

内嵌自主移动钢球欧拉梁自适应碰撞减振研究

王建伟^{1,2}, 徐晖^{1,2}, 马宁^{1,2}

(1. 西安交通大学航天航空学院, 710049, 西安; 2. 西安交通大学强度与振动教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 结合内嵌自主移动质量子系统梁/板实验平台的实验结果, 对共振激励下的内嵌自主移动钢球欧拉梁自适应碰撞减振系统进行了研究. 采用弹簧-阻尼表现碰撞过程中的弹性恢复与能量耗散, 将碰撞机制转化为线性弹簧-阻尼模型, 并基于赫兹接触理论对相关参数进行了估算. 通过分析建立了碰撞的开始与结束条件, 以及系统的分段线性动力学控制方程, 数值计算结果充分表明了内嵌自主移动钢球自适应碰撞减振的内在机理与有效性. 在钢球随机碰撞作用下, 梁的振动响应为概周期振动, 一阶共振激励下单个钢球的碰撞减振效果为 7.5%, 二阶共振激励下为 6.1%. 通过与假定钢球在其他位置实施碰撞减振的效果进行比较, 证明了内嵌钢球的自适应碰撞减振特性.

关键词: 自主移动钢球; 自适应; 碰撞减振; 弹簧-阻尼模型; 赫兹接触理论

中图分类号: O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)11-0103-06

Vibration Suppression via Adaptive Impacts for Euler Beam with Interior Inlaid Freely Moving Steel Ball

WANG Jianwei^{1,2}, XU Hui^{1,2}, MA Ning^{1,2}

(1. School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. MOE Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Combining the experiments carried out in the experimental workbench for beam and plate with interior inlaid freely moving mass, a self-adaptive impact vibration suppression system, i. e. a Euler beam with an interior inlaid freely moving steel ball under the principal resonant harmonic excitation, is investigated. In the theoretical analysis, a linear spring-damping model is employed to simulate the impact mechanism between steel ball and beam interior walls, where the elastic recovery and energy dissipation in impacts are respectively characterized by the spring and damping in the model, and relative parameters are also determined according to the Hertz contact theory. Then for the impact system, the linear piecewise dynamic equations and the beginning and ending conditions for impacts are all established. Numerical results demonstrate the inherent mechanism and effectiveness of adaptive impact damping for the steel ball in suppressing the beam vibration, and the vibration is reduced by 7.5% and 6.1% respectively under the first and second principal resonant harmonic excitations. Moreover, the beam vibration does not get periodic but quasi-periodic. Assuming that the impacts take place on a virtual location instead of the actual location observed in experiments, the self-adaptive impact damping characteristic is proved for the steel ball.

Keywords: interior inlaid freely moving steel ball; self-adaptive; vibration suppression by impact; spring-damping model; Hertz contact theory

为实现部件/结构的平稳运行和准确定位,对有害振动的抑制是一个不可忽略的问题.为此,人们开发出了各种控制策略与手段,其中在工程领域,被动控制方法以其稳定、有效、简便等特点而得以广泛应用^[1].通过对传统被动振动控制的阻尼机制进行全新设计,本课题组提出了一种新的振动控制策略——内嵌自主移动质量自适应减振^[2-4],并在实验中尝试将多种阻尼介质(包括水、硅油、钢球或它们的组合)应用于梁、板的振动控制上,取得了较好的减振效果.在实验的基础上,张兄文等^[4]运用 FLU-ENT 软件对共振激励模式下的内嵌黏性流体悬臂梁自适应减振模型进行了数值模拟;成建联等^[2]研究了旋转突停工况下内嵌自主移动钢球对悬臂梁残余衰减振动的抑制效果,其中内嵌钢球被简化为一个嵌于梁内部的碰撞阻尼器,从而使得碰撞引起的速度突变可直接由动量定理加以计算.

本文通过实验研究了一、二阶共振激励下的内嵌自主移动钢球悬臂梁自适应碰撞减振系统,并通过对碰撞机制的模拟以及对模型动力学特性的分析,揭示了内嵌自主移动钢球碰撞减振的内在机理与有效性.

