

螺栓被连接件轴向刚度高精度计算的半解析方法

杨国庆^{1,2}, 王飞², 洪军², 朱林波², 熊美华¹

(1. 湖南科技大学机械工程学院, 411201, 湖南湘潭; 2. 西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 以圆盘形螺栓被连接件为研究对象, 结合有限元分析与理论解析, 提出了一种精确计算被连接件刚度的半解析方法. 利用精细的有限元分析模型, 分析了不同弹性模量、泊松比、总厚度、装配间隙、厚度比对被连接件刚度的影响规律, 构建了同材质上、下被连接件刚度的半解析模型. 同时, 结合不同材质上、下被连接件的等效方法, 求解出上、下被连接件的压应力半顶角, 实现了不同材料组合所对应被连接件刚度的精确计算. 与有限元分析结果相比, 被连接件刚度的相对误差小于 3%, 绝对误差小于 0.02 GN/m.

关键词: 螺栓被连接件; 轴向刚度; 有限元分析; 半顶角

中图分类号: TH123 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2012)09-0037-06

Semi-Analytical Method for Accurate Evaluation of Axial Stiffness of Bolted Member

YANG Guoqing^{1,2}, WANG Fei², HONG Jun², ZHU Linbo², XIONG Meihua¹

(1. College of Electromechanical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan 411201, China;

2. State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A semi-analytical scheme combining finite element analysis (FEA) with analytical method is proposed to accurately evaluate axial stiffness of disc-shaped bolted members. An elaborated FEA model is adopted to obtain the member stiffness in each bolted joint with same material, and the influences of elastic modulus, Poisson's rate, total member thickness and assembly clearance on the member stiffness are investigated. Then the semi-analytical model is constructed to calculate the member stiffness in each bolted joint with same material. Meanwhile, the semi-apex angle of the compressive stress distribution in each member is calculated by using the equivalent bolted joint with different materials, hence the axial member stiffness in bolted joints with different geometry and material properties is accurately formulized. Compared with the FEA results, the relative error of member stiffness by the novel scheme gets within 3% and the absolute error reaches to 0.02 GN/m.

Keywords: bolted member; axial stiffness; finite element analysis; semi-apex angle

由于螺栓被连接件刚度的精确计算有利于准确预测预紧力的形成与衰退规律, 从而指导螺栓连接工艺的优化, 因此近年来, 学者们在被连接件刚度的理论计算与有限元分析方面做了大量的研究工作. 被连接件的压应力分布可以简化为空心圆柱体、圆

锥体、球体等形状^[1], Bach 与 Findeisen 假设被连接件的压应力呈空心锥体分布, 且在垂直螺栓轴线的截面上为均匀分布, 推导出了被连接件刚度的计算公式^[2]. Shigley 与 Mitchell 先后取半顶角为 45° 和 30°, 对被连接件的刚度计算公式进行了简化^[2]. 文

献[3-4]假设被连接件的压应力分布呈空心锥体分布,且在垂直螺栓轴线的截面上为非均匀分布——每点的压应力为径向坐标的4次关系式,推导了不同材料、尺寸组合所对应被连接件刚度的计算公式,但却忽略了弹性模量、泊松比等参数对半顶角的影响,从而影响了被连接件刚度的计算精度。

在有限元分析方面,Musto等^[5-6]考虑了弹性模量对被连接件刚度的影响,通过有限元分析与数据拟合获得了不同尺寸组合所对应被连接件刚度的计算公式。但是,由于忽略了泊松比因素的影响,而无法实现对被连接件刚度的精确计算。Sethuraman等^[7]把螺栓头或螺母支承面的接触简化为刚性面和均压面,研究了不同弹性模量、泊松比等对被连接件刚度的影响,但这些被连接件刚度的计算公式只能获得同厚度、同材质上下被连接件在轴向总刚度的大致范围。文献[3,8]采用精细的有限元模型分析了被连接件的刚度,并根据理论公式反求了半顶角,分析了几何尺寸对半顶角的影响,从而可以指导在被连接件刚度的计算中对半顶角参数的选择。由于以上被连接件刚度的有限元分析与理论计算均未考虑不同弹性模量、泊松比组合对被连接件刚度的影响,因此本文将被连接件刚度的理论计算与有限元分析结合起来,实现了不同弹性模量、泊松比、尺寸组合所对应被连接件刚度的精确计算。

