

应变空间的软岩统一弹塑性软化本构模型

宋丽, 廖红建

(西安交通大学土木工程系, 710049, 西安)

摘要: 为使以拉为正的统一强度理论表达式适用于岩土工程界以压为正的惯用表达, 首先将以压为正的单向压缩和单向拉伸试验条件代入统一强度理论表达式, 确定了相关参数, 建立了以压为正的统一强度理论表达式, 该表达式考虑了材料拉压不等及中间主应力的影响. 将所建立的统一强度理论表达式引入应变空间, 针对一种硅藻质软岩材料, 利用基于应变空间的弹塑性本构方程对软岩的软化模型进行了分析和探讨, 建立了应变空间表述的三轴状态下的弹塑性本构关系式, 并结合硅藻质软岩的三轴试验结果进行了数值模拟分析, 结果表明应变空间的统一弹塑性软化本构方程的数值模拟结果非常接近试验结果, 可以很好地模拟软岩的应变软化特征.

关键词: 软岩; 应变软化; 本构模型; 应变空间; 统一强度理论

中图分类号: TU452 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)07-0857-05

Unified Elasto-Plastic Softening Constitutive Model of Soft Rock in Strain Space

Song Li, Liao Hongjian

(Department of Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to apply the unified strength theory taking tension as positive to the rock and soil engineering customarily taking compression as positive, the experimental conditions of simple compression and simple tension tests are substituted in the expression of the unified strength theory, and the relative parameters are determined, hence an expression of unified strength theory is derived for rock and soil materials, where compression is regarded as positive, and the difference of tension and compression strength of rock and soil materials and the effect of intermediate principal stress are taken into account. The presented unified strength theory is then introduced to establish an elasto-plastic softening constitutive model of triaxial state in strain space for a sort of diatom soft rock. A numerical simulation is carried out along with the test data of the diatom soft rock, and the result shows that the simulation of the unified elasto-plastic softening constitutive model coincides well with the test and describes the strain softening accurately.

Keywords: soft rock; strain softening; constitutive model; strain space; unified strength theory

软岩是一种特定环境下具有显著塑性变形的复杂岩石力学介质, 其定义详见文献[1]. 软岩是土木工程常见的岩体材料, 与大坝、隧道、边坡、核电站、桥梁等建筑物有着密切的关系, 是工程地质和岩体工程中的重要研究对象. 随着我国三峡工程等许多

大型水利工程的兴建和城市基建规模的日益扩大, 以及城市地下空间的开发, 软岩给结构设计、施工工艺带来了一系列特殊问题, 为此势必要求我们对软岩的工程力学特性有更清楚的认识, 并建立适用于软岩的力学本构模型^[2-3], 以便对工程中软岩材料的

变形及破坏作出合理的预测. 以往的研究表明, 软岩破坏时沿某破裂面发生滑动, 最终处于残余强度状态, 因此设计时应着眼于软岩的应变软化和残余强度状态^[4-5].

目前用于软岩的弹塑性本构模型大都是基于应力空间的, 而在应力空间中表述的弹塑性理论体系不能有效地处理岩土类介质等不稳定材料. 这类材料的屈服和破坏直接取决于应变变量, 而应变变量可以由试验直接测得, 因此用应变表达的屈服和破坏准则更能反映材料屈服和破坏的本质, 以应变作为基本量更适应当前以位移作为未知量的数值分析方法^[6]. 与建立应力空间类似, 以3条应变主轴作为坐标轴可以构成三维主应变空间. 本文建立了以压为正的统一强度理论表达式, 将具有广泛适用性的统一强度理论引入应变空间, 基于统一强度理论和应变空间的弹塑性本构方程式, 对一种硅藻质软岩的软化模型进行分析和探讨, 推导出了应变空间的统一强度理论屈服函数, 建立了应变空间表述的三轴状态下的弹塑性本构关系式.

