

分数阶控制器离散方法的评估策略研究

曹军义, 曹秉刚

(西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对分数阶控制器数值计算和应用难的问题, 提出了分数阶微积分算子数字实现方法的评估策略, 分析了分数阶微积分算子的多种数值计算法的机理和实现步骤. 引入一个位置控制系统作为分数阶控制对象, 将 Mittag-Leffler 函数的全记忆长度分数阶控制系统作为评估基准, 提出了一种离散算法的近似性能函数, 通过时域误差分析以及近似性能分析, 对比研究了分数阶微积分算子的数字实现方法. 研究表明, 幂级数直接离散法得到近似离散模型需要记忆长度为 100 方可获得较好的近似, 而连分式直接离散法近似离散模型为 10 阶时就可以获得较好的近似, 因此连分式直接离散法比较适合于分数阶控制算法的实际工程应用.

关键词: 分数阶控制器; 离散方法; 评估策略; 分数阶微积分

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)07-0842-05

Evaluation Strategies of Fractional Order Controllers Discretization Methods

Cao Junyi, Cao Binggang

(School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To solve the difficulties of the discretization and application of fractional order controllers (FOC), evaluation strategies of digital realization of FOC are investigated. The realization principle and process of various discretization methods are discussed. One position control system is introduced as the objective controlled by FOC. Based on Mittag-Leffler function, the fractional order control system with full memory length is adopted as evaluation criterion, and an approximation performance function of discretization methods is proposed. Analyzing the time domain error and approximation performance, the investigation to various discretization methods is carried out comparatively in detail. The result verifies that the discrete model with power series direct discretization method requires 100 memory length to obtain the better approximation, while one with continued fraction direct discretization method requires only 10 order. Thus the continued fraction direct discretization method is preferable to digital realization of fractional order control algorithms in engineering applications.

Keywords: fractional order controller; discretization method; evaluation strategy; fractional calculus

最近几年, 分数阶微积分在许多工程科技领域的应用研究逐渐增多, 主要是因为许多物理对象具有分数阶特性, 像黏弹性、阻尼、混沌和声波扩散等, 而分数阶微分方程可以更接近地描述物理对象^[1-4].

分数阶微积分在控制中的应用是个新兴的领

域, 2004 年国际自动控制联盟组织举行了第一届分数阶微积分及其应用的国际会议, 揭开了分数阶控制策略应用研究的序幕. 分数阶控制器是用分数阶微分方程来描述的, 而传统的比例积分微分控制器 (PID) 只是分数阶控制器的特例. 由于分数阶控制

器是一个无限维系统,需要记忆过去所有的历史输入,在实际工程应用中比较困难,因此分数阶控制器的离散方法成为目前研究的热点.分数阶控制器的频域特性可以通过复频域分数阶微积分算子很容易得到,然后用滤波器结构的整数阶系统的频域特性来近似,最后将近似的整数阶系统离散化,就可以得到频域拟合法,如折线近似法、最小二乘法等^[5].另外,复频域分数阶微积分算子可以用离散变换函数直接离散,如双线性变换,然后用有理化近似的方法可以得到分数阶控制器的近似离散方程^[6].本文分析了分数阶微积分算子的多种数值算法的机理和实现步骤,为解决分数阶控制器实际工程应用问题,提出了分数阶微积分控制数字实现方法的评估策略,可以有效地对比分析不同的离散方法,找出适合于工程实际应用的数字离散方法.

1 分数阶微积分

分数阶微积分允许微积分的阶次是任意阶的,是经典整数微积分的自然扩展,比较著名的定义是 Riemann-Liouville 和 Grunwald-Letnikov 微积分定义^[1].Grunwald-Letnikov 定义直接可以导出分数阶微积分的离散形式,对连续可导函数 $f(t)$ 的 α 阶 Grunwald-Letnikov 分数微分定义如下

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \begin{bmatrix} \alpha \\ j \end{bmatrix} f(t-jh) \right\} \quad (1)$$

式中: α 为任意阶; h 为步长; $\begin{bmatrix} \alpha \\ j \end{bmatrix}$ 为二项式系数.统一的微积分算子包括分数阶和整数阶,可用算子式表示

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} d^\alpha/dt^\alpha & R(\alpha) > 0 \\ 1 & R(\alpha) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & R(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: a, t 为算子的积分上、下界; α 为微积分的阶数; $R(\alpha)$ 表示实数.