1 被连接件刚度的解析模型

1.1 压应力均匀分布的刚度解析模型

将被连接件的压应力分布简化成空心圆柱体、圆锥体2种可能的形状,假设在任意垂直于螺栓轴线截面上的压应力满足均匀分布,被连接件的轴向总刚度

$$K = \frac{\pi E d_h \tan \theta}{2} \cdot \left[\ln \left(\frac{(d_w + L \tan \theta - d_h)(d_w + d_h)}{(d_w + L \tan \theta + d_h)(d_w - d_h)} \right) \right]^{-1} \quad (1)$$

$d_m \geq L \tan \theta + d_w$

式中: d_m 为被连接件的直径; L 为被连接件的总厚度; d_h 为螺栓孔的直径; d_w 为垫片或支承面的直径; θ 为被连接件中压应力分布的半顶角; E 为相同上、下被连接件材料对应的弹性模量。

当 $d_w < d_m \leq L \tan \theta + d_w$ 时,则

$$K = \frac{\pi E d_h \tan \theta}{2} \left[\ln \left(\frac{d_w + d_h}{d_w - d_h} \frac{d_m - d_h}{d_m + d_h} \right) + \frac{2 d_h (L \tan \theta - d_m + d_w)}{d_m^2 - d_h^2} \right]^{-1} \quad (2)$$

当 $d_h < d_m \leq d_w$ 时,则

$$K = \frac{\pi E_2 E_1 (d_m^2 - d_h^2)}{4 L (E_2 + E_1)} \quad (3)$$

式中: E_1 、 E_2 分别为上、下被连接件的弹性模量。式(3)可适用于不同材料组合的上、下被连接件总刚度的计算,而式(1)、式(2)仅适用于同材质上、下被连接件总刚度的计算。

1.2 压应力非均匀分布的刚度解析模型

假设在任意垂直于螺栓轴线的截面上,每点的压应力满足径向坐标的4次关系式^[3],当 $d_h < d_m \leq d_w$ 时,采用式(3)可以近似地计算出 K 。当 $d_m \geq L \tan \theta + d_w$ 时,则

$$K = \frac{\pi d_h E \tan \theta}{2} \cdot \left[\ln \left(\frac{d_w + 3 d_h}{d_w - d_h} \frac{d_w + L \tan \theta - d_h}{d_w + L \tan \theta + 3 d_h} \right) \right]^{-1} \quad (4)$$

当 $d_w < d_m < L \tan \theta + d_w$ 时,则

$$K = \pi d_h E \tan \theta \left[2 \ln \left(\frac{d_w + 3 d_h}{d_m + 3 d_h} \frac{d_m - d_h}{d_w - d_h} \right) + \frac{8 (L \tan \theta - d_m + d_w)}{(d_m + 3 d_h)(d_m - d_h)} \right]^{-1} \quad (5)$$

上述刚度解析模型中的压应力分布假设更接近实际压应力的非均匀分布,因此本文采用式(3)~式(5)的刚度解析模型来计算同材质上、下被连接件的总刚度。

2 被连接件刚度的数值分析与拟合计算

本文利用有限元模型分析型号为M6的螺栓所对应的同材质上、下被连接件的轴向总刚度,并通过归一化方法,将被连接件的刚度计算拓展到对不同公称直径 d 的螺栓连接。

2.1 有限元分析模型

本文采用轴对称有限元模型^[8]来分析被连接件的刚度。与文献[2,4-7]给出的模型相比,该有限元分析模型同样采用线弹性材料及四边形轴对称单元,但却更加精细地考虑了以下因素:①在结合面处理上,对螺母或螺栓头、被连接件间的结合面处进行了单元细化,采用 contact178 接触单元与 0 渗透的接触算法,并通过接触区域的优化迭代算法来定义接触区域;②采用 prets179 预紧单元,实现螺栓预紧力的准确控制;③不直接约束被连接件的结合面,而通过耦合螺栓轴向节点位移,来实现螺栓连接的轴向定位。

