

考虑非线性弹性力的滚珠丝杠系统 分岔与混沌特性分析

吴沁^{1,2}, 芮执元^{1,2}, 杨建军^{1,2}

(1. 兰州理工大学数字制造技术与应用省部共建教育部重点实验室, 730050, 兰州;

2. 兰州理工大学机电工程学院, 730050, 兰州)

摘要: 应用弹性力学位移法及 Galerkin 法建立了数控机床进给系统滚珠丝杠的数学模型, 指出非线性弹性力作用下的滚珠丝杠系统可以用有阻尼的 Duffing 方程来描述, 并用林滋-庞加莱奇异摄动法求得系统的自由振动二次近似解析解. 通过参数辨识仿真及试验研究对模型进行验证, 发现在进给系统运动过程中, 受轴向力、径向力、扭矩等多种载荷作用的影响, 滚珠丝杠系统会发生非线性振动, 出现分岔及混沌现象, 系统刚度随工作台位置的不同而变化, 呈现出非线性规律, 使运行中的系统固有频率不稳定. 根据工作台振动加速度时间序列和频谱图存在的混沌特征, 断定进给系统是一个非线性动力学系统, 可为数控机床的动态系统辨识提供依据.

关键词: 非线性; 滚珠丝杠; 进给系统; 分岔; 混沌

中图分类号: TH113.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2012)01-0070-06

Bifurcation and Chaos Characteristics for Ball-Screw System Considering Nonlinear Elastic Force

WU Qin^{1,2}, RUI Zhiyuan^{1,2}, YANG Jianjun^{1,2}

(1. Key Laboratory of Digital Manufacturing Technology and Application, The Ministry of Education, Lanzhou

University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2. School of Mechanical and Electromechanical

Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: Adopting the displacement method of elasticity and Galerkin theory, the mathematical model of ball screw is established for feed system of CNC machine tool. It indicates that the ball screw system under nonlinear elastic force can be described by damping Duffing equation, and the approximated quadratic solution is obtained by L-P singular perturbation. Via the simulation of parameter identification and the experimental investigation, it is concluded that the work table carry the axial force, the radial force, the torque and other kinds of load functions in the motor process of feed system, then nonlinear vibration appears, the rigidity changes along with the change of work table position by a nonlinear rule, and the system natural frequency gets unstable. According to the chaos characteristic existing in the vibratory acceleration time series and the frequency spectrogram of the work table, it can be determined that the feed system is a nonlinear dynamic system.

Keywords: nonlinearity; ball-screw; feed system; bifurcation; chaos

数控机床的加工精度和加工效率在很大程度上 取决于进给系统的性能. 滚珠丝杠进给系统因自身

的优势而广为使用,其主要功能部件包括伺服电机、滚珠丝杠副以及随螺母做轴向往复运动的工作台等.滚珠丝杠的动态特性直接影响整台机床的动力学行为,并对机床的加工质量产生显著影响.

目前,国内外针对数控机床进给系统非线性振动特性的研究尚不多见,本文主要针对滚珠丝杠振动中的非线性动态特性问题进行了分析与研究.滚珠丝杠在工作时可简化为旋转梁,横向振动的旋转梁目前有欧拉-伯努利梁、瑞利梁和 Timoshenko 梁模型.对于细长梁,常采用简单的欧拉梁或瑞利梁,但对于横截面较大的梁若要得到精确解,则需采用 Timoshenko 梁模型^[1-4].Bokian^[5]研究了不同边界条件下受轴向力作用的欧拉-伯努利梁横向的固有频率变化问题;Esmailzaden 等人^[6]研究了 Timoshenko 梁的固有频率与轴向力、径向力变化的关系;Arboleda 等人^[7]研究了在轴向力作用下有裂缝的 Timoshenko 梁的固有频率和稳定性;Lin 等人^[8]推导了旋转 Timoshenko 梁线性振动的动力学方程;Behzad 等人^[9]研究了典型边界条件下,梁的转动惯量对其横向振动的影响;Cheng 等人^[10]研究了承受单方向移动载荷的旋转梁的固有频率;张会端等人^[11]把丝杠简化为旋转的 Timoshenko 梁,综合考虑了陀螺效应、预拉伸力和移动载荷对丝杠振动的影响,分析了系统参数对丝杠横向振动的影响.以上这些研究工作均未考虑其中的非线性因素.王林鸿等人^[12]通过理论分析和试验验证,着重研究了非线性弹性力对工作台动态特性的影响,指出滚珠丝杠刚度随着工作台位移和运动方向的变化呈现出软弹簧特性或硬弹簧特性等非线性规律,但未探究非线性振动的本质,与本文的模型建立方法有所不同.