1 实验简介

图 1 所示为本课题组独立研发的内嵌自主移动质量子系统梁/板实验平台,可进行非旋转态与旋转态两种模式下的减振性能实验研究.在本文的实验中,钢球作为阻尼介质被置于一个铝质梁的内部封闭空腔内,位于梁根部的激振器对梁实施共振激励,振动信号由安装于梁自由端的传感器输出.从实验中观察到,钢球自主地移动至梁振动最强处对梁进行碰撞减振,即在一阶共振激励下移动至梁的自由端部(见图 2),在二阶共振激励下移动至自由端部或固定端与自由端之间的另一个振动峰值处.钢球所表现出的这种自主移动能力我们称之为自适应减振特性,这与以流体作为内嵌介质时的情形颇为类似^[3-4].实验中将梁自由端的振动位移控制在 2.5 cm 之内,结果表明单个钢球在一阶共振激励下的减振效果为 8.9%,在二阶共振激励下为 6.7%.随钢球数目增加,减振效果也逐渐增强.整个系统的主要特征参数如表 1 所示.

2 线性弹簧-阻尼碰撞模型

碰撞机制的模拟是进行理论分析的关键点之一.从数学上来讲,可以借助现代接触理论建立积分

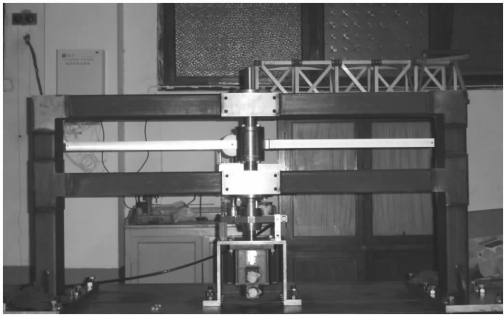


图 1 内嵌自主移动质量子系统梁/板实验平台

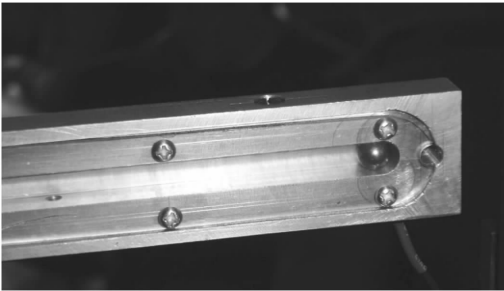


图 2 一阶共振激励下钢球自主移动至梁的自由端部

表 1 碰撞减振系统的主要特征参数

对象	参数	参数值
铝质 悬臂梁	外观尺寸/ $m \times m \times m$	$0.6 \times 0.012 \times 0.03$
	弹性模量/ $GN \cdot m^{-2}$	70
	横截面积/ m^2	2.96×10^{-4}
	质量/kg	0.5
	空腔尺寸/ $m \times m \times m$	$0.55 \times 0.008 \times 0.008$
	泊松比	0.34
	截面惯性矩/ m^4	2.13×10^{-9}
	密度/ $kg \cdot m^{-3}$	2.7×10^3
钢球	质量/kg	9×10^{-4}
	直径/m	6×10^{-3}
	弹性模量/ $GN \cdot m^{-2}$	200
	泊松比	0.25
弹簧-阻尼 模型	密度/ $kg \cdot m^{-3}$	7.8×10^3
	等效接触刚度/ $N \cdot m^{-1}$	4.2×10^5
	等效阻尼/ $N \cdot s \cdot m^{-1}$	4.4

微分方程来对碰撞行为进行准确细致的表述,但是方程本身的高度非线性特征导致分析与求解非常复杂,因而不利于实际应用^[5-6].在工程上,对于具有有限自由度的质量块间的碰撞,多采用动量定理配合以弹性恢复系数来计算质量块在碰撞过程中的速度突变,但是这种处理方式不能推广至涉及无限自由

度连续体的碰撞中. 另一种较为常用的方法是采用弹簧-阻尼模型对碰撞进行模拟,这种方法对质量块与连续体的碰撞均适用,此时碰撞机制最终可归结为两个模型参数:等效接触刚度 k_1 与等效阻尼 c_1 ^[7].

