

一种准线性光束平差方法

刘侍刚¹, 彭亚丽², 韩崇昭¹

(1. 西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安; 2. 陕西师范大学计算机科学学院, 710062, 西安)

摘要: 为了解决光束平差运行速度慢、复杂度高的缺点,提出了一种准线性光束平差方法(QBA),该方法利用深度因子等于投影矩阵的第 3 行与射影空间点相乘的特性,采用重投影点和已知图像点的代数距离建立目标函数,交替地将投影矩阵和射影空间点两个量中的一个保持不变,线性地求取另一个量,最后完成射影重建. 实验结果表明,QBA 方法具有较快的收敛速度,同时和传统的 Levenberg-Marquat 方法及 Mahamud 方法比较,QBA 方法运行时间约是 L-M 方法的 1/8,是 Mahamud 方法的 1/3.

关键词: 光束平差;线性迭代;代数距离

中图分类号: TP391.41;P232 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)12-0001-04

A Quasi-Linear Bundle Adjustment Method

LIU Shigang¹, PENG Yali², HAN Chongzhao¹

(1. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: A quasi-linear bundle adjustment (QBA) method is presented to overcome the short-coming of the bundle adjustment that the computational cost is expensive due to the complicated procedure. The method bases on the fact that the depth factor is equal to the product of the third row of projective matrix and the point in projection space. The algebraic distance between the re-projective points and the image points is taken as the objective function. Then the projective points and the projective matrices are alternately estimated by solution with one of them keeping constant. Finally, the projective reconstruction is obtained. Experimental results show that the proposed method is very efficient. Comparisons with the L-M method and the Mahamud method show that the proposed method runs approximate 8 times as fast as the L-M method and 3 times as fast as the Mahamud method.

Keywords: bundle adjustment; linear iteration; algebraic distance

从图像序列中重建出三维场景结构是计算机视觉的主要目标之一^[1-2]. 目前,它仍然是计算机视觉领域中的研究热点之一^[3-4]. 如果没有任何先验知识,从图像测量中只能得到射影重建^[5-6]. 现在所提出的射影重建算法大部分都是基于多线性约束^[7-8]. 利用多线性约束关系进行射影重建的缺点是它并没有把所有的图像统一地看待,而是倚重某几幅图像,因此一旦获得了初始的射影重建,就要进一步求精,这一步叫做光束平差(bundle adjustment)^[9]. 它是一种在计算机视觉领域有广泛应用的优化算法,其目的是以全局最优化来进一步求得所需要的精确解.

在理想情况下,光束平差就是求已知图像点与重投影点之间的几何距离的最小值,可以采用 Guass-Newton、Levenberg-Marquat (L-M) 等求解非线性优化方法来求解^[9-11],但这些求解方法计算量比较大,很难满足实时性的要求. 有些文献将求解

收稿日期: 2010-04-12. 作者简介: 刘侍刚(1973—),男,博士,副教授. 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60805016);教育部高等学校博士学科点专项科研基金新教师基金资助项目(200807181007);中国博士后科学基金资助项目(20080430201);中国博士后科学基金特别资助项目(200902594).

几何距离修改为求解代数距离,再利用奇异值分解(SVD)得到一个初始的射影重建,然后利用迭代的方法进一步求精,但这种方法需要对图像点数据矩阵的行和列进行归一化处理以避免全零解的出现,而这一步的出现,会导致算法不稳定. Mahamud 等人对深度因子求导^[12],令其等于0,再交替地求解投影矩阵和射影空间点. 该方法最大的优点是能够线性迭代地求取在代数距离最小意义下的最优射影重建,而且可以保证算法的收敛,但该方法并没有考虑到深度因子实际上就是由投影矩阵的第3行行向量与射影空间点相乘而得到的,因此会影响该算法的收敛速度.

本文针对上述缺点,提出了一种准线性光束平差方法(QBA),利用深度因子等于投影矩阵的第3行与射影空间点相乘的特性,采用重投影点和已知图像点的代数距离建立目标函数,线性迭代地求取投影矩阵和射影空间点,最后完成射影重建.