2.2 材料参数对被连接件刚度的影响

由于弹性模量与泊松比共同影响着被连接件的刚度,因此需要借助有限元分析来获得影响因素.建立的有限元模型满足 $d_w=1.5\,d$, $d_m=10\,d$,上、下被连接件的厚度 h_1 、 h_2 相同.定义了 4 组尺寸参数:① $L/d=1$, $C/d=0.04$;② $L/d=1$, $C/d=0.125$;③ $L/d=6$, $C/d=0.04$;④ $L/d=6$, $C/d=0.125$, C 为螺栓孔的双边间隙.在 $E=50,60,\cdots,230\text{ GPa}$ 、泊松比 $\nu=0.21,0.22,\cdots,0.39$ 时,通过有限元分析,每组尺寸的被连接件可以获得 19×19 的归一化总刚度 $K_m=K(Ed)^{-1}$.借助 matlab 软件将离散的三维坐标点 $(E/100,\nu,K_m)$ 拟合成曲面,如图 1 所示.

通过 TableCurve 三维曲面拟合工具得到

$$K_m=K(Ed)^{-1}=a_1+a_2\ln(0.01E)+a_3\nu^{5/2}\tag{6}$$

式中: $a_1\sim a_3$ 为常数.4 组不同参数分别对应的被连接件的归一化刚度为

$$\left. \begin{aligned} K_{m,1}&=1.299-0.0556\ln(0.01E)+1.497\nu^{5/2} \\ K_{m,2}&=1.158-0.058\ln(0.01E)+1.393\nu^{5/2} \\ K_{m,3}&=0.69-0.023\ln(0.01E)+0.825\nu^{5/2} \\ K_{m,4}&=0.647-0.0225\ln(0.01E)+0.764\nu^{5/2} \end{aligned} \right\}\tag{7}$$

式中: $K_{m,1}$ 、 $K_{m,2}$ 、 $K_{m,3}$ 、 $K_{m,4}$ 的拟合优度(相关系数的平方)分别为 0.999 5、0.998 7、0.998 8、0.998 1,拟合的标准误差分别为 0.000 9、0.000 8、0.001 5、0.000 9.在给定的材料参数范围内,相同厚度、材质的上下被连接件在 L/d 、 C/d 不变的情况下,材料的泊松比越大,被连接件的轴向总刚度越大,当泊松比

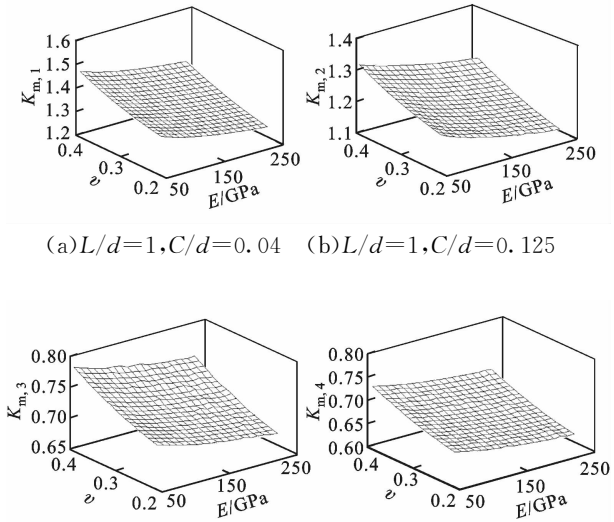


图 1 4 组尺寸参数的被连接件刚度与 E 、 ν 的关系

由 0.2 增大到 0.4 时,可使被连接件的刚度增大 8%左右.