分数阶控制器是用分数阶微积分描述的控制,目前已经研究的分数阶控制器包括分数阶 PID 控制器、模糊分数阶控制器和分数阶迭代学习控制器等^[7-9].由于分数阶控制器对非线性和参数的不确定性具有较强的鲁棒性,因此它的应用研究得到了广泛的关注^[10].分数阶 PID 控制器是整数阶 PID 控制器的统一,其微分方程表达为

$$u(t) = K_p e(t) + K_i D_t^{-\lambda} e(t) + K_d D_t^\delta e(t) \quad (3)$$

式中: $e(t)$ 为控制器输入; K_p 、 K_i 和 K_d 分别为比例、

积分和微分常数; λ 是积分阶数; δ 是微分阶数.

分数阶控制器的连续传递函数为

$$G_c(s) = K_p + K_i s^{-\lambda} + K_d s^\delta \quad (4)$$

从式(4)中可以看出,由分数阶控制的频域特性可以通过复频域算子 $s=j\omega$ 替换且直接进行分析,而在时域内由于分数阶系统具有无限维,分数阶控制器需要记忆过去所有的历史,因此它的数字实现比较困难,而且在工程中需要高计算能力的运算单元才能实现.

2 时域离散方法

2.1 定义离散法

由于接近起点的二项式系数足够小时可以忽略或忘掉大量过去的时间序列,因此分数阶微积分的数字实现可以只考虑最近的一段时间序列^[11],即

$${}_a D_t^\alpha x(t) \approx {}_{t-L} D_t^\alpha x(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^m b_j x(t-jh) \quad (5)$$

式中: L 为记忆时间长度, $t > L$, $m = \left\lceil \frac{L}{h} \right\rceil$;系数 b_j 可以通过下式计算

$$b_0 = 1; b_j = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) b_{j-1}; \quad (j \geq 1) \quad (6)$$

假设让时间计算 h 等于采样周期 T ,对式(5)进行 Z 变换可得

$$Z\{D^\alpha x(t)\} \approx \left(\frac{1}{T^\alpha} \sum_{j=0}^m b_j z^{-j}\right) X(z) \quad (7)$$

式中: $X(z)$ 是 $x(t)$ 的离散模型.上述方法是在区间 $[t-L, t]$ 内进行计算的,即仅考虑最近的历史,因此又称为短时记忆法^[11](SMP).

2.2 直接离散法

当传统的整数阶线性连续系统向离散系统变换时,将连续系统传递函数中的复变量 s 用 $s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$ 代替,直接就可以求出连续系统的离散模型,其中 T 为离散时的采样周期,也就是常用的双线性变换或称 Tustin 变换.如果直接将双线性变换离散方法应用于分数阶系统或控制器,得到的离散系统是关于变量 z 的无理方程,需要对其进行有理近似化处理,目前采用的有理化近似的方法主要有:幂级数展开式法(PSE,式中用 P_{SE} 表示)和连分数展开式法^[12](CFE,式中用 C_{FE} 表示).

对于分数阶微积分算子 s^α ,从 s 到 z 的变换方法有多种,不同的变换方法对应不同的变化函数.这些方法有后向差分法、双线性变换法等,其中后向差分法又叫欧拉法,学者 Al-Alaoui 将后向差分法和

双线性变换法通过线性组合,得到了新的离散变换函数 Al-Alaoui 算子^[13].上述不同的直接离散变换方法得到的结果都是无理方程,必须进行有理近似运算才能得到满足控制精度要求的离散分数阶系统和控制器.采用幂级数展开式法可以得到3种离散方法,它们是幂级数欧拉法、幂级数双线性变换法和幂级数复合算子法,而采用连分式展开式法也可以得到3种离散方法,它们是连分式欧拉法、连分式双线性变换法和连分式复合算子法.