参数的确定一般是通过实验,或采用赫兹接触理论进行估算,本文采用后者. 对于经典的两球体弹性接触模型,设 P_n 为法向静态载荷, Δ 为接触压缩量, R_i 为球体半径, μ_i 为泊松比, E_i 为弹性模量, $k_i = (1 - \mu_i^2) / (\pi E_i)$ 为材料系数,则依据赫兹接触理论有

$$P_n = \frac{4(R_1 R_2)^{1/2}}{3\pi(k_1 + k_2)(R_1 + R_2)^{1/2}} \Delta^{3/2} \quad (1)$$

根据式(1),学者们提出了多种弹簧-阻尼碰撞模型. 本文在此采用线性弹簧-阻尼模型(见图 3),这需要对式(1)进行线性化处理,首先须对 Δ 的量级进行估算. 在通过实验确定参数的方法中, Δ 的值为测量值之一. 这里采用经验公式 $\Delta \leq 1\% R$ 来估算 Δ 的量级^[7],式中 $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ 为当量接触半径. 于是,由式(1)得

$$P_n = \left(\Delta^{1/2} \frac{4(R_1 R_2)^{1/2}}{3\pi(k_1 + k_2)(R_1 + R_2)^{1/2}} \right) \Delta = k_1 \Delta \quad (2)$$

碰撞过程的能量损失则由材料恢复系数 e 来表征(本文取 $e = 0.7$),根据能量守恒原理可导出等效阻尼 c_1 的表达式^[7]

$$c_1 = \frac{-2 \ln e (k_1 m)^{1/2}}{(\ln^2 e + \pi^2)^{1/2}} \quad (3)$$

式中: $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 为碰撞等效质量.

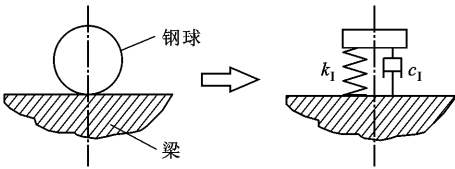


图 3 线性弹簧-阻尼模型

3 碰撞系统分段线性动力学方程

图 4 为根据实验对象所建立的内嵌自主移动钢球悬臂梁自适应碰撞减振系统理论分析模型,图中 Ω 表示施加于梁固定端附近(实验为距离固定端 5 cm 处)的共振激励. 视梁为欧拉梁,则无内置钢球或有钢球但无碰撞发生时,梁的受迫振动方程为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \bar{F} \sin(\omega t) \delta(x - x_E) \quad (4)$$

式中: EI 为梁的 y 向抗弯刚度; c 为梁的阻尼; w 为梁的振动位移; $\bar{F}$ 为激励幅值; $\delta(\cdot)$ 为狄拉克函数; x_E 为激励位置; ω_i 为梁的 i 阶共振频率.

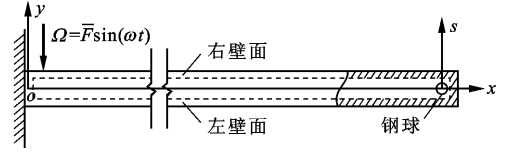


图 4 碰撞系统理论分析模型

在没有发生碰撞时,设钢球的位移为 s ,质量为 m_B ,忽略它与梁内腔壁面间的摩擦力,则其运动方程可简单地表示为

$$m_B \frac{d^2 s}{dt^2} = 0 \quad (5)$$

当钢球与梁发生碰撞时,设梁内封闭腔的 y 向尺寸为 h_c ,则振动时封闭腔左、右壁面(参见图 4)的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} s_R &= w(x, t) + h_c/2 \\ s_L &= w(x, t) - h_c/2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在碰撞开始或结束的瞬时,钢球与内腔壁面间的距离为钢球的半径 r_B . 设 x_1 表示碰撞发生的位置,以与右壁面碰撞时的情形为例,碰撞开始与结束的判定条件可表示为

$$s_R(x_1, t) - s(t) = r_B \quad (7)$$

采用线性弹簧-阻尼模型模拟碰撞机制,仍以与右壁面碰撞时的情形为例,通过力学分析可得碰撞时梁的动力学方程为

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & \left\{ c_1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds_R(x_1, t)}{dt} \right) + \right. \\ & \left. k_1 [r_B - (s_R(x_1, t) - s(t))] \right\} \delta(x - x_1) + \\ & \bar{F} \sin(\omega t) \delta(x - x_E) \end{aligned} \quad (8)$$

钢球的运动方程为

$$\begin{aligned} m_B \frac{d^2 s}{dt^2} + c_1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds_R(x_1, t)}{dt} \right) + \\ k_1 [r_B - (s_R(x_1, t) - s(t))] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

