提出了叶轮机械通道内二维流形上压力 Laplace-Beltrami 方程(LB-2D). 该椭圆型压力修正方程不受离散 Babuska-Brezzi 条件的限制, 因而可采用任意高阶有限元空间进行逼近. 另外, 由于维数分裂算法只需在二维流形上进行求解, 所以自然避免了三维窄边单元的问题. 以 NASA 低速大尺度离心叶轮(LSCC)作为算例, 在 3 个典型二维流形上定性、定量比较了 LB-2D 与 FLUENT 商业软件的计算结果, 结果表明: 相比来自 FLUENT 的相邻二维流形上的流场数据, LB-2D 能够给出与 FLUENT 基本一致的计算结果, 证实了压力 LB-2D 方程是可靠的.

关键词: Laplace-Beltrami 方程; 维数分裂法; 不可压流动; 叶轮机械

中图分类号: O343 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)11-0098-05

Pressure Correction Equation in Channel of Turbomachine and Numerical Simulation

CHEN Hao¹, LI Kaitai², WANG Shangjin¹

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A Laplace-Beltrami equation (LB-2D) of the 2D-manifolds was proposed on the basis of the dimensional split method to enhance pressure solution precision of the simulation on incompressible flow using the finite element method directly. The elliptic equation proposed for pressure correction can be approximated by the higher order element because it is not restricted by the B-B condition. The 3D strip cell can be avoided since pressure correction is only carried out on the 2D-manifolds according to the dimensional split method. In addition, the solution of LB-2D was qualitatively and quantitatively compared with that of FLUENT on three 2D-manifolds of the channel in a low speed centrifugal compressor (LSCC) from NASA. The results show that the flow field data by LB-2D are in reasonable consistency with those by FLUENT on the neighboring 2D-manifolds. It is likely that the pressure correction equation (LB-2D) is reliable.

Keywords: Laplace-Beltrami equation; dimensional split method; incompressible flow; turbomachine

叶轮机械通道内三维黏性流动的数值模拟存在着三大困难: 流动方程的强非线性、三维网格生成的复杂性以及复杂几何外形引起的边界层数值效应. 文献[1]首次提出的维数分裂方法以及文献[2-4]的

进一步发展和完善, 使得这一方法能够很好地克服后两大困难, 该方法的主要思想是将三维流动分裂成一系列二维流形或流面上的方程. 选择适当的流形, 可使得在求解流形上能够以任意小的距离靠近

通道固壁边界,从而有效提高边界层内的网格质量.此外,由于流动方程是在二维流形上求解的,所以只需生成简单的二维网格.

不可压流动是叶轮机械中一种比较重要的流动,由于其自身的特点,使得在采用有限元方法直接求解时,速度与压力有限元空间之间的组合必须满足离散 Babuska-Brezzi (B-B) 相容性条件^[5-6].一般而言,满足此条件的压力有限元空间的阶数比速度有限元空间低一阶,所以在用有限元方法直接求解不可压流动的前提下,压力的求解精度比速度的差.此外,在靠近叶片的固壁边界层内,由于流场数据变化剧烈,边界层内三维有限元网格在沿着固壁法向上的尺度会远小于切向尺度,这样便形成了所谓的三维窄边单元^[7],窄边单元的存在会影响有限元的计算结果.

本文按照维数分裂的思想,推导了二维流形上的压力 Laplace-Beltrami 方程,为从维数分裂法的角度解决上述问题提供了基础.在推导中,根据叶轮通道的特点应用了新的曲线坐标系^[8],使得推导和编程比较简洁.