1 基于代数距离的目标函数

假定摄像机模型为经典的针孔模型,即成像过程可以用下列方程表示

$$\lambda \mathbf{m} = \mathbf{P} \mathbf{X} \quad (1)$$

式中: λ 为深度因子; $\mathbf{X} = [x \ y \ z \ 1]^T$ 为3维空间点的齐次坐标; $\mathbf{m} = [u \ v \ 1]^T$ 为对应的图像平面点的齐次坐标; $\mathbf{P}$ 为相机的投影矩阵,是一个 3×4 的矩阵.

设有 n 个三维空间点, m 幅图像,对于第 i 幅图像上的第 j 个图像平面点,由式(1)可得

$$\lambda_{i,j} \mathbf{m}_{i,j} = \mathbf{P}_i \mathbf{X}_j \quad (2)$$

由式(2)可得基于代数距离的余差函数为

$$E = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |\lambda_{i,j} \mathbf{m}_{i,j} - \mathbf{P}_i \mathbf{X}_j|^2 \quad (3)$$

式(3)可以利用线性的方法进行求解,但它是病态的. 从式(3)可以看出, $\lambda_{i,j} = 0, \mathbf{P}_i = \mathbf{0}, \mathbf{X}_j = \mathbf{0}$ 将是它的最优解,但是这种解并不是我们所期望的,因此应该增加一些附加的约束条件.

2 准线性光束平差方法

2.1 线性求解射影空间点

首先,让投影矩阵 $\mathbf{P}_i$ 保持不变,线性地求解射影空间点 $\mathbf{X}_j$,使代数距离 E 最小. 为了表示方便,令

$$\mathbf{P}_i = [\mathbf{p}_{i,1} \ \mathbf{p}_{i,2} \ \mathbf{p}_{i,3}]^T \quad (4)$$

式中: $\mathbf{p}_{i,k}$ 表示投影矩阵 $\mathbf{P}_i$ 的第 k 列.

由式(2)可得

$$\lambda_{i,j} = \mathbf{p}_{i,3}^T \mathbf{X}_j \quad (5)$$

将式(5)代入式(2)并整理得

$$E = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m (\mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{m}_{i,j} \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{i,3} \mathbf{p}_{i,3}^T \mathbf{X}_j + \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{X}_j - 2 \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{i,3} \mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{P}_i \mathbf{X}_j) \right) \quad (6)$$

若要使代数距离 E 最小,需使

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{X}_j} = 2T \sum_{i=1}^m (\mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{m}_{i,j} \mathbf{p}_{i,3} \mathbf{p}_{i,3}^T + \mathbf{P}_i^T \mathbf{P}_i - 2 \mathbf{p}_{i,3} \mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{P}_i) \mathbf{X}_j = \mathbf{0} \quad (7)$$

令

$$(\mathbf{A}_j)_{4 \times 4} = 2 \sum_{i=1}^m (\mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{m}_{i,j} \mathbf{p}_{i,3} \mathbf{p}_{i,3}^T + \mathbf{P}_i^T \mathbf{P}_i - 2 \mathbf{p}_{i,3} \mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{P}_i) \quad (8)$$

则式(7)变为

$$\mathbf{A}_j \mathbf{X}_j = \mathbf{0} \quad (9)$$

从式(9)可以看出,若不对 $\mathbf{X}_j$ 增加附加约束,将会出现全零解,这是本文不希望的. 同时,若 $\mathbf{X}_j$ 是它的一个解,则 $\alpha \mathbf{X}_j$ (α 为常数)也是它的一个解,因此它有无穷多个解. 为了求解方便,需要增加一个约束,通常可以令 $\mathbf{X}_j$ 中的最后一个元素为1,或者增加一个约束条件 $|\mathbf{X}_j| = 1$. 对 $\mathbf{A}_j$ 进行SVD分解可得到射影空间点 $\mathbf{X}_j$,由此可对式(7)进行求解.