用同样的方法,可得钢球与左壁面发生碰撞时系统的动力学方程与相应的碰撞条件. 设系统的初始条件为

$$\left. \begin{aligned} w(x, t) \Big|_{t=0} &= 0, & s \Big|_{t=0} &= 0 \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, & \frac{ds}{dt} \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

为便于对上述方程进行分析,现引入如下归一化量

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{\omega}{L}; \quad S = \frac{s}{L}; \quad T = \frac{t}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2}; \\
 C &= \frac{dL^2}{(EI\rho A)^{1/2}}; \quad C_1 = \frac{c_1 L}{(EI\rho A)^{1/2}}; \quad K_1 = \frac{k_1 L^3}{EI}; \\
 M &= \frac{m_B}{L\rho A}; \quad F = \frac{L^2 \bar{F}}{EI}; \quad \tilde{\omega}_i = L^2 \omega_i \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/2}
 \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)分别代入式(4)、(5)、(7)~(10),可得

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + C \frac{\partial W}{\partial T} + \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} = F \sin(\tilde{\omega}_i T) \delta(X - X_E) \quad (12)$$

$$M \frac{d^2 S}{dT^2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + C \frac{\partial W}{\partial T} + \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} = \left\{ C_1 \left(\frac{dS}{dT} - \frac{dS_R(X_1, T)}{dT} \right) + \right.$$

$$\left. K_1 [R_B - (S_R(X_1, T) - S(T))] \right\} \delta(X - X_1) + F \sin(\tilde{\omega}_i T) \delta(X - X_E) \quad (14)$$

$$S_R(X_1, T) - S(T) = R_B \quad (15)$$

$$M \frac{d^2 S}{dT^2} + C_1 \left(\frac{dS}{dT} - \frac{dS_R(X_1, T)}{dT} \right) + K_1 [R_B - (S_R(X_1, T) - S(T))] = 0 \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} W(X, T) \Big|_{T=0} &= 0, \quad S \Big|_{T=0} = 0 \\ \frac{\partial W(X, T)}{\partial T} \Big|_{T=0} &= 0, \quad \frac{dS}{dT} \Big|_{T=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

现采用假设模态法对上述方程进行进一步处理,设 $\phi_i(X)$ 为第 i 阶假设模态, $\eta_i(T)$ 为相应的模态坐标,则依照梁的约束条件,其归一化振动位移 W 可表示为

$$W(X, T) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(T) \phi_i(X) \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned}
 \phi_i(X) &= \cos(\kappa_i X) - \text{ch}(\kappa_i X) + \\
 &\quad r_i [\sin(\kappa_i X) - \text{sh}(\kappa_i X)] \\
 r_i &= \frac{\sin \kappa_i - \text{sh} \kappa_i}{\cos \kappa_i + \text{ch} \kappa_i}
 \end{aligned}$$

$$\kappa_1 = 1.875, \quad \kappa_2 = 4.694, \quad \kappa_i = (i - 0.5)\pi, \quad i \geq 3$$

作为近似计算,舍去式(18)中二阶以上的高阶模态,将其代入式(12)、(14)以及式(17)中的第一式,可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \eta_1}{dT^2} + a_1 \frac{d\eta_1}{dT} + a_2 \eta_1 &= a_3 \sin(\tilde{\omega}_i T) \\ \frac{d^2 \eta_2}{dT^2} + b_1 \frac{d\eta_2}{dT} + b_2 \eta_2 &= b_3 \sin(\tilde{\omega}_i T) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \eta_1}{dT^2} + a_1 \frac{d\eta_1}{dT} + a_2 \eta_1 &= a_3 \sin(\tilde{\omega}_i T) + \\ a_4 \left\{ C_1 \left(\frac{dS}{dT} - \frac{dS_R(X_1, T)}{dT} \right) + \right. & \\ K_1 [R_B - (S_R(X_1, T) - S(T))] \Big\} & \\ \frac{d^2 \eta_2}{dT^2} + b_1 \frac{d\eta_2}{dT} + b_2 \eta_2 &= b_3 \sin(\tilde{\omega}_i T) + \\ b_4 \left\{ C_1 \left(\frac{dS}{dT} - \frac{dS_R(X_1, T)}{dT} \right) + \right. & \\ K_1 [R_B - (S_R(X_1, T) - S(T))] \Big\} & \\ \eta_1 \Big|_{T=0} = 0; \quad \eta_2 \Big|_{T=0} = 0; & \\ \frac{d\eta_1}{dT} \Big|_{T=0} = 0; \quad \frac{d\eta_2}{dT} \Big|_{T=0} = 0 & \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(19)、(20)中的系数 a_i 和 b_i 由相应的计算式确定.令 $q_1 = \eta_1, q_2 = \dot{\eta}_1, q_3 = \eta_2, q_4 = \dot{\eta}_2, q_5 = S, q_6 = \dot{S}$,由式(13)、(19)即可得到未发生碰撞时系统的状态空间方程,由式(16)、(20)可得系统发生碰撞(右壁面碰撞)时的状态空间方程,囿于篇幅,这里不再列出.