1 以压为正的统一强度理论表达式

俞茂宏教授于1991年提出的统一强度理论可以认为是宏观强度理论的高度概括, 其数学表达式见文献^[7]. 为了适应岩土工程中以压为正的惯例, 将以压为正的单向压缩和单向拉伸试验条件代入文献^[7]的表达式, 可确定系数如下

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}; \quad C = \frac{\sigma_c(1+b)\alpha}{\alpha + 1}$$

式中: 拉压强度比参数 $\alpha = \sigma_t / \sigma_c$ 反映了材料的强度差效应; b 为反映中间主剪应力作用的系数; β 为反映正应力对材料破坏的影响系数; C 为材料的强度参数. 将此系数代入统一强度理论表达式, 可得以压为正的统一强度理论表达式

$$\sigma_2 \leq \frac{\alpha \sigma_1 + \sigma_3}{\alpha + 1}; \quad F = \alpha \sigma_1 - \frac{1}{b+1}(b \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t \quad (1)$$

$$\sigma_2 \geq \frac{\alpha \sigma_1 + \sigma_3}{\alpha + 1}; \quad F' = \frac{\alpha}{1+b}(\sigma_1 + b \sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_t \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}; \quad \sigma_t = \frac{2C_0 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}; \quad K = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi}$$

统一强度理论判别式为

$$\sigma_2 \leq \frac{\alpha \sigma_1 + \sigma_3}{\alpha + 1} \quad (3)$$

2 基于应变空间的统一弹塑性软化本构模型

2.1 基于应变空间的弹塑性本构方程^[7]

应力空间中的屈服函数可以表示为

$$\Phi(\sigma_{ij}, \kappa) = 0 \quad (4)$$

式中: κ 是硬化参数, 其增量形式为

$$d\kappa = b_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (5)$$

b_{ij} 为待定常数, 其值由试验确定.

应力张量 σ_{ij} 与弹性应变张量 ϵ_{mn}^e 有如下关系

$$\sigma_{ij} = D_{ijmn} \epsilon_{mn}^e \quad (6)$$

式中: 弹性刚度张量 D_{ijmn} 为

$$D_{ijmn} = 2G\delta_{ijn}\delta_{jln} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{mn} \quad (7)$$

其中 K, G 分别为体积模量和剪切模量, δ_{ij} 为 Kronecker 符号, 当 $i=j$ 时, $\delta=1$, 当 $i \neq j$ 时, $\delta=0$.

将应变张量分为弹性和塑性2部分, 则有

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (8)$$

将式(6)、式(8)代入式(4), 得到应变空间的屈服函数表达式

$$\Psi(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p, \kappa) = 0 \quad (9)$$

式(9)为应力空间屈服函数的等效表达式.

进一步假设塑性势函数为 $Q=Q(\epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^p)$, 根据塑性流动法则, 可得到塑性应变增量

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (10)$$

由一致性条件 $d\Psi=0$, 从式(9)可得

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p + \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (11)$$

将式(5)、式(10)代入式(11), 可以求得塑性因子

$$d\lambda = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} / \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{ij}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} b_{mn} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{mn}} \right) \quad (12)$$

根据式(8)、式(9)有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \frac{\partial \epsilon^e}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^p} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \frac{\partial \epsilon^e}{\partial \epsilon_{ij}^p} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}^p} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}}$, 将其代入式(10)得

$$d\lambda = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} / \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{ij}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} b_{mn} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{mn}} \right) \quad (13)$$

再将式(13)代入式(10), 即可得到塑性应变增量的表达式

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} / \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{op}} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{op}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} b_{mn} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{mn}} \right) \quad (14)$$

要得到总应力应变的弹塑性关系式,由式(6)可得

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(d\epsilon_{mn} - d\epsilon_{mn}^p) \quad (15)$$

将式(14)代入式(15)得

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{\text{ep}} d\epsilon_{ij} \quad (16)$$

式中: D_{ijkl}^{ep} 为弹塑性刚度张量

$$D_{ijkl}^{\text{ep}} = D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{mn}} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{kl}} / \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{db}} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{db}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} b_{ad} \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_{ad}} \right) \quad (17)$$

2.2 硬化函数

硬化函数 κ 的选取非常重要.在加载过程中,加载面的形状、大小、中心位置和主方向都可能发生变化,而 κ 则决定了加载面的扩展方式.对硬化材料,加载面膨胀, κ 单调递增;对理想塑性材料,加载面保持不变, κ 等于0;对软化材料,加载面收缩, κ 减小.