1 理论分析

1.1 建立滚珠丝杠非线性动力学方程

综合考虑滚珠丝杠系统的纵向振动和横向振动,如图 1 所示,假设丝杠是两端弹性支承、均匀材料、等截面的 Timoshenko 梁.取丝杠上距左端 x 处对应于丝杠微段上的长度 s ,根据微段的受力分析,得到微段的纵向运动位移量 $u(x, t)$ 、横向运动位移量 $w(x, t)$ 和截面转动角度 $\Psi(x, t)$,其动力平衡方程^[13]

$$\left. \begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (N \cos \theta + Q \sin \theta) \cos \theta \\ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (N \sin \theta - Q \cos \theta) \cos \theta \\ \rho J \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial M}{\partial x} \cos \theta - Q \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: ρ 为丝杠的质量密度; A 为横截面积; J 为丝杠的截面极惯性矩.考虑到丝杠一般为小挠度或中挠度变形,因此利用泰勒级数将三角函数展开并保持二阶截断,即

$$\sin \theta \approx \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \cos \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2)$$

假设丝杠变形前后的横截面始终与轴线垂直,则丝杠上任一点的纵向位移由 3 部分组成:①轴向内力 N 引起的横截面纵向平动,即微段质心的纵向位移;②由横截面转动引起的位移;③由横向弯曲引起的纵向位移,则纵向总位移

$$u_1(x, t) = u + y \sin \Psi + \int_0^{A'} \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} dx - x$$

Timoshenko 梁理论近似认为剪应变在截面内是常数,则

$$Q = \iint_A (-G\beta) d\beta = kAG\beta \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = kAG \frac{\partial \beta}{\partial x} = kAG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \theta \right) = kAG \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

式中: k 为丝杠截面的几何形状常数; G 为剪切弹性模量,而该点的正应变为

$$\epsilon(x, t) = \frac{\partial u_1}{\partial s} =$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + y \cos \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \right) \cos \theta \approx \left[\frac{\partial u}{\partial x} + y \cos \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \cos \theta$$

$$N(x, t) = \iint_A \sigma dA =$$

$$EA \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \cos \theta \quad (4)$$

$$M(x, t) = \iint_A y \sigma dA = \iint_A y E \epsilon dA = EJ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \theta \quad (5)$$

$$J = \iint_A y^2 dA$$

其中 E 为材料的弹性模量.将式(2)~式(5)代入式(1),略去高次项,得到考虑非线性动力学效应的丝杠纵横向振动耦合的偏微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= EA \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(1 - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + EJ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right] - \\ &\quad \rho J \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= EA \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right. \\ &\quad \left. 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \\ &\quad kAG \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \\ &\quad \left[EJ \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(6)中第1项简化为线性方程

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

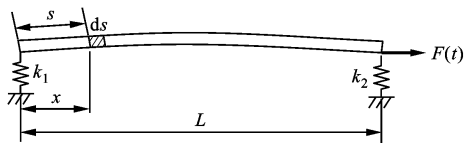
对于两端弹性支承的丝杠,相应的边界条件

$$\begin{aligned} EA \frac{du(x,t)}{dx} \Big|_{x=0} &= F(0) \\ EA \frac{du(x,t)}{dx} \Big|_{x=L} &= -F(L) \end{aligned}$$

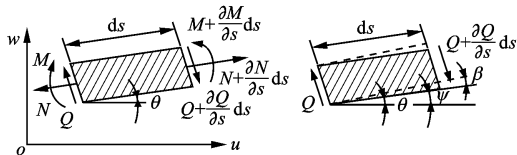
在给定的边界条件下,可得到以 $w(x,t)$ 、 $\Psi(x,t)$ 为未知量, $u(x,t)$ 为时变系数的非线性偏微分方程

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left[2F_0 + \frac{1}{2} EA - kAG \right] - \\ &\quad F_0 \left(2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

式中: F_0 为作用在丝杠上的轴向载荷。



(a)丝杠轴受力



(b)微段受力

$F(t)$:纵向载荷; s :丝杠微段上的长度; L :丝杠长度; M :弯矩;