4 钢球自适应碰撞减振性能分析

前面已说明,本文研究的是一、二阶共振激励下内嵌自主移动钢球的自适应碰撞减振问题.去掉式(19)2个方程中等号右边的简谐激励项,可得欧拉梁归一化模态坐标下的自由振动方程,计算可知梁的一、二阶主频率为 $\tilde{\omega}_1 = 3.4799, \tilde{\omega}_2 = 21.8097$.实验测得梁的主频率为 $f_1 = 21 \text{ Hz}, f_2 = 140 \text{ Hz}$,经归一化转化后与计算值吻合极好.

采用四阶龙格-库塔法对碰撞系统的状态空间方程进行求解.对于一阶共振激励,当无内嵌钢球时,梁的振动响应位移与相图如图5所示.

当内嵌单个钢球时,由实验结果中钢球的自适应特性可知:在一阶主共振激励作用下,钢球自主地移动至梁振动强度最大的自由端,实施碰撞减振.为降低编程的难度,这里不对钢球的暂态移动过程进行模拟,而直接将其放置于欧拉梁的自由端部,即直接将式(8)中表征碰撞位置的参数 x_1 设为梁长 L .计算结果如图6所示.

为了验证钢球的自适应性,这里假定钢球在梁的中间位置进行碰撞减振,即令 $x_1 = L/2$,计算结果如图7所示.实验过程中我们还针对多个钢球的联合减振进行了分析.为了降低编程的难度,采用增加

单个钢球质量的方法来近似模拟多个钢球碰撞减振的情形,图 8 为 2 倍质量钢球在自由端碰撞减振时梁的振动响应位移.