1 几何准备

本文约定: α, β 的取值为 $\{1, 2\}$, i, j 的取值为 $\{1, 2, 3\}$,同时采用 Einstein 求和约定.离心叶轮通道 Ω_ϵ 的边界 $\partial\Omega_\epsilon = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_t \cup \Gamma_b \cup S_+ \cup S_-$,如图 1 所示.令叶轮的旋转角速度为 $\omega, (e_r, e_\theta, k)$ 是随叶轮一起旋转的圆柱坐标系的局部标架.又令 $\epsilon = \pi/N$,其中 N 为叶轮叶片数,于是相继两叶片间的角度为 2ϵ .将叶片中心面 S 定义成光滑映射 $R: D \rightarrow \mathcal{R}, D \subset \mathcal{R}$,这样叶片中心面上任意点 $R(x) \in S$ 都可以表示为

$$\begin{aligned} R(x) &= x^2 e_r + x^2 \Theta(x^1, x^2) e_\theta + x^1 k, \\ \forall x &= (x^1, x^2) \in D \end{aligned} \tag{1}$$

式中: $\Theta \in C^2(D, \mathcal{R})$ 是一光滑函数; $x = (x^1, x^2)$ 是曲面 S 的 Gauss 坐标系; D 是由 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{AD}$ 所围成 $\mathcal{R}$ 中的区域,如图 2 所示,而

$$\partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1, \gamma_0 = \widehat{AB} \cup \widehat{CD}, \gamma_1 = \widehat{BC} \cup \widehat{DA}$$

整个通道可以看成是由单参数 ξ 描述的曲面簇 S_ξ 形成的, ξ 为常数,其对应曲面 S_ξ ,曲面 S_ξ 是由曲面 S 旋转 $\xi\epsilon$ 形成的,如图 3 所示.因此,可以在 $\mathcal{R}$ 中建立一个新曲线坐标系 (x^1, x^2, ξ) ^[8],即

$$\begin{aligned} (r, \theta, z) &\rightarrow (x^1, x^2, \xi): x^1 = z, x^2 = r, \\ \xi &= \epsilon^{-1}(\theta - \Theta(x^1, x^2)) \end{aligned} \tag{2}$$

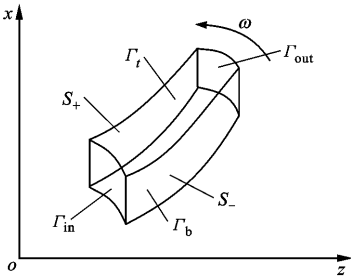


图 1 叶轮通道

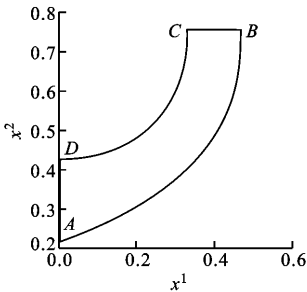


图 2 叶片在子午面上的投影

相应坐标变换的 Jacobian 为

$$J\left(\frac{\partial(r, \theta, z)}{\partial(x^1, x^2, \xi)}\right) = \epsilon \neq 0$$

所以此坐标变换是非奇异的.该坐标系对应的度量张量的协变 g_{ij} 、逆变分量 g^{ij} 以及行列式张量 ϵ_{ijk} 、 ϵ^{ijk} 和 Γ^i_{jk} (Christoffel) 的计算式参见文献[9],角速度 ω 和科里奥利 C 的逆变分量如下

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \omega; \quad \omega^2 = 0; \quad \omega^3 = -\omega\epsilon^{-1}\Theta_1 \\ C^1 &= 0; \quad C^2 = -2r\omega\Pi; \quad C^3 = 2\omega\epsilon^{-1}\left(r\Theta_2\Pi + \frac{w^2}{r}\right) \end{aligned}$$