2.2 线性求解投影矩阵

现在让射影空间点 $\mathbf{X}_j$ 保持不变,线性地求解投影矩阵 $\mathbf{P}_i$,使代数距离 E 最小. 同样,为了表示方便,将投影矩阵 $\mathbf{P}_i$ 写成一个列向量,即

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1,i} \\ \mathbf{p}_{2,i} \\ \mathbf{p}_{3,i} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{p}_{l,i}$ 表示投影矩阵 $\mathbf{P}_i$ 的第 l 行.

将式(5)代入式(3)并整理得

$$E = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n (\mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{m}_{i,j} \mathbf{p}_{3,i}^T \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{3,i} + \mathbf{p}_{1,i}^T \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{1,i} + \mathbf{p}_{2,i}^T \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{2,i} + \mathbf{p}_{3,i}^T \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{3,i}) - 2(u_{i,j} \mathbf{p}_{3,i}^T \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{1,i} + v_{i,j} \mathbf{p}_{3,i}^T \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{2,i} + \mathbf{p}_{3,i}^T \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{3,i}) \right) \quad (11)$$

若要使代数距离 E 最小,则有

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}_i} = 2 \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{1,i} - u_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{3,i} \\ \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{2,i} - v_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{3,i} \\ \mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{m}_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{3,i} - \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{3,i} - u_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{1,i} - v_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \mathbf{p}_{2,i} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{0} \tag{12}$$

整理得

$$\sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T & \mathbf{0} & -u_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T & -v_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \\ -u_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T & -v_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T & \mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{m}_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T - \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \end{bmatrix} \mathbf{q}_i = \mathbf{0} \tag{13}$$

令

$$(\mathbf{B}_i)_{12 \times 12} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T & \mathbf{0} & -u_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T & -v_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \\ -u_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T & -v_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T & \mathbf{m}_{i,j}^T \mathbf{m}_{i,j} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T - \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T \end{bmatrix} \tag{14}$$

则式(14)为

$$\mathbf{B}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0} \tag{15}$$

同样,从式(15)可以看出,若不对 $\mathbf{q}_i$ 增加附加约束,将会出现全零解. 因此,本文增加一个约束条件 $|\mathbf{q}_i|=1$. 对 $\mathbf{B}_i$ 进行 SVD 分解可得到投影矩阵 $\mathbf{P}_i$, 由此可对式(15)进行求解.

3 QBA 方法

本文提出的 QBA 方法步骤描述如下:

(1) 利用已知的初始射影重建 $\{\mathbf{P}_i^{(0)}, \mathbf{X}_j^{(0)}\}$, 求到初始代数距离 $E_1^{(0)} = E_2^{(0)} = E^{(0)}$, 并令 $k=1$ 及 ϵ 为任意小的一个正数;

(2) 令投影矩阵 $\mathbf{P}_i^{(k)}$ 保持不变, 利用式(9)求解每个射影空间点 $\mathbf{X}_j^{(k)}$;

(3) 利用式(3)求重投影点到已知图像点的代数距离 $E_1^{(k)}$, 并判断 $|E_1^{(k)} - E_2^{(k-1)}| < \epsilon$ 时停止; 否则, 进行步骤(4);

(4) 令射影空间点 $\mathbf{X}_j^{(k)}$ 保持不变, 利用式(15)求解每个投影矩阵 $\mathbf{P}_i^{(k)}$;

(5) 利用式(3)求重投影点到已知图像点的代数距离 $E_2^{(k)}$, 并判断 $|E_2^{(k)} - E_1^{(k)}| < \epsilon$ 时停止; 否则, $k=k+1$ 并转至第(2)步.

收敛性分析: 当投影矩阵 $\mathbf{P}_i^{(k)}$ 保持不变时, $\mathbf{X}_j^{(k)}$ 是式(3)的极小值点, 因此有 $E_1^{(k)} < E_2^{(k-1)}$. 同样, 当射影空间点 $\mathbf{X}_j^{(k)}$ 保持不变时, $\mathbf{P}_i^{(k)}$ 是式(3)的极小值点, 因此也有 $E_2^{(k)} < E_1^{(k)}$. 由以上分析可知, 本文的方法能够保证收敛.