现在建立考虑材料软化效应的硬化函数.在应力空间,满足等向硬化的屈服函数可以表示为

$$\Phi = \Phi^*(\sigma) - \kappa = 0 \quad (18)$$

κ 一般随着某个应变函数 ξ 变化,而 ξ 可以取任何合理的形式,但必须与材料特性一致.本文选取文献[8]中提出的硬化函数

$$\kappa(x) = \frac{H}{A} e^{Ax} \left(1 + \frac{1}{PA} - \frac{x}{P} \right) - \frac{H}{A} \left(1 + \frac{1}{PA} \right) \quad (19)$$

式中: P 、 H 、 A 为待定常数,由试验确定,其中 P 为峰值应力对应的 x 值, x 在分析不同问题时可以取不同的物理量,如塑性剪应变、体积应变、塑性功等, H 和 A 根据试验的峰值强度和残余强度确定.

2.3 统一弹塑性软化本构模型

利用本文推导的以压为正的统一强度理论表达式,将以应力不变量表达的主应力代入式(1)和式(2),可得应力不变量形式的统一强度理论表达式:

当 $\theta \leq \arctan \frac{3^{1/2}\alpha}{\alpha+2}$ 时

$$F = (\alpha - 1) \frac{I_1}{3} + \frac{1-b}{1+b} J_2^{1/2} \sin\theta + \left(\frac{J_2}{3} \right)^{1/2} \cos\theta = \sigma_t \quad (20)$$

当 $\theta \geq \arctan \frac{3^{1/2}\alpha}{\alpha+2}$ 时

$$F' = (\alpha - 1) \frac{I_1}{3} + \left(\frac{J_2}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{2-b}{1+b} \alpha + 1 \right) \cos\theta + J_2^{1/2} \left(\frac{b}{1+b} \alpha + 1 \right) \sin\theta = \sigma_t \quad (21)$$

取屈服函数为统一强度理论表达式,其在应力空间的表达式为

$$\Psi = F(\sigma_{ij}) - \kappa = 0 \quad (22)$$

对于三轴固结不排水试验, $\epsilon_v = 0$,而 $I_1 = 3KI_1'$
 $= 3K\epsilon_v = 0$,且 $\theta = 0 \leq \arctan \frac{3^{1/2}\alpha}{\alpha+2}$,所以式(20)化为

$$F = \left(\frac{J_2}{3} \right)^{1/2} = \sigma_t \quad (23)$$

式(22)化为

$$\Psi = \left(\frac{J_2}{3} \right)^{1/2} - \sigma_t - \kappa = 0 \quad (24)$$

$$\text{即} \quad \Psi = \frac{1}{3} q - \sigma_t - \kappa = 0 \quad (25)$$

取 $\kappa = \kappa(\epsilon_s^p)$

$$q = 3G\epsilon_s^e = 3G(\epsilon_s - \epsilon_s^p) \quad (26)$$

根据一致性条件有

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} d\epsilon_s + \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s^p} d\epsilon_s^p + \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (27)$$

式中

$$d\kappa = \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} d\epsilon_s^p$$

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} d\epsilon_s + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s^p} + \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} \right) d\epsilon_s^p = 0 \quad (28)$$

$$d\epsilon_s^p = d\lambda \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (29)$$

将式(29)代入式(28),得

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} d\epsilon_s + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s^p} + \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} \right) d\lambda \cdot \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} = 0 \quad (30)$$

$$d\lambda = - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} d\epsilon_s / \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s^p} + \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} \right) \cdot \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (31)$$