$$\Pi = \epsilon w^3 + \Theta_a w^a$$

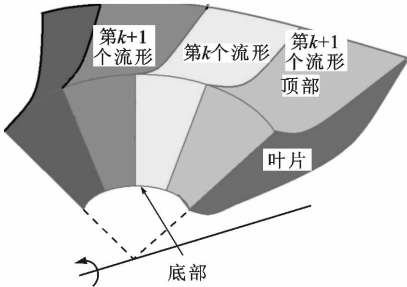


图 3 叶轮通道分裂示意

2 压力的修正方程

沿着叶轮旋转轴建立旋转参考系,参考系与叶轮具有相同的角速度 ω .于是,相应的不可压定常旋转三维 Navier-Stokes 方程为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{w}) &= 0 \\ -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \sigma^{ij}(\mathbf{w}) &= \nu(\nabla^i w^j + \nabla^j w^i) \\ \mathbf{f} &= \mathbf{F} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}') \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{w}$ 是相对速度; $\boldsymbol{\omega}$ 是旋转角速度; ν 是运动黏性系数; $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}$ 是科里奥利力; $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}')$ 是离心力, $\mathbf{R}'$ 是空间一点对应的半径向量; $\mathbf{f}$ 包括质量力和离心力; σ^{ij} 是应力张量的逆变分量。

对方程(3)中动量方程两边取散度 ∇_i , 并且有 $\nabla_i g^{ij} = \nabla_i g_{ij} = \nabla_i \epsilon^{ijk} = 0$, 则

$$\begin{aligned} -\nu \nabla_i \nabla_j \nabla^j w^i + \nabla_i (w^j \nabla_j w^i) + \\ \operatorname{div}(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}) + g^{ij} \nabla_i \nabla_j p = \nabla_i f^i \end{aligned} \quad (4)$$

对式(4)各项进行张量运算, 得到曲线坐标系 (x^a, ξ) 下压力 Laplace-Beltrami 方程

$$\left. \begin{aligned} \Delta p + \nabla_a w^\beta \nabla_\beta w^a + 2 \nabla_3 w^\beta \nabla_\beta w^3 + \\ \nabla_3 w^3 \nabla_3 w^3 - \frac{2\omega}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Pi(\mathbf{w}, \Theta)) = 2 |\boldsymbol{\omega}|^2 \\ \Delta p = \frac{1}{r\epsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x^a} (r\epsilon \frac{\partial p}{\partial x^a}) - \frac{\partial}{\partial \xi} (2r\Theta_\lambda \frac{\partial p}{\partial x^\lambda} + \right. \\ \left. (\Theta_2 + r\tilde{\Delta}\Theta) p) + (r\epsilon)^{-1} \alpha \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

并将方程(5)限制在 S_{ξ_k} 曲面上. 由于压力 Laplace-Beltrami 算子 Δp 可以沿着曲线坐标系分解成曲面 ξ_k 切平面上的 Membrane 算子和 Bending 算子 $-\Delta p = -\Delta_m p - \Delta_b p$, 所以可用中心差分来逼近出现在 Bending 算子 $\Delta_b p$ 中的关于 ξ 的偏导数. 这样, 便得到二维流形 S_{ξ_k} 上的压力 Laplace-Beltrami 方程

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^a} \left(r \frac{\partial p_k}{\partial x^a} \right) + a_\tau p_k &= F_k(\tau) \\ \partial_n p \big|_{\partial D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} a_\tau(x) &:= \frac{2a}{(r\epsilon\tau)^2} \geq 0 \\ F_k(\tau) &:= \frac{1}{r\epsilon} \left[(r\epsilon)^{-1} a \tilde{d}_{\pm 1}^2(p) - 2r\Theta K_\lambda d_k^1 \left(\frac{\partial p}{\partial x^\lambda} \right) - \right. \\ &\quad \left. (\Theta_2 + r\tilde{\Delta}\Theta) d_k^1(p) \right] - \frac{2\omega}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Pi(\mathbf{w}, \Theta)) - \\ &\quad 2 |\boldsymbol{\omega}|^2 + \nabla_a w^\beta(k) \nabla_\beta w^a(k) + \\ &\quad 2 \tilde{\nabla}_3 w^\beta(k) \nabla_\beta w^3(k) + \tilde{\nabla}_3 w^3 \tilde{\nabla}_3 w^3 \end{aligned}$$

由式(6)可以看出, 二维流形上的压力 Laplace-Beltrami 方程是单一椭圆型方程, 没有离散 B-B 条件的限制, 因此可以采用任意高阶有限元空间逼近.

