

谱元方法求解含吸收边界的声学问题

许靖, 秦国良, 朱昌允

(西安交通大学流体机械研究所, 710049, 西安)

摘要: 推导并实现了带吸收边界条件的二维波动方程的切比雪夫谱元解法. 该解法引入一阶 Clayton-Engquist-Majda 吸收边界条件, 在空间上利用谱元方法, 在时间上利用中心差分的积分方法得到波动方程的离散形式, 并给出具体算例进行了验证. 结果表明: 该解法在空间上具有谱精度, 在时间上达到二阶精度; 与第一类边界条件相比, 吸收边界有效地削弱了边界上的数值反射, 避免了解的失真; 使用中心差分的时间积分方法同隐式积分方法相比, 适合波的传播特性, 避免了矩阵求逆运算, 并且占用的计算机内存小.

关键词: 吸收边界条件; 波动方程; 谱元; 中心差分法

中图分类号: O42 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)07-0875-04

Chebyshev Spectral Elements Method for Wave Equation with Absorbing Boundary Conditions

Xu Jing, Qin Guoliang, Zhu Changyun

(Fluid Machinery Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A Chebyshev spectral elements approximation of the acoustic wave equation with first-order Clayton-Engquist-Majda absorbing boundary conditions was derived. Its discretization is based on spectral elements in space and central differences method in time. The numerical result, shows that this approximation has spectral accuracy in space and up to second-order in time. Compared with the same wave problems with conventional Dirichlet boundary conditions, the absorbing boundary conditions can reduce the numerical reflection on boundaries and avoid solution distortion. In addition, the central differences method is economic in memory requirement and computing time compared with implicit integral method.

Keywords: absorbing boundary condition; wave equation; spectral element; central difference method

气动声学是建立在气体动力学和声学基础上的一门交叉学科, 它的研究重点放在流动及其与物体作用导致噪声产生的机理上, 典型的研究对象是工业应用中各种形式的叶轮机械气动噪声问题. 理解、预测并最终能够控制气动噪声的工作越来越引起学术界和工业应用部门的重视.

计算气动声学是用数值方法来研究气动声学, 其经典的数值模拟是建立在有限差分^[1]或有限元^[2]空间离散上的, 但在实际问题中, 由于上述方法不能

满足声学模型所需的高精确度, 促使谱元方法产生并开始应用于气动声学问题. 谱元方法是 Patera^[3]在结合谱方法的精度和有限元的思想上提出的, 较之经典方法有着非常高的精度(谱精度), 且和有限元方法有同样出色的几何区域适应性, 已成为计算气动声学新的研究方向.

在利用谱元方法计算气动声学问题时, 常需要引入人工边界来限制计算范围. 原因是计算区域内的波和流动小扰动穿过人工边界时, 会产生反射现

象,所产生的非物理的误差返回计算区域就会得到面目全非的解,这就要求在边界上加上相应的人工边界条件,以确保所求得解很好地逼近原来无界区域上的解.对波动方程来说,就是在人工边界上反射尽可能地小,使之对区域内部的解的影响在允许的误差范围以内,称为吸收边界条件(ABC).

近二十多年来,波动方程吸收边界条件的研究已有不少成果,其中以文献[4-5]提出的 Clayton-Engquist-Majda 吸收边界条件使用最为普遍.近年来,文献[6]将其引入伪谱方法,文献[7]将其引入波动方程的差分格式中.

本文的工作将以 Clayton-Engquist-Majda 边界条件为基础.

1 数值模型

考虑平面矩形区域 $\Omega = \{(x, y): -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$, $\partial\Omega$ 为其边界, $\mathbf{n}$ 为边界外法线方向;时域为 $(0, T)$, 二维波动方程可表示如下

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f(x, y, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

初值条件定义为

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y) \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= u_1(x, y) \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

第一、第二类边界条件为

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \Phi(x, y, t) \quad \text{on } \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) &= \Psi(x, y, t) \quad \text{on } \Gamma_N \times (0, T) \end{aligned} \quad (3)$$

式中: c_0 为声速; u 为广义位移; t 为时间; (x, y) 为平面点坐标; f 为源项; u_0, u_1 为 $t=0$ 时刻给定的初值; Φ, Ψ 分别为给定的第一、第二类边界条件; Γ_D, Γ_N 分别为第一、第二类边界条件所在的边界. 在边界 Γ_{AB} 上引入一阶精度的 Clayton-Engquist-Majda 吸收边界条件