Q :剪力; N :轴向力; β :剪力作用下的转角; θ :丝杠轴线的

实际转角; k_1 、 k_2 :分别为丝杠两端轴承的支承刚度

图1 丝杠非线性振动及微单元受力分析图

1.2 方程求解

将式(7)化简后得到残差力

$$R \equiv \ddot{w} + D(w, \dot{w}) = 0 \quad (8)$$

式中: D 为 w 关于 x 的非线性偏微分算子。式(8)的解空间具有无限维,采用 Galerkin 法,将式(8)简化为有限个常微分方程。Galerkin 法的基本思路是取一组满足丝杠边界条件的本征函数 $\phi_r(x)$, $r=1,2,\dots,n$,构造

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^n \phi_r(x) q_r(t) \quad (9)$$

$$\int_0^L \left[\rho A \sum_{r=1}^n \phi_r(x) \ddot{q}_r(t) + D \left(\sum_{r=1}^n \phi_r(x) q_r(t) \right) \right] \delta \phi(x) dx = 0 \quad (10)$$

式(9)实际是式(8)的一组近似解,将近似解代回式(8),则 $R \neq 0$,一般情况下, R 沿虚位移所作的虚功也不为0。但是,可以调整式(8)中的参数,使 R 关于各本征函数 $\phi_r(x)$ 在一个振动周期内沿各虚位移的平均虚功为0(即 Galerkin 条件)。

研究丝杠横向振动时,将丝杠的微振动振型函数作为特征函数,设解的形式为

$$y(x,t) = A \sin(\pi x/L) \sin(pt - \varphi)$$

本文在研究丝杠低频振动时,近似取第一阶固有振型函数

$$\phi(x) = \sin(\pi x/L)$$

将其代入式(8)、式(10)中,得到滚珠丝杠系统无阻尼非线性振动方程

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= -\frac{1}{\rho A} \left[\frac{\pi^2 F_0}{L^2} q(t) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\pi^4 (2kAG - 4F_0 - EA)}{2L^4} q^3(t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

无阻尼 Duffing 的典型式为

$$\ddot{q} - \omega_0^2 q + \varepsilon \omega_0^2 q^3 = 0 \quad (12)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^2 F_0}{\rho A L^2}; \varepsilon = \frac{\pi^2}{8L^2 F_0} (2kAG - 4F_0 - EA)$$

若初值条件 $q(0)=a_0$, $\dot{q}(0)=0$,用林滋-庞加莱(L-P)奇异摄动法求解,得系统自由振动的二次近似解为

$$\begin{aligned} q &= a_0 \cos \omega t + \frac{\varepsilon \omega_0^2 a_0^3}{32 \omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) + \\ &\quad \frac{\varepsilon^2 \omega_0^2 a_0^5}{1024 \omega^2} (\cos(5\omega t) - 24 \cos(3\omega t) + 23 \cos(\omega t)) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \varepsilon \frac{3a_0^2}{8} \right)$$

式中: ω 为基频; ω_0 为派生系统的固有频率.

由式(12)、(13)发现,立方非线性弹性力使 Duffing 系统的自由振动包括基频和 3 次、5 次等高次谐波成分,是系统区别于线性系统最显著的特征.自由振动的频率随振幅改变,而不同于线性系统的固有频率.

2 非线性动态特性分析

2.1 系统仿真分析

假设系统带弱阻尼,并受简谐激励 $F\sin\omega t$ 的作用,式(12)给出了有阻尼非自治系统的受迫振动动力学方程

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} - \omega_0^2q + \epsilon\omega_0^2q^3 = F\sin\omega t \tag{14}$$

式中: F 为激振力; ξ 为阻尼系数.取 $\omega_0 = 1$ Hz、 $\omega = 1.5$ Hz、 $F = 7.5$ N、 $\xi = 0.01$ 、 $\epsilon = 1$,当 $q(0) = 3$ 、 $\dot{q}(0) = 4$ 时,制作的系统相轨迹图如图 2 所示.由图 2 可知,系统的受迫振动为周期运动,系统的相轨迹为封闭曲线族,系统在相平面上有 3 个不动点,即 1 个不稳定的鞍点 $(0, 0)$ 、2 个稳定焦点 $((1/\epsilon)^{1/2}, 0)$ 和 $(-(1/\epsilon)^{1/2}, 0)$.由不同的初值条件来决定系统在 2 个流域之内以螺旋线形式趋于其中一个稳定焦点,当 $F \neq 0$ 时,系统有可能穿过流域分界线,在不同流域之间来回跳动,从而形成复杂的振荡状态,既可能作周期运动或准周期运动,也可能作混沌运动.