由于维数分裂算法只需要在二维流形上进行求解, 不需要三维网格, 因此不存在三维窄边单元的问题. 这些特点使得压力 Laplace-Beltrami 方程为从维数分裂法的角度提高压力计算精度, 特别是叶片面上的压力计算精度提供了基础.

若曲面 S_{ξ_k} 为叶片面, 即 $\xi = \pm 1$, 则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w} \big|_{\xi=\pm 1} &= 0, \quad \nabla_a w^\beta = 0, \quad \nabla_\beta w^3(k) = 0 \\ \Pi(\mathbf{w}, \Theta) &= \partial_r \Pi(\mathbf{w}, \Theta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

于是由方程(5)得到叶片面 $S_{\pm 1}$ 上的简化压力 Laplace-Beltrami 方程为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^a} \left(r \frac{\partial p_{\pm 1}}{\partial x^a} \right) + a_{\pm 1} p_{\pm 1} &= F_{\pm 1}(\tau) \\ \partial_n p \big|_{\partial D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{\pm 1} &:= -\frac{a}{(r\epsilon\tau)^2} \\ F_{\pm 1}(\tau) &:= \frac{1}{r\epsilon} \left[(r\epsilon)^{-1} a \tilde{d}_{\pm 1}^2(p) - 2r\Theta_\lambda \tilde{d}_{\pm 1}^1 \left(\frac{\partial p}{\partial x^\lambda} \right) - \right. \\ &\quad \left. (\Theta_2 + r\tilde{\Delta}\Theta) \tilde{d}_{\pm 1}^1(p) \right] + (\tilde{d}_{\pm 1}^1(w^3))^2 - 2 |\boldsymbol{\omega}|^2 \end{aligned}$$

至此, 得到了流形 S_{ξ_k} 压力 Laplace-Beltrami 方程(6)和叶片面 $S_{\pm 1}$ 简化压力 Laplace-Beltrami 方程(8), 其中方程(6)的变分形式为

$$\left. \begin{aligned} p_k &\in L^2(D) \\ \left(r \frac{\partial p_k}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\frac{q}{r} \right) \right) + (a_\tau p_k, q) &= (F_k, q) \\ \forall q &\in L^2(D) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

3 数值算例

上述所推导的二维流形上的压力 Laplace-Beltrami 方程是正在发展中的叶轮机机械维数分裂算法的一部分, 此算法的另一主要部分是二维流形上的流动控制方程. 从本文描述中可以看出, 压力 LB-2D 方程的求解需要用到相邻二维流形上的流场数据. 按照维数分裂算法^[4], 相邻二维流形上的流场数据应该由二维流形上的流动控制方程来确定. 在完整的维数分裂算法基础上, 预期压力 LB-2D 方程能够提高由二维流形上流动控制方程所确定的压力计算精度, 然而目前基于新曲线坐标系的二维流形上流动控制方程正在研究之中, 因此无法提供算例与实验或理论解进行对比验证, 以说明 LB-2D 方程能够提高由二维流形上流动控制方程所确定的压力计算精度.

本文采用 NASA 低速大尺度离心叶轮(LSCC)作为算例,在不考虑叶片厚度和叶顶间隙的情况下,从 FLUENT 计算的流场中得到相邻二维流形上的流场数据,以此来计算压力 LB-2D 方程并与 FLUENT 的结果进行比较,目的是验证所推导的压力 LB-2D 方程的可靠性.