幂级数欧拉法(PSEE)的离散模型为

$$Z_{PSEE}(s^\alpha) \approx \left(\frac{1}{T}\right)^\alpha P_{SE} \left\{ (1 - z^{-1})^\alpha \right\} \quad (8)$$

幂级数双线性变换法(PSET)的离散模型为

$$Z_{PSET}(s^\alpha) \approx \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha P_{SE} \left\{ \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^\alpha \right\} \quad (9)$$

幂级数复合算子法(PSEA)的离散模型为

$$Z_{PSEA}(s^\alpha) \approx \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha P_{SE} \left\{ \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}/7}\right)^\alpha \right\} \quad (10)$$

在幂级数欧拉离散法中, $(1 - z^{-1})^\alpha$ 的幂级数展开与定义离散法 SMP 的系数是一样的,因此在以后的分析中采用 SMP 代替幂级数欧拉法.

连分式欧拉法(CFEE)离散模型为

$$Z_{CFEE}(s^\alpha) \approx \left(\frac{1}{T}\right)^\alpha C_{FE} \left\{ (1 - z^{-1})^\alpha \right\} \quad (11)$$

连分式双线性变换法(CFET)的离散模型为

$$Z_{CFET}(s^\alpha) \approx \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha C_{FE} \left\{ \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^\alpha \right\} \quad (12)$$

连分式复合算子法 CFEA 的离散模型为

$$Z_{CFEA}(s^\alpha) \approx \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha C_{FE} \left\{ \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}/7}\right)^\alpha \right\} \quad (13)$$

3 评估策略研究

为评估离散方法,现引入一个典型的位置控制系统(见图1),控制对象为双积分系统,控制器为一个分数阶微分控制器,其中常数 $A=100$, $K_d=1$. 控制对象为控制领域内最基本的控制系统,代表单自由度的转动和平动,在众多实际控制中有较广泛的应用.

为评估近似离散法的记忆长度,即有理近似截断长度对控制性能的影响,引入误差绝对值的平方

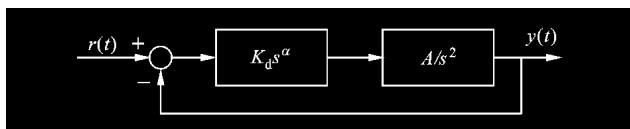


图1 具有分数阶控制器的位置控制系统

和函数作为近似性能评价指标

$$J = \int_0^t |f_d(t) - f_b(t)|^2 dt \quad (14)$$

式中:仿真时间 $t=1$ s; $f_d(t)$ 表示近似离散后控制系统的单位阶跃时间响应; $f_b(t)$ 表示真实系统单位阶跃时间响应. 这里用全记忆长度的 Grunwald-Letnikov 定义作为基准系统.

位置控制系统的闭环传递函数为

$$G_c = \frac{K_d A}{s^{2-\alpha} + K_d A} \quad (15)$$

则位置控制系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{K_d A}{s^{2-\alpha} + K_d A} \right\} = K_d A t^{2-\alpha} E_{2-\alpha, 2-\alpha+1}(-K_d A t^{2-\alpha}) \quad (16)$$

式中: E 为双参数的 Mittag-Leffler 函数. 式(16)即为真实系统的单位阶跃时间响应,在下面的对比研究中作为基准系统,而分数阶控制器的离散采样周期均为 0.001 s.

图2为采用不同记忆长度短时记忆离散法(SMP)得到的单位阶跃时间响应.当 $m=100$ 时,采用 SMP 离散方法的有理近似系统已经很逼近基准线.图3表明了记忆长度对 J 的影响,当 $m=10$ 时, $J=130.04$; 当 $m=50$ 时, $J=7.1128$; 当 m 从 100 开始增加时,控制响应性能的提高不很明显.因此,采用短时记忆法在 $m=100$ 时就可以达到比较精确的近似.在现实的实时控制中, $m=100$ 就意味着控制器在计算输出时至少需要 100 次乘法和 99 次加法,这对于微处理器有限资源来说是一个比较困难的事情.