2.3 L/d 、 C/d 对被连接件刚度的影响

下面研究 L/d 、 C/d 对被连接件刚度的影响规律,当 $L/d=1,1.5,2,\cdots,6$ 、 $C/d=0.015,0.03,0.045,\cdots,0.165$ 时,3 组被连接件的材料分别为 Al-Al($E=71\text{ GPa}$, $\nu=0.34$)、St-St($E=200\text{ GPa}$, $\nu=0.3$)、CI-CI($E=110\text{ GPa}$, $\nu=0.28$),每组材料的被连接件的归一化刚度的离散点总数为 11×11 .通过对有限元分析结果的处理,借助 matlab 软件将离散的三维坐标点 $(L/d,C/d,K_m)$ 拟合成曲面(见图 2).

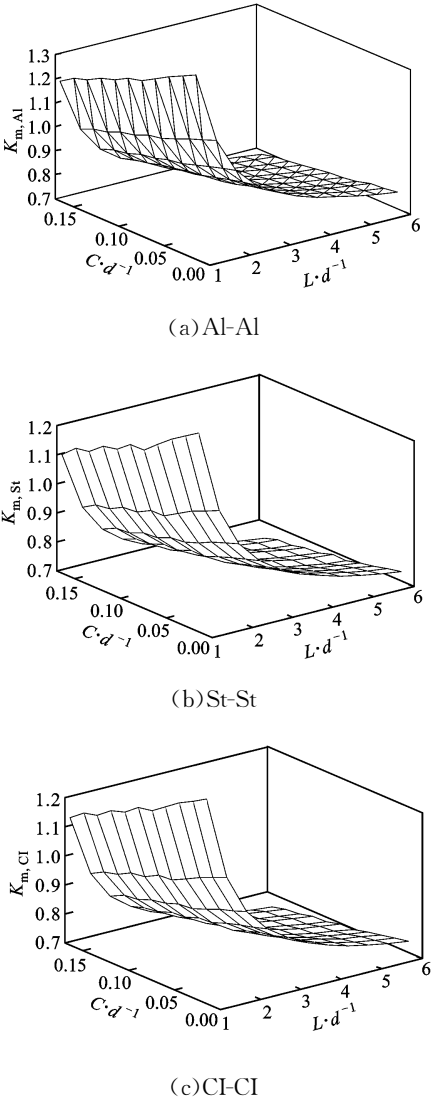


图 2 3 种材料组合的被连接件刚度与 L/d 、 C/d 的关系

拟合被连接件刚度的有限元分析结果为

$$K_m^{-1}=c_1+c_2(L/d)^{1/2}+c_3(C/d)\tag{8}$$

式中: $c_1\sim c_3$ 为常数. Al-Al、St-St、CI-CI 组合所对应的被连接件的刚度分别为

$$\left. \begin{aligned} K_{m,Al}^{-1} &= 1.713 - 1.055(L/d)^{1/2} + 1.041(C/d) \\ K_{m,St}^{-1} &= 1.803 - 1.101(L/d)^{1/2} + 1.168(C/d) \\ K_{m,Cl}^{-1} &= 1.787 - 1.098(L/d)^{1/2} + 1.115(C/d) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中： $K_{m,Al}^{-1}$ 、 $K_{m,St}^{-1}$ 、 $K_{m,Cl}^{-1}$ 的拟合优度均为 0.999，而它们的标准误差分别为 0.005 8、0.005 4、0.004 7，因此可以满足精度的要求. 在 L/d 不变的情况下，被连接件归一化刚度的倒数与 C/d 成正比. 当 $L/d=1$ 时，不同 C/d 对应的刚度为

$$K_{m10} = \frac{0.085dK_{m,1}K_{m,2}}{0.125dK_{m,2} + CK_{m,1} - CK_{m,2} - 0.04dK_{m,1}} \quad (10)$$

当 $L/d=6$ 时，不同 C/d 对应的刚度为

$$K_{m20} = \frac{0.085dK_{m,3}K_{m,4}}{0.125dK_{m,4} + CK_{m,3} - CK_{m,4} - 0.04dK_{m,3}} \quad (11)$$