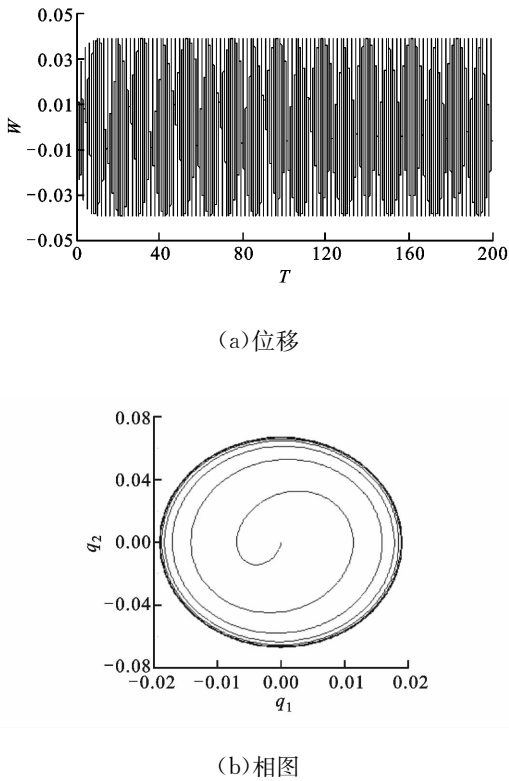


图 5 无钢球时梁自由端的振动响应位移及相图

图 9 为上述各种情况下欧拉梁振动响应位移的对比,结果充分显示了内嵌自主移动钢球自适应减振的有效性. 相对于空梁振动响应,加入钢球后梁的振动响应幅值明显降低,且由于内嵌钢球碰撞的随机性,导致梁振动响应的幅值出现小幅波动(见图 9),此时梁的响应严格地说应属概周期振动,所以在评价钢球的减振效果时,应取多个周期内响应幅值的平均值与空梁响应幅值作比较. 由图 9 可知,一阶共振激励下单个单倍质量钢球稳定移动至梁自由端实施碰撞减振时,减振效果为 7.5%,这与实验结果(8.9%)基本相符. 通过比较图 9 中的曲线 2、3,可充分说明钢球碰撞减振的自适应特性,即根据梁振动的情况,钢球自主地移动至梁振动最大的地方,实现最优的碰撞减振,这种特性在一般的被动减振控制方法中极为少见,体现了内嵌自主移动质量自适应减振理论的优越性. 比较图 9 中的曲线 1、2 可知,随钢球质量增加,减振效果增强.

二阶共振激励下的情形与一阶的情形类似,钢球的自适应特性体现为当其位于距梁固定端 260 mm 处或自由端时,碰撞减振效果最佳,达 6.1 %

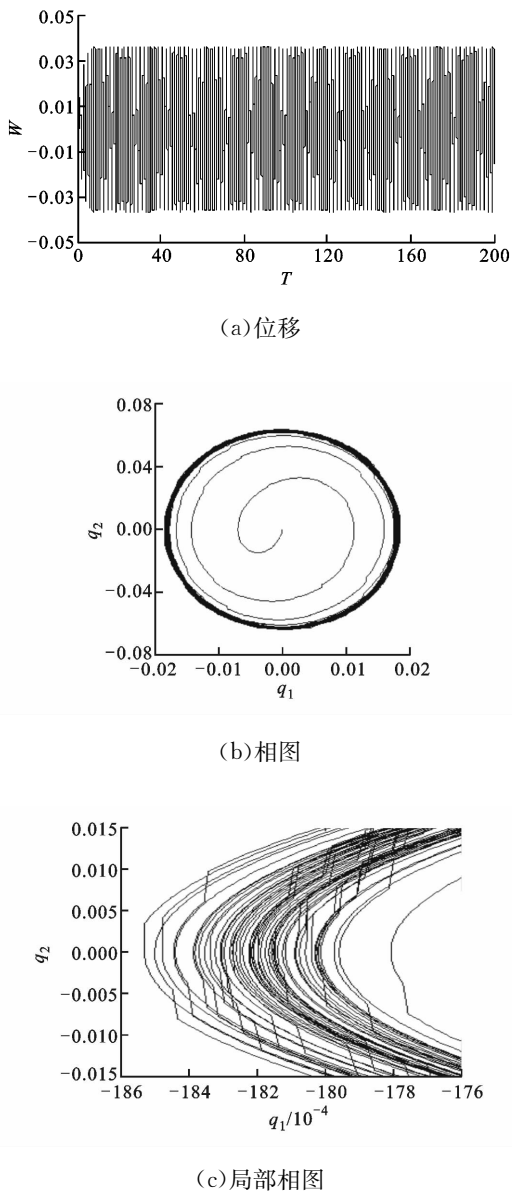


图 6 内嵌钢球位于梁自由端时自由端的振动响应位移及相图

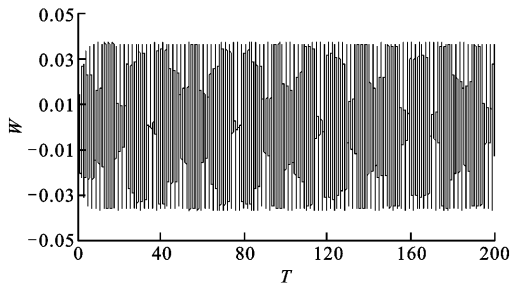


图 7 假定钢球位于中间位置时梁自由端的振动响应位移

(实验结果为 6.7%). 受篇幅所限,二阶共振激励下的计算结果这里不再赘述.