因为 $\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s^p}$,可得

$$d\lambda = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} d\epsilon_s / \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} \right) \cdot \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (32)$$

则

$$d\epsilon_s^p = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} d\epsilon_s / \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} \right) \quad (33)$$

$$dq = 3Gd\epsilon_s^e = 3G(d\epsilon_s - d\epsilon_s^p) = 3G \left[1 - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} / \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} \right) \right] d\epsilon_s = 3G \left[1 - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} / \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} + \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} \right) \right] d\epsilon_s \quad (34)$$

对常规三轴压缩试验

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_s} = G \quad (35)$$

则

$$dq = 3G \left[1 - G / \left(G + \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} \right) \right] d\epsilon_s \quad (36)$$

上式即为基于应变空间的弹塑性理论、采用以压为正的统一强度理论表达式及相关流动法则推导得出的三轴应力状态下的弹塑性本构关系式。

3 数值模拟及与试验结果的对比

本文采用文献[5]提供的试验资料,软岩材料为第三纪中新世后期的硅藻质软岩,取自日本石川县能登半岛端部,由硅藻的残骸物、黏土及火山灰等堆积而成,大多分布在沿海附近。由硅藻质软岩层中取边长为 40 cm 的立方体试件,制作成直径 5 cm、高 10 cm 的试样进行室内试验。在不同围压、不同加载速率条件下进行了应变控制式和应力控制式固结不排水三轴试验。试样完全饱和,孔隙比较高,为多孔质材料,具有较高的压缩性,前期固结压力为 1 500 kPa。

采用式(19)的经验公式作为硬化函数,并取 x 为塑性剪应变,有

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_s^p} = H e^{A \epsilon_s^p} \left(1 - \frac{\epsilon_s^p}{P} \right) \quad (37)$$

硬化函数中有 3 个参数: A 、 H 和 P 。 P 为峰值应力对应的塑性剪应变,可由试验曲线确定。根据峰值强度对应的应变,有

$$\frac{1}{3} q_p - \sigma_t = \frac{H}{A^2 P} e^{A P} - \frac{H}{A} - \frac{H}{A^2 P} \quad (38)$$

当偏应力达到残余强度 q_r 时,偏应力不再随应变变化,于是有

$$\frac{1}{3} q_r - \sigma_t = -\frac{H}{A} - \frac{H}{A^2 P} \quad (39)$$

联立式(38)和式(39),可以求得 A 、 H 值。

根据式(36)和式(37)以及求得的 A 、 H 值,可得出由统一弹塑性软化本构模型计算的软岩在不同围压下的应力-应变曲线。图 1 和图 2 分别为软岩在正常固结和超固结状态下的理论模拟值与试验值的对比,其中峰值强度和残余强度是工程中较为关心的数值。文献[5]的模拟采用的是根据 von Mises 屈服准则建立的应变空间硅藻质软岩的软化本构模型。将文献[5]和本文的模拟结果进行比较可看出,对于正常固结范围的模拟结果,两种方法的最大误差均在 10% 以内,而对于超固结范围的模拟结果,文献[5]的最大误差为 9%,本文的最大误差仅为

5%,计算结果与试验值很接近,并很好地控制了峰值强度和残余强度的大小,说明本文建立的应变空间统一弹塑性软化本构模型对描述软岩的应变软化性能更为适用[9]。两种模型的模拟计算结果也表明,统一强度理论在超固结范围的数值模拟结果更接近试验值,即统一强度理论比 von Mises 准则能更好地模拟超固结状态下软岩的应变软化特性。