根据式(10)、式(11)，可以计算出在厚度比 $R=1$ 、 $d_m=10d$ 、 $d_w=1.5d$ 时，不同 C/d 、 L/d 所对应的同材质上下被连接件的归一化总刚度 K_{m0} . 考虑到同材质上下被连接件 $R \neq 1$ 的情况，得

$$K_{m0} = \frac{(6^{1/2} - 1)K_{m20}K_{m10}R_r}{((6d/L)^{1/2} - 1)K_{m20} + (6^{1/2} - (6d/L)^{1/2})K_{m10}} \quad (12)$$

$$R_r = \begin{cases} 1 - \frac{0.2\max(R,R^{-1})}{12.3 + 153.4d^{5/2}L^{-5/2}}, & R + R^{-1} \leq 6 \\ 1 - (13.7 + 170.4d^{5/2}L^{-5/2})^{-1} & R + R^{-1} > 6; Ld^{-1} \leq 3 \\ 1 - \frac{\lg(3.33Ld^{-1})}{17.6 + 219.1d^{5/2}L^{-5/2}}, & \text{其他} \end{cases} \quad (13)$$

式中： R_r 为厚度比的影响系数，且 $R_r \leq 1$ ，其大小可以根据类似于图 3 所反映的规律来确定.

3 被连接件刚度的半解析计算

式(12)仅限于 $d_m=10d$ 、 $d_w=1.5d$ 、同材质上下被连接件的情况. 本文将通过刚度的拟合结果且结合被连接件刚度的理论公式，反求出上下被连接件的压应力半顶角，进而结合半顶角与被连接件刚度的理论计算公式，来实现不同尺寸(d_m/d 、 d_w/d 、 L/d 、 d_h/d 或 C/d)、不同材料的组合下，对应的

被连接件总刚度的计算.

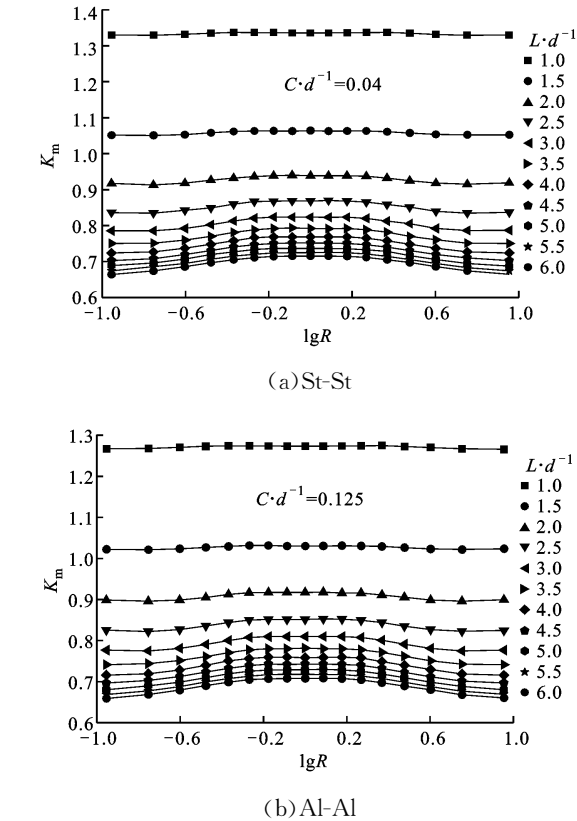


图 3 2 种材料组合对应的 K_m 与 R 、 L/d 的关系

3.1 上、下被连接件归一化刚度的计算

为了简化同材质上、下被连接件刚度的计算，假设上、下被连接件对应的压应力半顶角 θ 相等，且改变其中一个被连接件的材料特性，不会影响另一个被连接件压应力分布的半顶角. 根据式(12)获得被连接件的刚度，结合式(3)~式(5)以及 $d_m=10d$ 、 $d_w=1.5d$ ，可以求出被连接件压应力的半顶角，进而根据式(3)~式(5)与实际的 d_m 、 d_w ，可以获得同材质上、下被连接件刚度的半解析计算.