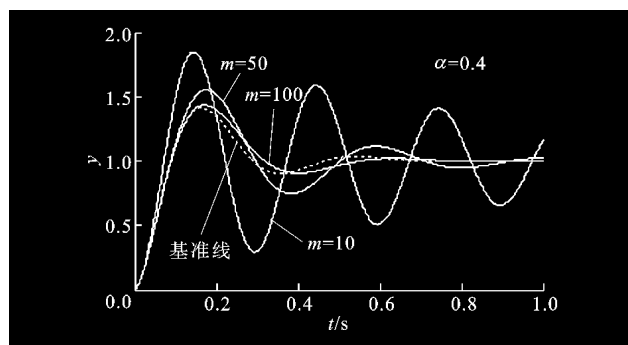


图2 不同记忆长度的单位阶跃响应

图4为3种幂级数直接离散法的单位阶跃时间响应,它们的截断项数都是100,可以看出 PSEA 和 SMP 几乎重合在一起,但从近似性能指数来看, $J_{PSEA}=1.9311$, 而 $J_{SMP}=1.9335$, 因此 PSEA 稍优于 SMP, 而 PSET 明显优于其他2种方法,其性能

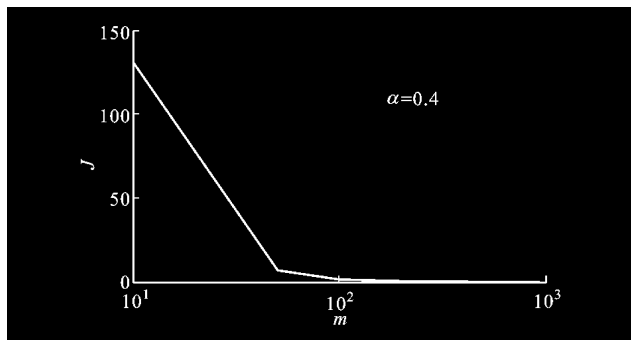


图3 不同记忆长度的性能指数

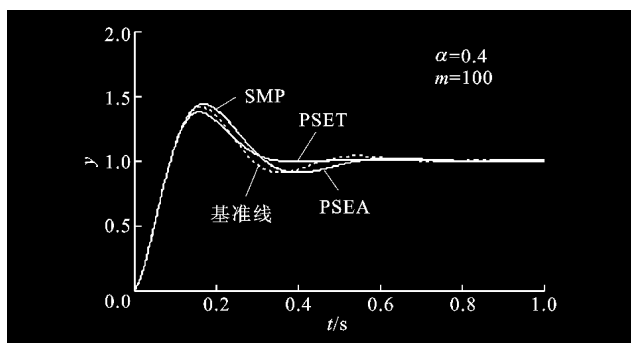


图4 幂级数直接离散法的单位阶跃响应

指标 $J_{\text{PSET}} = 1.1608$. 图5为3种连分式展开式直接离散法的单位阶跃时间响应,其中 $m=5$,可以看出CFEA和CFEE的响应曲线差不多, $J_{\text{CFEA}} = 12.483$,而 $J_{\text{CFEE}} = 9.318$,CFEE稍优于PSEA,而CFET明显不如其他2种方法,其性能指标 $J_{\text{CFET}} = 37.322$.

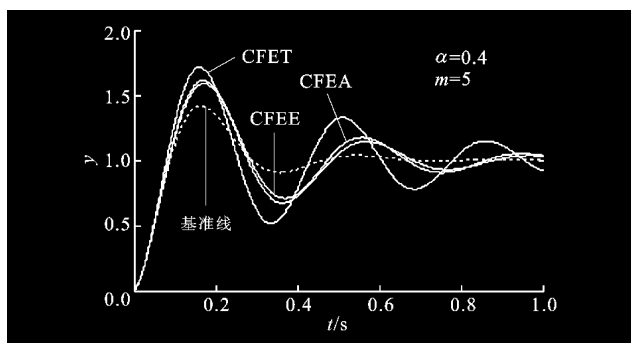


图5 连分式直接离散法的单位阶跃响应

从图2、图4和图5中可以看出,采用连分式展开式直接离散法得到的近似有理方程,以比较低的阶次就可以得到较好的近似结果. CFEA和CFEE用阶次为5的近似模型得到的结果与PSEE用阶次为50的结果相差不大,即采用连分式法只用10次乘法运算就可以得到幂级数法要用50次乘法运算才能得到的结果. 当采用近似离散模型、阶次为10时,得到 $J=0.57212$. 图6为3种连分式展开式直

接离散法的性能指标随模型阶次的变化趋势,与图3相比,连分式展开式直接离散法收敛速度特别快,模型阶次为10的近似模型相当于阶次为100的幂级数展开法的近似结果.