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{AB} \times (0, T)$$

$$\Gamma_{AB} \subset \partial\Omega, \quad \partial\Omega = \Gamma_{AB} \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

相应的变分问题可以表示为: 寻找 $u \in H_0^1(\Omega)$, 在 $t=0$ 时, Γ_D 上 $u(t) = \Phi(t)$, 且

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v \right) + a(u, v) + c_0 \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle_{\Gamma_{AB}} &= \\ (f, v) + \langle \Psi, v \rangle_{\Gamma_N} \quad \forall v \in V & \quad (4) \\ a(u, v) &= c_0^2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \end{aligned}$$

$$\langle \Psi, v \rangle_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \Psi v \, ds$$

2 波动方程的谱元离散

对上面的变分问题, 运用切比雪夫谱元方法对方程(4)进行离散. 首先将求解域 Ω 分解成 N 个互不相重叠的求解单元, 即 $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$. 将第 i 个单元 E_i 通过坐标转换为标准单元 e_i , 在标准单元 e_i 内, 选择切比雪夫多项式的极值点作为插值点.

$u(x, y), v(x, y)$ 插值表达式为

$$\begin{aligned} u^i(\xi, \eta) &= \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_y^i} u_{jk}^i h_j^i(\xi) h_k^i(\eta) \\ v^i(\xi, \eta) &= \sum_{p=0}^{N_x^i} \sum_{q=0}^{N_y^i} v_{pq}^i h_p^i(\xi) h_q^i(\eta) \end{aligned}$$

其中插值函数 $h_j^i(\xi)$ 可表示为

$$\begin{aligned} h_j^i(\xi) &= \frac{2}{N_x^i} \sum_{m=0}^{N_x^i} \frac{1}{c_j c_m} T_m(\xi_j^i) T_m(\xi) \\ h_k^i(\eta) &= \frac{2}{N_y^i} \sum_{n=0}^{N_y^i} \frac{1}{c_k c_n} T_n(\eta_k^i) T_n(\eta) \end{aligned}$$

式中: 当 $k \neq 0, N_x^i$ 时, $c_k = 1$; 当 $k = 0, N_x^i$ 时, $c_k = 2$.

T_m, T_n 为切比雪夫多项式, 在标准单元 e_i 外, $h_j^i(\xi), h_k^i(\eta)$ 为 0.

在单元 e_i 上对式(4)中各项进行离散, 以 $a(u, v)$ 为例

$$a(u, v) =$$

$$\sum_{p=0}^{N_x^i} \sum_{q=0}^{N_y^i} v_{pq}^i \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_y^i} u_{jk}^i a(h_j^i(\xi) h_k^i(\eta), h_p^i(\xi) h_q^i(\eta))$$

其中

$$\begin{aligned} a(h_j^i(\xi) h_k^i(\eta), h_p^i(\xi) h_q^i(\eta)) &= \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \frac{\partial [h_j^i(\xi) h_k^i(\eta)]}{\partial x} \frac{\partial [h_p^i(\xi) h_q^i(\eta)]}{\partial x} + \right. & \\ \frac{\partial [h_j^i(\xi) h_k^i(\eta)]}{\partial y} \frac{\partial [h_p^i(\xi) h_q^i(\eta)]}{\partial y} + & \\ \left. \sigma h_j^i(\xi) h_k^i(\eta) h_p^i(\xi) h_q^i(\eta) \right\} dx dy = & \\ A_{jkpq}^i + c_0^2 B_{jkpq}^i & \end{aligned}$$

用同样方法可得到 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v \right), (f, v)$ 的离散表达式, 对吸收边界条件项

$$c_0 \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle_{\Gamma_{AB}} =$$

$$\sum_{p=0}^{N_x^i} \sum_{q=0}^{N_y^i} v_{pq}^i c_0 \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_y^i} \dot{u}_{jk}^i B_{jkpq}^i$$

单元质量、刚度和阻尼矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_y^i} u_{jk}^i \mathbf{B}_{jkpq}^i \\ \mathbf{K}_e &= \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_y^i} u_{jk}^i (\mathbf{A}_{jkpq}^i + \sigma \mathbf{B}_{jkpq}^i) \\ \mathbf{C}_e &= c_0 \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_y^i} \dot{u}_{jk}^i \mathbf{B}_{jkpq}^i \end{aligned}$$

将各单元矩阵合成为总体矩阵,最终可得到以下一般形式的动力学运动方程

$$\mathbf{M} \mathbf{u}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{Q} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}$ 表示 $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$. 式(5)为关于时间的二阶线性常微分方程,下面将着重讨论离散的时间积分方法及其稳定性.