若上、下被连接件的材料不同， E_1 、 E_2 均在 50~230 GPa 内， v_1 、 v_2 均在 0.21~0.39 内，可以把不同材质的上、下被连接件转换为相同尺寸组合的两组同材质的上、下被连接件. 根据式(4)，得到两组被连接件的总刚度为

$$K_{m,n} = \frac{\pi d_h \tan \theta_n}{2d} \left[\ln \left(\frac{1.5d + 3d_h}{1.5d - d_h} \cdot \frac{1.5d + L \tan \theta_n - d_h}{1.5d + L \tan \theta_n + 3d_h} \right) \right]^{-1}, \quad n = 1, 2 \quad (14)$$

根据式(14)可以反求两组被连接件所对应的压应力半顶角 θ_1 、 θ_2 . 将同材质上、下被连接件的归一化刚度的计算拓展到不同 d 、 R 、 d_w/d 、 d_m/d 、 d_h/d 时，计

算两组同材质上、下被连接件所对应的归一化总刚度为

$$K_{b,n} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi d_h \tan \theta_n}{2d} \left[\ln \left(\frac{d_w + 3d_h}{d_w - d_h} \frac{d_w + L \tan \theta_n - d_h}{d_w + L \tan \theta_n + 3d_h} \right) \right]^{-1} \\ &d_m \geq L \tan \theta_n + d_w \\ &\frac{\pi d_h \tan \theta_n}{2d} \left[\ln \left(\frac{d_w + 3d_h}{d_m + 3d_h} \frac{d_m - d_h}{d_w - d_h} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{4(L \tan \theta_n - d_m + d_w)}{(d_m + 3d_h)(d_m - d_h)} \right]^{-1} \\ &d_w < d_m \leq L \tan \theta_n + d_w; 1d \leq L \leq 6d; n = 1, 2 \end{aligned} \right. \quad (15)$$

假设 $L=2\min(h_1,h_2)$, 令 $K_c=K_{b,1}, K_d=K_{b,2}$, 则可以获得不同材质上、下被连接件的归一化刚度

$$\left. \begin{aligned} &K_{m1} = \frac{K_{b,1}K_c}{K_c - K_{b,1}}; K_{m2} = K_d \\ &R \geq 1 \\ &K_{m1} = K_c; K_{m2} = \frac{K_{b,2}K_d}{K_d - K_{b,2}} \\ &R < 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

表 1 理论解析解与有限元分析得到的被连接件刚度的结果

$L \cdot d^{-1}$	R	$C \cdot d^{-1}$	$K_{FEA}/GN \cdot m^{-1}$					$K/GN \cdot m^{-1}$					相对误差 /%	绝对误差 /GN·m ⁻¹
			Al-Al	St-St	Cl-Cl	Al-St	St-Cl	Al-Al	St-St	Cl-Cl	Al-St	St-Cl		
1	1.00	0.04	0.604	1.601	0.895	0.878	1.148	0.604	1.603	0.897	0.888	1.152	1.13	0.010
6	1.00	0.04	0.321	0.858	0.477	0.467	0.613	0.322	0.859	0.477	0.471	0.614	0.85	0.004
1	1.00	0.125	0.542	1.423	0.799	0.785	1.023	0.542	1.425	0.799	0.793	1.026	1.01	0.008
6	1.00	0.125	0.301	0.803	0.447	0.438	0.574	0.301	0.804	0.448	0.441	0.576	0.68	0.003
3	0.25	0.040	0.361	0.962	0.535	0.626	0.622	0.359	0.951	0.531	0.630	0.622	1.16	0.011
6	0.25	0.040	0.307	0.821	0.456	0.506	0.545	0.309	0.823	0.458	0.505	0.557	2.15	0.012
3	0.25	0.125	0.335	0.893	0.497	0.576	0.581	0.333	0.880	0.492	0.577	0.579	1.48	0.013
6	0.25	0.125	0.288	0.769	0.428	0.471	0.513	0.289	0.773	0.430	0.471	0.524	2.10	0.011
3	0.10	0.125	0.331	0.880	0.490	0.661	0.536	0.331	0.872	0.488	0.672	0.532	1.64	0.011
6	0.10	0.125	0.281	0.751	0.418	0.525	0.470	0.280	0.744	0.415	0.522	0.472	0.94	0.007