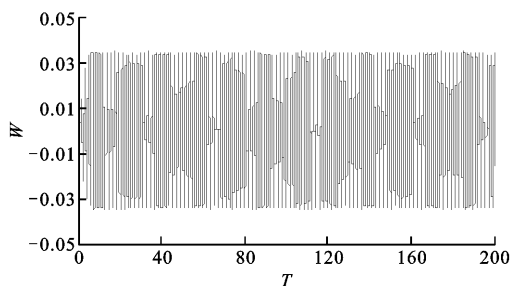
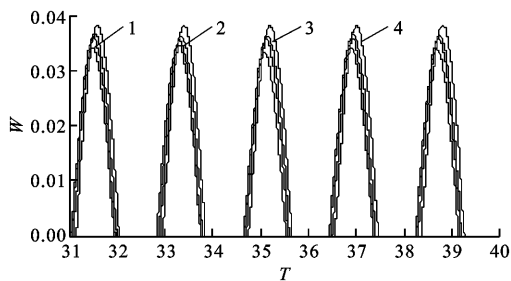


图8 内嵌2倍质量钢球位于梁自由端时自由端的振动响应位移



1:2倍质量钢球位于梁自由端; 2:单倍质量钢球位于梁自由端;
3:假定单倍质量钢球位于梁中部; 4:无钢球

图9 各种情况下梁自由端的振动响应位移对比

5 结 语

本文结合稳态激励实验,研究了共振激振模式下的内嵌自主移动钢球欧拉梁自适应碰撞减振系统.采用线性弹簧-阻尼模型模拟了钢球与梁之间的碰撞机制,通过力学分析导出了整个系统的分段线性动力学控制方程及碰撞开始与结束的判定条件.运用参数归一化、实验模态法等方法对上述方程进行处理,获得了碰撞系统在有限自由度下的归一化状态空间方程.数值计算的结果充分揭示了主共振激振模式下内嵌钢球自适应碰撞减振的内在机理.自主移动钢球的碰撞机制引发钢球与梁之间频繁的动量交换并伴随碰撞过程中的能量耗散,导致梁振动响应的幅值明显降低,从而达到减振的目的.由于碰撞的随机性,使得梁的振动响应峰值出现小幅波动,故从严格意义上说,内嵌钢球碰撞作用下欧拉梁的响应为概周期振动.通过对比钢球在不同位置碰撞时的减振效果,充分说明了其在实验过程中表现出来的自适应减振特性,即钢球自主地移动至梁振动最强的地方,优化了减振效果.

参考文献:

[1] 黄文虎,王心清,张景绘,等.航天柔性结构振动控

制的若干新进展[J].力学进展,1997,27(1):5-18.

HUANG Wenhui, WANG Xinqing, ZHANG Jinghui, et al. Some advances in the vibration control of aerospace flexible structures [J]. Advances in Mechanics, 1997,27(1):5-18.

[2] CHENG Jianlian, XU Hui. Inner mass impact damper for attenuating structure vibration [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006,43(17):5355-5369.

[3] 黄志祥,徐晖,徐立勤.内嵌黏性流体欧拉梁的自适应减振模式研究[J].西安交通大学学报,2006,40(9):1099-1103.

HUANG Zhixiang, XU Hui, XU Liqin. Adaptive vibration suppression mode for Euler beam with interior inlay viscous fluid [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2006,40(9):1099-1103.

[4] ZHANG Xiongwen, LI Jun, XU Hui, et al. Numerical study of self-adaptive vibration suppression for flexible structure using interior inlay viscous fluid unit method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 297(34):627-634.

[5] LEE Y, HAMILTON J W. The lumped parameter method for elastic impact problems [J]. Journal of Applied Mechanics, 1983,50(4):823-827.

[6] SHANKAR B V, SUN C T. An efficient numerical algorithm for transverse impact problems [J]. Computers and Structures, 1985,20(6):1009-1021.

[7] MISRA A, CHEUNG J. Particle motion and energy distribution in tumbling ball mills [J]. Powder Technology, 1999,105:222-227.

[本刊相关文献链接]

利用遗传算法的磁流变阻尼器结构含时滞半主动控制.西安交通大学学报,2010,44(9):122-127.

可控磁悬浮系统的转子周期性振动抑制.西安交通大学学报,2010,44(7):55-58.

考虑损伤程度的设备运行可靠性研究.西安交通大学学报,2010,44(1):36-40.

含双时滞振动主动控制系统的稳定性分析.西安交通大学学报,2010,44(1):112-116.

时频域交互法在微滑移干摩擦阻尼叶片振动分析中的应用.西安交通大学学报,2009,43(11):22-26.

离心风机蜗壳振动声辐射的定量预测.西安交通大学学报,2009,43(9):71-74.

圆柱壳高频弯曲振动的能量有限元分析.西安交通大学学报,2008,42(9):1113-1116.

(编辑 葛赵青)