4 实 验

为了检验本文提出的 QBA 方法的收敛性, 用 Matlab 模拟产生 8 幅大小为 640×480 像素的图像,

并在图像中分别加入均值为 0、方差分别为 1 和 2 的高斯噪声, 利用这些模拟图像点用文献[13]的方法完成初步的射影重建之后, 分别用 Levenberg-Marquart (L-M)非线性优化方法^[9]、Mahamud 方法^[12]及本文提出的 QBA 方法进行光束平差, 实验结果如图 1 所示.

从图 1 可以看出, QBA 方法具有良好的收敛性, 在 3~4 步就可以达到收敛, 而 L-M 方法和 Mahamud 方法都要 5~6 步才能够达到收敛. 从图中还可以看出, QBA 方法和 Mahamud 方法具有相同的收敛精度, 而 L-M 方法的收敛精度要略高于本文方法和 Mahamud 方法, 这是因为 L-M 方法求的是几何距离的最小值, 而最后却用代数距离来衡量, 通常情况下, 几何距离的最小值点并不和代数距离的最小值重合.

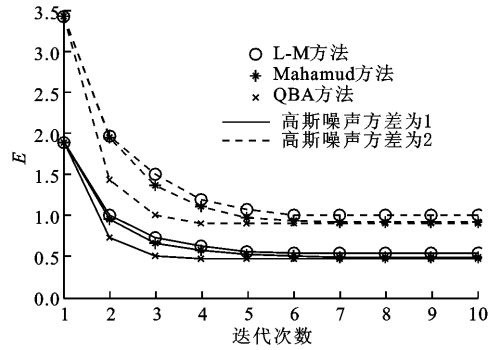


图 1 代数距离随迭代次数变化情况

同时, 为了比较本文提出的 QBA 方法和 L-M 方法及 Mahamud 方法的运行速度, 本文首先模拟产生 8 幅图像, 每幅图像点由 20 个变化到 400 个. 然后, 固定每幅图像点数为 100 个, 图像数由 2 幅变化到 16 幅. 在所有的实验中, 图像像素中都加入均值为 0、方差为 1 的高斯噪声, 当连续 2 个代数距离(对于 L-M 方法为几何距离)之差小于 10^{-6} 时, 就认为算法已经达到收敛. 在每种情况下, 实验重复 100 次, 然后取其平均值, 实验结果如图 2 和图 3 所示.

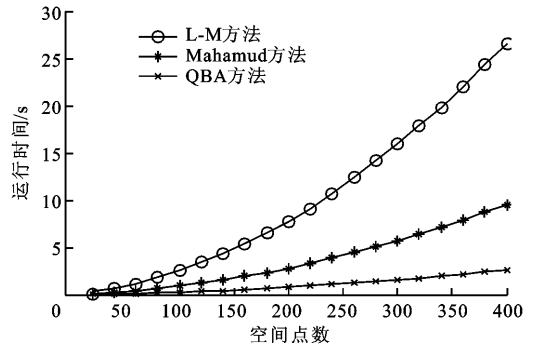


图 2 运行时间随空间点数变化图

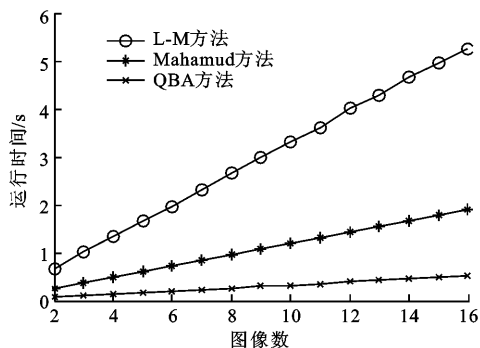


图3 运行时间随空间点数变化图

从图2和图3中可以看,QBA方法运行时间约是L-M方法的1/8,约是Mahamud方法的1/3.由于L-M方法是采用非线性解法,因此它的运行速度最慢,而在Mahamud方法中,它并没有考虑深度因子实际上就是由投影矩阵和射影空间点相乘所组成,因此它的运行速度也较慢.