采用四边形元素剖分计算区域 D ,以 Q_1 作为四边形元素上的标准元建立 $L^2(D)$ 的有限元子空间 V_N ,得到方程(9)的有限元逼近. 叶轮为半开形式,叶片形状数据参见文献[10]. 设计点流量为 30 kg/s,对应转速为 1 862 r/min. 在不考虑叶片厚度和叶顶间隙的情况下,叶轮通道区域、FLUENT 计算所需网格以及压力 LB-2D 方程的计算网格如图 4、图 5 所示. 其中, LB-2D 二维网格单元数为 5 600,求解变量数为 5 796,流形间隔 $\tau=33 \mu\text{m}$, FLUENT 三维网格单元数为 30 万.

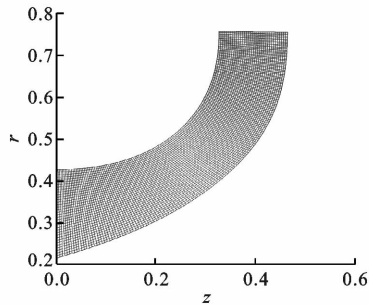


图 4 压力修正方程(LB-2D)的计算网格

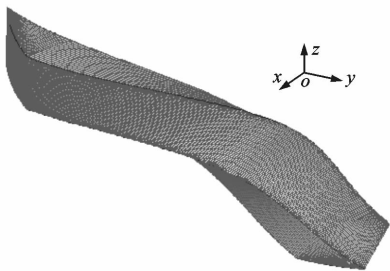


图 5 叶轮通道及其 FLUENT 计算网格

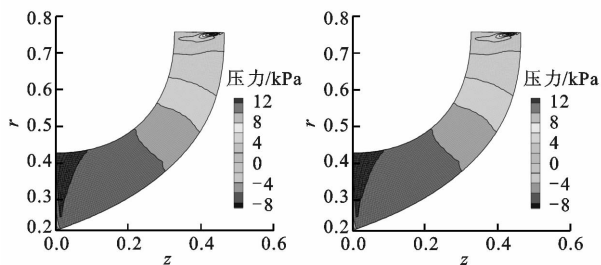
3.1 二维流形上压力分布

3 个典型二维流形上的压力分布在子午面上的投影与 FLUENT 的对比结果如图 6~图 8 所示.

由图 6~图 8 可知:压力面和吸力面上的压力分布与 FLUENT 结果一致;在流道中心面上的压力分布与 FLUENT 结果一致,说明二维流形上的压力 Laplace-Beltrami 方程是可靠的.