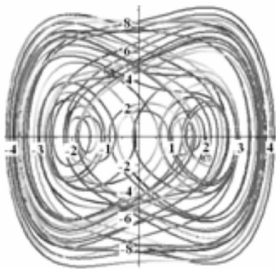


图 2 系统相轨迹图

在系统的相空间中适当选取如图 3 所示的截面,此截面不能与轨线相切,更不能包含轨线^[13].在截面上 x 和 v 取固定值,即为 Poincare 截面,相空间的连续轨迹与 Poincare 截面的交点称为截点^[14].通过观察 Poincare 截面上的截点情况,可以判断系统是否发生混沌.当 Poincare 截面上只有一个不动点或有限个离散点时,运动是周期的,而当截面上是一些成片的具有分形结构的密集点时,运动便是混沌的.

2.2 参数辨识

图 4 为系统在不同 F 作用下的相轨迹图.图 5

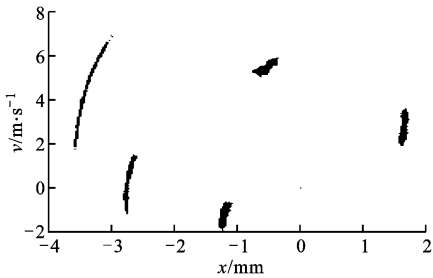


图 3 系统的 Poincare 截面

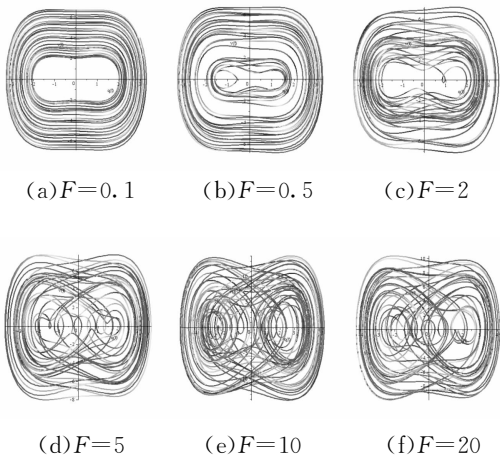


图 4 不同 F 作用下的相轨迹图

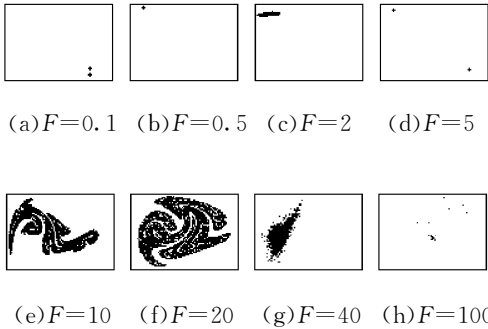


图 5 不同 F 作用下的 Poincare 截面图

为图 4 中各相轨迹图所对应的 Poincare 截面图.

图 6 为不同激振频率作用下的相轨迹图,其他参数不变.图 7 为图 6 中各相轨迹图所对应的 Poincare 截面图.在特征相图中,系统作周期运动时,其 Poincare 截面图为少数几个点,是平凡吸引子,而处于混沌区段的 Poincare 截面图有无穷多个点,为奇怪吸引子.由于对状态空间反复进行拉伸和折叠操作,奇怪吸引子的表面不光滑,存在许多皱折,且皱折中嵌套着皱折,因此其结构具有分形特征^[15].从图 4 和图 5 中可以看出,当 ω 一定时,随着 F 的增大,系统存在单周期、多周期、无穷多周期等多种周期数,对应于周期运动、拟周期运动和混沌运动等多

种运动状态. 从不同参数下的系统输出相图来看, 系统作周期运动后存在混沌运动, 而系统作混沌运动后又存在着周期运动, 其运动状态存在不同状态交替出现的情况. 从图 6 和图 7 中可以看出, 当 F 一定、 $\omega=0.1$ 时, 系统即进入无穷多周期状态, 并出现混沌, 当 $\omega=0.5$ 时, 系统又出现单周期运动, 随着 ω 的增大, 运动周期数逐渐增多, 系统也逐渐进入混沌运动状态.