4 结 论

本文结合有限元分析与理论解析方法,提出了螺栓被连接件刚度的半解析方法,实现了不同材料、不同几何尺寸参数所对应被连接件刚度的计算。

(1)在给定材料参数的范围内,同材质上、下被连接件在 L/d 、 C/d 不变的情况下,材料的泊松比越

3.2 被连接件总刚度的计算

根据 K_{m1} 、 K_{m2} , 可以获得相应的刚度值为

$$K_1 = K_{m1}E_1d; \quad K_2 = K_{m2}E_2d \quad (17)$$

$$K = \frac{K_{m1}K_{m2}E_1E_2d}{K_{m1}E_1 + K_{m2}E_2} \quad (18)$$

以上研究主要针对中心对称的圆盘形被连接件,若被连接件为非圆盘形,可以在被连接件内部找出一个螺栓孔轴线作为轴线的最大圆柱体,并用它的直径代替本文的 d_m ,同样可以实现被连接件刚度的计算。

3.3 被连接件刚度的计算误差

采用被连接件刚度的半解析方法,对 M6 所对应的不同尺寸、不同材料组合被连接件的刚度进行了计算, K 与由有限元分析获得的刚度 K_{FEA} ^[3] 的对比结果见表 1。

从表 1 中可看出, L/d 、 R 、 C/d 的变化范围及误差远远小于文献[4]中相对应的值,表明本文提出的刚度半解析计算方法可以实现不同尺寸、不同材料组合所对应被连接件刚度的高精度计算。

大,被连接件的轴向总刚度也越大. 当泊松比由 0.2 增大到 0.4 时,将导致被连接件的刚度增大 8% 左右。

(2)本文提出的半解析方法拓展了被连接件刚度的计算范围,能在更大的材料、几何尺寸参数的范围内实现被连接件刚度的高精度计算,将得到的刚度的半解析解与有限元分析结果相比,其相对误差小于 3%,绝对误差小于 0.02 GN/m。

参考文献:

- [1] ZHU Zhenqi, ZHANG Bi. The bulging of bolted guideways [J]. ASME J Mech Des, 1996, 118(6): 280-285.
- [2] WILEMAN J, CHOUDHURY M, GREEN I. Computation of member stiffness in bolted connections [J]. ASME J Mech Des, 1991, 113(2): 432-437.
- [3] 杨国庆,王飞,洪军,等. 螺栓被连接件刚度理论计算方法研究 [J]. 西安交通大学学报, 2012, 46(7): 50-56.
- YANG Guoqing, WANG Fei, HONG Jun, et al. Theoretical analysis method for bolted member stiffness [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012, 46(7): 50-56.
- [4] NASSAR S A, ABBOUD A. An improved stiffness model for bolted joints [J]. ASME J Mech Des, 2009, 131(12): 1-10.
- [5] MUSTO J C, KONKLE N R. Computation of member stiffness in the design of bolted joints [J]. J Mech Design, 2006, 128(6): 1357-1360.
- [6] PEDERSEN N L, PEDERSEN P. On prestress stiffness analysis of bolt-plate contact assemblies [J]. Arch Appl Mech, 2008, 78(2): 75-88.
- [7] SETHURAMAN R, KUMAR T S. Finite element based member stiffness evaluation of axisymmetric bolted joints [J]. ASME J Mech Des, 2009, 131(1): 1-11.
- [8] YANG Guoqing, HONG Jun, WANG Ning, et al. Member stiffnesses and interface contact characteristics of bolted joints [C]//IEEE ISAM. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011: 1-6.

(编辑 管咏梅)