5 结束语

本文提出了一种准线性光束平差方法——QBA,利用重投影点和已知图像点的代数距离建立目标函数,通过线性迭代求取代数距离的极小值.由于本文方法考虑到深度因子实际上就是由投影矩阵的第3行行向量与射影空间点相乘而得到的,所以具有较快的运行速度,实验结果也表明了本文QBA方法具有收敛性好及运行速度快等优点.

参考文献:

- [1] WANG Guanghui, WU J Q M. The quasi-perspective model: geometric properties and 3D reconstruction[J]. Pattern Recognition, 2010, 43(5):1932-1942.
- [2] 彭亚丽,刘芳,刘侍刚.一维子空间的三维重建方法[J].西安交通大学学报,2009,43(12):31-35.
PENG Yali, LIU Fang, LIU Shigang. 3D reconstruction method with 1D subspace[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009,43(12):31-35.
- [3] 彭亚丽,刘芳,焦李成,等.基于秩4约束的遮挡点恢复方法[J].机器人,2008,30(2):138-141.
PENG Yali, LIU Fang, JIAO Licheng, et al. A method for occlusion recovery based on rank 4[J]. Robot, 2008, 30(2):138-141.
- [4] 刘侍刚,彭亚丽,韩崇昭,等.3维子空间约束的遮挡点恢复方法[J].西安交通大学学报,2009,43(4):10-13.
LIU Shigang, PENG Yali, HAN Chongzhao, et al. An

- occlusion recovery method based on 3D subspace[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(4):10-13.
- [5] 刘侍刚,彭亚丽,韩崇昭,等.基于秩1的射影重建方法[J].电子学报,2009,37(1):225-228.
LIU Shigang, PENG Yali, HAN Chongzhao, et al. Projective reconstruction based on rank 1 matrix[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(1):225-228.
- [6] 彭亚丽,刘侍刚,刘芳.基于秩1约束的三维重建方法[J].信号处理,2010,26(1):28-31.
PENG Yali, LIU Shigang, LIU Fang. A 3D reconstruction method based on rank 1[J]. Signal Processing, 2010, 26(1):28-31.
- [7] PENG Yali, LIU Shigang, LIU Fang. Projective reconstruction with occlusions[J]. Opto-Electronics Review, 2010, 18(2):14-18.
- [8] 刘侍刚,吴成柯,李良福,等.基于1维子空间线性迭代射影重建[J].电子学报,2007,35(4):692-696.
LIU Shigang, WU Chengke, LI Liangfu, et al. An iterative method based on 1D subspace for projective structure and motion[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(4):692-696.
- [9] TRIGGS B, MCLAUCHLAN P, HARTLEY R I, et al. Bundle adjustment: a modern synthesis[C]//Proceedings of International Workshop on Vision Algorithms. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2005:298-372.
- [10] BARTOLI A. A unified framework for quasi-linear bundle adjustment[C]//Proceeding of 16th International Conference on Pattern Recognition. Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society, 2002:560-563.
- [11] MICHOT J, BARTOLI A, GASPARD F, et al. Algebraic line search for bundle adjustment[C]//Proceedings of the Ninth British Machine Vision. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2009:1-8.
- [12] MAHAMUD S, HEBERT M, OMORI Y, et al. Provably-convergent iterative methods for projective structure from motion[C]//IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society, 2001:1018-1025.
- [13] MARQUES M, COSTEIRA J. Estimating 3D shape from degenerate sequences with missing data[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2009, 113(2):261-272.
- [14] JULIA C, SAPP A. An iterative multiresolution scheme for SFM with missing data: single and multiple object scenes[J]. Image and Vision Computing, 2010, 28(1):164-176.

(编辑 刘杨)