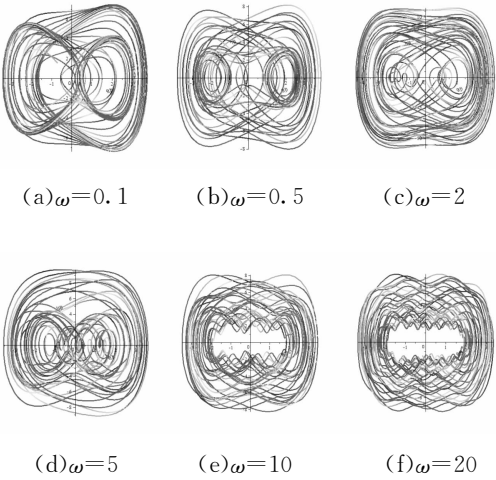


图 6 不同激振频率作用下的相轨迹图

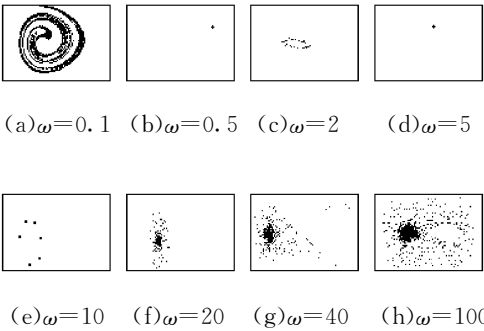


图 7 不同激振频率作用下的 Poincaré 截面图

3 试验验证

在数控卧式铣床工作台上进行动态试验, 工作台由伺服电机驱动, 按设定工况运动, 用三向加速度传感器采集振动响应信号. 机床采用双矩形滑动导轨, x 轴采用双推-自由式支承方式, y 轴采用双推-筒支式支承方式. 图 8、图 9 分别为工作台加速度 (30 m/min) 时域的波形图, 以及不同时刻在 y 方向的 FFT 频谱图. 图 8 中的 3 条曲线分别代表 x 、 y 、 z 方向的信号, 从振幅变化规律来看, 整个过程中振幅的大小并不相等. 其主要原因是: 在移动过程中, 丝杠刚度、 ω_0 由大变小, 而由伺服电机驱动的 ω 基本

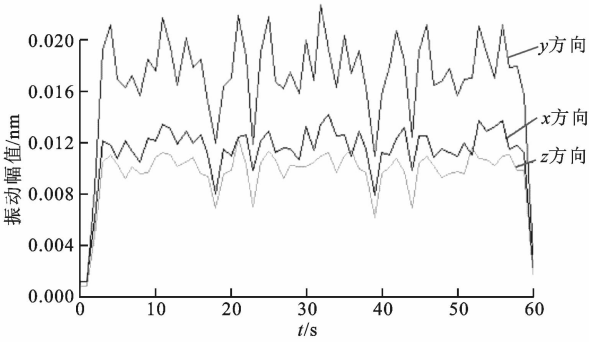


图 8 工作台加速度时域图谱

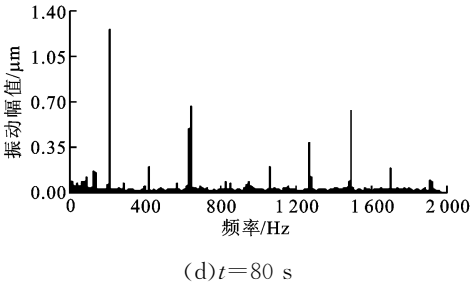
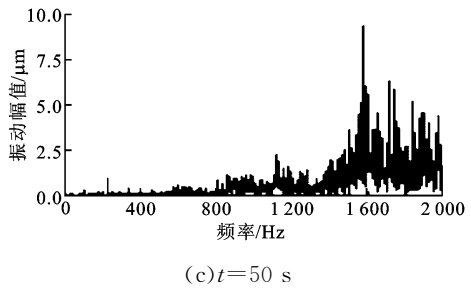
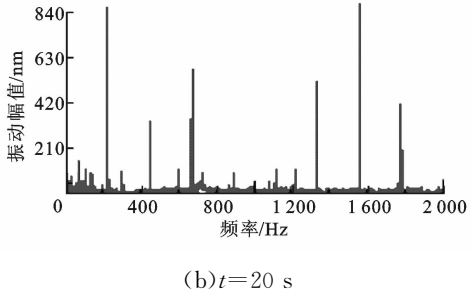
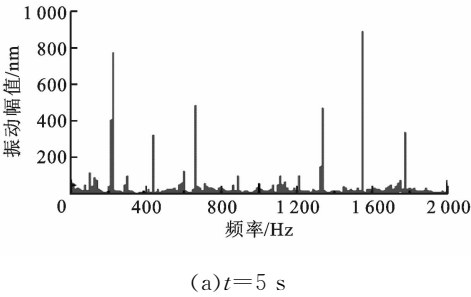