3 显式时间积分方法

式(5)在时域上的求解一般有隐式和显式2种逐步积分途径. 隐式逐步积分方法有 Wilson- θ 法、Newmark 方法等,这类方法每一时间步的计算都需要求解线性方程组,不利于计算多自由度问题,因而在实际波动数值分析中常采用显式逐步积分方法. 显式积分方法需要的计算机内存相对较小,但一般是条件稳定的. 这里选择较适用于波传播问题的中心差分法.

在中心差分法中, t 时刻的广义速度 $\dot{u}_t$ 和加速度 $\ddot{u}_t$ 可表示如下

$$\dot{u}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (u_{t-\Delta t} - 2u_t + u_{t+\Delta t}) \quad (6)$$

$$\ddot{u}_t = \frac{1}{2\Delta t} (-u_{t-\Delta t} + u_{t+\Delta t}) \quad (7)$$

将式(6)、式(7)代入式(5)可得到中心差分法的递推公式如下

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{Q}_t - \\ \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_t &- \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (8)$$

利用式(8)可以依次递推得到各个离散时间点的解,但此算法有一个起步问题,当 $t=0$ 时,为了计算 $u_{-\Delta t}$,除了已知的初始条件 u_0 外,还需要有 $u_{t-\Delta t}$,为此可以利用式(6)、式(7)得到

$$u_{-\Delta t} = u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0$$

u_0 和 $\dot{u}_0$ 可以从给定初始条件得到,而 $\ddot{u}_0$ 可利用 $t=0$ 时的式(5)得到,即

$$\ddot{u}_0 = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{C} \dot{u}_0 - \mathbf{K} u_0)$$

中心差分法的稳定性条件可参考文献[8]的结果: $\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi}$, 其中 Δt_{cr} 是临界时间步长, T_n 是系统的最小固有周期.

4 数值检验

下面给出一个计算气动声学中的算例来验证谱元方法和中心差分法解带吸收边界条件的波动方程的可靠性,考虑问题区域为 $\Omega = \{(x, y): -100 \leq x \leq 100, -100 \leq y \leq 100\}$, 人工边界 $\partial\Omega$ 上面加有一阶吸收边界条件,给出控制方程和定值条件如下

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

$$u(x, y, 0) = \exp(-(\ln 2) \frac{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2}{9})$$

$$\dot{u}(x, y, 0) = 0$$

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0, T)$$

式中: $x_a=0; y_a=0$.

该算例可以看作一个在区域中心产生的声压扰动随时间向周围环境传播直至消失. 对于数值模拟使用的网格,按前面所述方法将区域划分为 7×7 的单元,每单元再划分为 7×7 的网格,如图1所示.

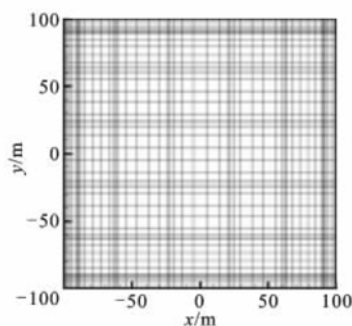


图1 计算区域的网格划分

使用近似方法得到粗略的临界时间步长 $\Delta t_{cr} < 0.00150$, 取 $\Delta t=0.0005$, 计算1000步,得到含吸收边界的各个时刻声场的云图,将其同边界上加第一类边界条件所得声场云图进行对比,得到图2.