3.2 叶片功率计算

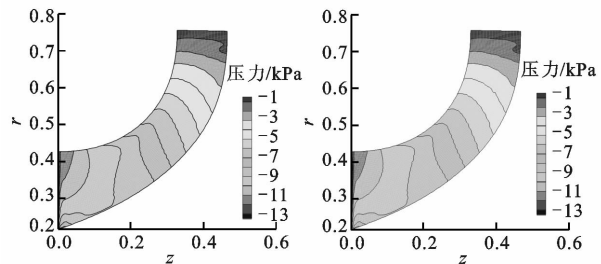
进一步定量地对 LB-2D 和 FLUENT 的结果进



(a) FLUENT 6.3

(b) LB-2D

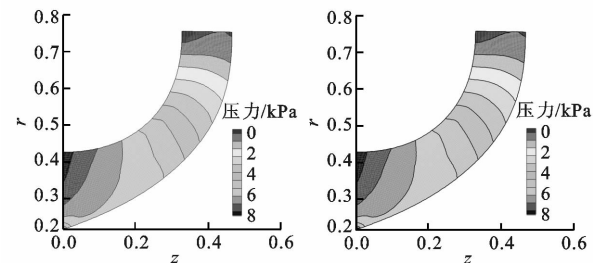
图 6 压力面上压力分布对比



(a) FLUENT 6.3

(b) LB-2D

图 7 吸力面上压力分布对比



(a) FLUENT 6.3

(b) LB-2D

图 8 通道中心面上压力分布对比

行比较,并根据下式计算叶片的气动力功率

$$W = \iint_{I_+ \cup I_-} \sigma_{ij} n^j r \omega (e_\theta)^i ds$$

式中:应力张量 $\sigma_{ij} = -p g_{ij} + \nu (g_{ji} \nabla_i \omega^j + g_{ij} \nabla_j \omega^i)$. 叶片面单位外法向矢量的逆变分量 $n^a = -x^2 \Theta_a / a^{1/2}$, $n^3 = (1 + r^2 \Theta_2^2) / (\epsilon r a^{1/2})$, 圆柱坐标系 e_θ 的逆变分量 $(e_\theta)^a = 0$, $(e_\theta)^3 = (\epsilon r)^{-1}$, 则有叶片面面积微元 $ds = a^{1/2} dx^1 dx^2$. 于是,由 LB-2D 所得功率为 13 975 W,由 FLUENT 所得功率为 13 973 W,这进一步说明二维流形上的压力 Laplace-Beltrami 方程是可靠的.

4 结 论

本文运用经典的张量分析方法,结合旋转三维不可压 Navier-Stokes 方程,经取散度得到新曲线坐

标系下叶轮的三维压力 Laplace-Beltrami 方程. 从维数分裂的基本思想出发, 用差分算子近似新曲线坐标系下三维压力方程中出现的 bending 算子, 从而推导出任意二维流形上的压力 Laplace-Beltrami 方程, 并且针对叶片面速度无滑移特点, 给出了叶片面上的简化压力方程. 最后, 给出了与商业软件的对比结果, 说明本文压力 Laplace-Beltrami 方程的正确性, 其为进一步发展叶轮机械中的维数分裂算法奠定了基础.

参考文献:

- [1] LI Kaitai, HUANG Aixiang. Mathematical aspect of the stream-function equations of compressible turbomachinery flow and their finite element approximation using optimal control [J]. *Comp Mech Appl Mech and Eng*, 1983, 41(2): 175-194.
- [2] LI Kaitai, HUANG Aixiang, ZHANG Wenling. A dimension split method for the 3-D compressible Navier-Stokes equations in turbomachine [J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2002, 18(1): 1-14.
- [3] LI Kaitai, JIA Huilian. The Navier-Stokes equations on stream surface and its dimension split method [J]. *Acta Math Sci*, 2008, 28A(2): 266-282.
- [4] 李开泰, 刘德民. 透平机械内部三维可压缩 Navier-Stokes 方程的流面方法和维数分裂算法 [J]. *应用数学学报*, 2008, 31(3): 397-418.
LI Kaitai, LIU Demin. The stream surface method and dimension split method for 3D viscous compressible flow in turbomachinery [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2008, 31(3): 397-418.
- [5] BABUSKA I. Error bounds for finite element method [J]. *Numer Math*, 1971, 16: 322-333.
- [6] BREZZI F. On the existence uniqueness and approximation of saddle-point problem arising from Lagrangian multipliers [J]. *SIAM J Numer Anal*, 1974, 13: 185-197.
- [7] 石东洋, 梁惠. 一个新的非常规 Hermite 型各向异性矩形元的超收敛分析及外推 [J]. *计算数学*, 2005, 27(4): 369-382.
SHI Dongyang, LIANG Hui. Superconvergence analysis and extrapolation of a new unconventional Hermite-type anisotropic rectangular element [J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2005, 27(4): 369-382.
- [8] LI Kaitai, SU Jian, GAO Limin. Optimal shape design for blade's surface of an impeller via the Navier-Stokes equations [J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2006, 22(6): 657-676.
- [9] 李开泰, 黄艾香. 张量分析及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [10] HATHAWAY M D, CHRISS R M, WOOD J R, et al. Experimental and computational investigation of the NASA low speed centrifugal compressor flow field [J]. *ASME Journal of Turbomachinery*, 1993, 115(3): 527-542.

(编辑 苗凌)