图 9 工作台在不同时刻 y 方向的加速度 FFT 频谱图

保持不变,系统相当于经历了一个 ω/ω_0 由小到大的扫频过程,只有当 $\omega/\omega_0 \rightarrow 1$ 时才会发生共振,其振幅最大,但越过共振点后振幅会减小.对图9中的响应加速度频谱进行分析后发现,频谱均连续,未见离散的峰值,在连续谱的上部有若干个尖峰,尖峰处的频率为固有频率,可见固有频率数比较多,幅值谱既不是离散谱也不是恒值谱,而是有尖峰的连续谱^[16].从这些特征中判断数控工作台的动态特征既不是线性的,也不是随机的,而是非线性的,它与混沌运动的频谱特征相吻合.

4 结 论

(1)在本文建立的数控机床进给系统滚珠丝杠的数学模型中,滚珠丝杠的刚度非线性作用可以用有阻尼的Duffing方程来描述.在进给系统运动过程中,滚珠丝杠系统会发生非线性振动,出现分岔及混沌现象,使运动过程中系统的固有频率不恒定.

(2)从系统数值的仿真结果来看,随着参数的变化,系统的运动状态存在周期运动、拟周期运动和混沌运动这三种不同状态交替出现的状况.

(3)通过物理试验对模型进行验证,从工作台振动加速度时间序列和频谱图存在的混沌特征中,可以认为进给系统是一个非线性的动力学系统.因此,本文的研究成果为工程实际中复杂系统的优化设计、故障诊断及振动控制等提供了理论依据.

参考文献:

- [1] LIN M C. Design and mechanizes of the ball screw mechanism [D]. Madison, USA: The University of Wisconsin Madison, 1989.
- [2] LIN M C, RAVANIAND B, VELINSKY S A. Kinematics of the ballscrew mechanism [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1994, 116(3): 549-555.
- [3] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of elasticity [M]. New York, USA: McGraw-Hill, 1970.
- [4] TIMOSHENKO S P, YOUNG D H, WEAVER W. Vibration problems in engineering [M]. 4th ed. New York, USA: Wiley, 1974.
- [5] BOKIAN A. Natural frequencies of beams under compressive axial loads [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 126(1): 49-65.
- [6] ESMAILZADEN E, OHADT A R. Vibration and stability analysis of non-uniform Timoshenko beams under axial and distributed tangential loads [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 236 (3): 443-456.
- [7] ARBOLEDA-MONSALVE L G, ZAPATA-MEDINA D G. Stability and natural frequencies of weakened Timoshenko beam-column with generalized end conditions under constant axial load [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 307: 89-112.
- [8] LIN S C, HSIAO K M. Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 240(2): 303-322.
- [9] BEHZAD H, BASTAMI A R. Effect of centrifugal force on natural frequency of lateral vibration of rotating shafts [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 274: 985-995.
- [10] CHENG C C, LIN J K. Modeling a rotating shaft subjected to a high-speed moving force [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 261: 955-965.
- [11] 张会端, 谭庆昌, 裴永臣. 机床工作台上刀具工作点的轴向振动分析 [J]. 北京工业大学学报, 2008, 34 (11): 1132-1139.
ZHANG Huiduan, TAN Qingchang, PEI Yongchen. Axial vibration analysis of the cutter's work point of machine worktable [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2008, 34(11): 1132-1139.
- [12] 王林鸿, 杜润生, 吴波, 等. 数控工作台的非线性动态特性 [J]. 中国机械工程, 2009, 20(13): 1513-1519.
WANG Linhong, DU Runsheng, WU Bo, et al. Nonlinear dynamic characteristics of NC table [J]. China Mechanical Engineering, 2009, 20(13): 1513-1519.
- [13] 胡海岩. 应用非线性动力学 [M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.
- [14] ZIBDEH H S, JUMA H S. Dynamic response of a rotating beam subjected to a random moving load [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 223 (5): 741-758.
- [15] NAGULESWARAN S. Transverse vibration and stability of an Euler-Bernoulli beam with step change in cross-section and in axial force [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 270(2): 1045-1055.
- [16] GALLINA P. Vibration in screw jack mechanisms: experimental results [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 282(6): 1025-1041.

(编辑 管咏梅)