5 结论与展望

本文为声学波动方程的切比雪夫谱元解法引入了一阶精度的吸收边界条件,与第一类边界条件相比,给出的吸收边界条件很好地削弱了边界上的数值反射,有效地防止了数值反射引起的解失真. 在时域的离散上本文使用了中心差分的显示时间积分方

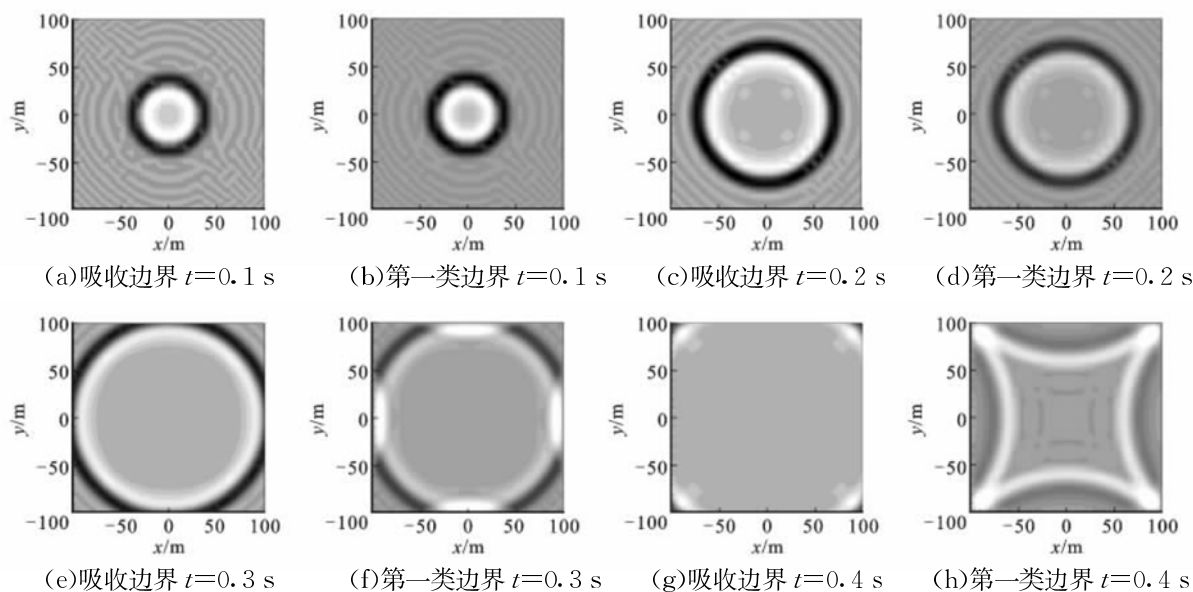


图2 矩形区域中2种边界条件下声扰动传播情况数值模拟的对比(扰动产生在(0,0)点)

法,虽然较之隐式方法(如 Newmark 方法)有需要计算机内存小、适合波传播特性等优点,但同样存在条件稳定、时域较长时工作量庞大等缺陷,且2种方法都只有二阶精度,与空间上谱元方法的谱精度相比有很大差距.因此,今后的工作需要围绕下面几点展开:

- (1) 为谱元方法寻找更高精度的吸收边界条件;
- (2) 寻找与谱元方法相匹配的高精度时间积分方法;
- (3) 发展存储量小、易于实现并行计算和适合复杂计算区域的谱元方法;
- (4) 研究流场与声场的统一求解问题.

参考文献:

- [1] Alford R M, Kelly K R, Boore D M. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation[J]. *Geophysics*, 1974, 39(4): 834-842.
- [2] Hughes T J R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis[M]. New York, USA: Dover Publications Inc., 2000.
- [3] Patera A T. A spectral element method for fluid dy-

namics: laminar flow in a channel expansion[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 54:468-488.

- [4] Clayton R, Engquist B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations[J]. *Bull Seism Soc Am*, 1977, 67(6): 1527-1540.
- [5] Engquist B, Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves[J]. *Mathematics of Computation*, 1977, 31(139): 629-651.
- [6] Renaut R, Froehlich J. Pseudospectral Chebychev method for the 2D wave equation with domain stretching and absorbing boundary conditions[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 124:324-336.
- [7] 邵秀民,刘臻. 带吸收边界条件的声波方程显示差分格式的稳定性分析[J]. *计算数学*, 2001, 23(2): 163-186.
- Shao Xiumin, Liu Zhen. Stability analysis of explicit finite difference schemes for the acoustic wave equation with absorbing boundary conditions[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2001, 23(2): 163-186.
- [8] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2000:491.

(编辑 王焕雪)