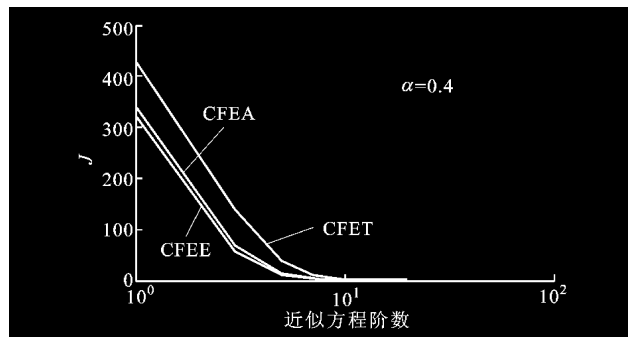


图6 连分式直接离散法的近似性能指数

以上进行的离散算法评估策略分析是针对典型位置控制系统的,从结果中可以看出,CFEE和CFEA比较适合于分数阶控制算法的实际工程应用,气动位置伺服的分数阶控制试验结果也验证了分数阶控制器离散算法的评估^[14].

4 结 论

本文引入典型双积分位置控制系统作为控制对象,利用全记忆长度的分数阶控制系统作为评估基准,对采用不同离散方法的分数阶控制器进行了阶跃响应和性能指标对比分析,得到了分数阶控制器离散方法的有效评估策略.

利用本文提出的评估策略分析表明,幂级数直接离散法得到近似离散模型需要记忆长度为100,方可获得较好的近似,而连分式直接离散法近似离散模型为10阶时就可以获得较好的近似.

通过对不同离散方法的机理分析和评估研究,表明连分式欧拉法和连分式复合算子法比较适合于分数阶控制算法的实际应用.

参考文献:

- [1] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999:1-26.
- [2] Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, 2003 (54):3413-3442.
- [3] Maia N M M, Silva J M M, Ribeiro A M R. On a general model for damping[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 218(5):749-767.
- [4] Cosson P, Michon J C. Identification by a non-integer

- order model of the mechanical behaviour of an elastomer[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1996, 7(11): 1807-1824.
- [5] Oustaloup A, Levron F, Mathieu B, et al. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2000, 47(1):25-39.
- [6] Chen Yangquan, Moore K L. Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2002, 49(3): 363-367.
- [7] Podlubny I. Fractional-order systems and $PI^{\delta}D^{\delta}$ controllers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208-213.
- [8] 曹军义, 梁晋, 曹秉刚. 基于分数阶微积分的模糊分数阶控制器的研究[J]. *西安交通大学学报*, 2005, 39(11):1246-1249.
Cao Junyi, Liang Jin, Cao Binggang. Fuzzy fractional order controller based on fractional calculus [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2005, 39(11):1246-1249.
- [9] Chen Yangquan, Kevin L M. On D^{α} -type iterative learning control [C]// *Proceeding of the 40th IEEE Conference on Control and Decision*. Florida: IEEE Press, 2001:4451-4456.
- [10] 曹军义, 曹秉刚. 分数阶控制器的数字实现及其特性研究[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(5):992-997.
Cao Junyi, Cao Binggang. Digital realization and characteristics of fractional order controllers[J]. *Control Theory and Applications*, 2006, 23(5):992-997.
- [11] Lubich C. Discretized fractional calculus[J]. *SIAM Journal of Mathematic Analysis*, 1986, 17(3): 704-719.
- [12] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 MATLAB 的求解[M]. 北京:清华大学出版社, 2004: 275-286.
- [13] Al-Alaoui M A. Novel digital integrator and differentiator [J]. *Electronics Letters*, 1993, 29(4):376-378.
- [14] 曹军义. 分数阶控制策略及其在气动位置控制中的应用研究[D]. 西安:西安交通大学机械工程学院, 2006.

(编辑 管咏梅)