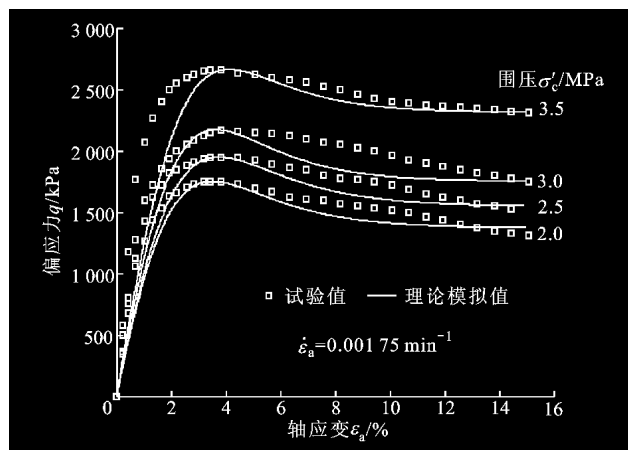


图1 正常固结范围计算值与试验值对比

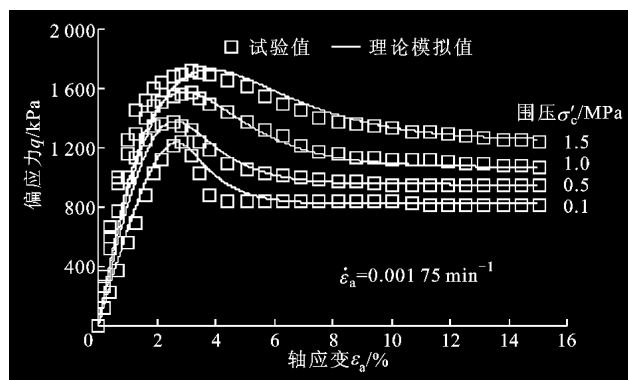


图2 超固结范围计算值与试验值对比

4 结 论

(1) 本文基于应变空间的弹塑性理论,采用以压为正的统一强度理论及相关的流动法则,推导出三轴应力状态下的软岩弹塑性本构关系式,并根据一定的硬化函数,利用导出的应变空间统一弹塑性软化本构模型对一种软岩材料的应变软化特征进行了模拟,模拟结果表明此模型能有效地描述软岩的软化特征。

(2) 本文推导的以压为正的统一强度理论表达式可以方便地应用于岩土工程中,符合岩土工程界以压为正的惯例。

(3) 软岩是一种具有应变软化特性的岩土材料,

其应力-应变关系表现出应变软化特征,在正常固结状态时呈现较平缓的峰后软化,处于超固结状态时在应力-应变曲线峰后出现陡降段,为驼峰型曲线。

参考文献:

- [1] 缪协兴,陈智纯. 软岩力学[M]. 徐州:中国矿业大学出版社,1995: 4-28.
- [2] Krishan G R, Zhao X L, Zaman M, et al. Fracture toughness of a soft sandstone [J]. International Journal of Rocks Mechanics and Mining Sciences, 1998, 35 (6): 695-710.
- [3] Yoshinaka R, Tran T V, Osada M. Non-linear stress-and strain-dependent behaviour of soft rocks under cyclic triaxial conditions [J]. International Journal of Rocks Mechanics and Mining Sciences, 1998, 35(7): 941-955.
- [4] 廖红建,宋丽,杨政,等. 往返荷载下粘性土的强度及取值标准试验研究[J]. 岩土力学, 2001, 22(1): 16-20.
- Liao Hongjian, Song Li, Yang Zheng, et al. Experiment study on shear strength and yield criterion of cohesive soils under repeated loads [J]. Rock and Soil Mechanics, 2001, 22(1): 16-20.
- [5] 廖红建,蒲武川,卿伟宸. 基于应变空间硅藻质软岩的软化本构模型[J]. 岩土力学, 2006, 27(11): 1861-1866.
- Liao Hongjian, Pu Wuchuan, Qing Weichen. Study on softening constitutive model of diatomaceous soft rock based on strain space [J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(11): 1861-1866.
- [6] 郑颖人,沈珠江,龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京:中国建筑工业出版社, 2002: 150-151.
- [7] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京:科学出版社, 1998: 254-257.
- [8] 张鲁渝. 基于应变空间的岩土软化本构模型及其数值模拟[D]. 重庆:后勤工程学院军事土木工程系, 2004.
- [9] 宋丽. 软岩三维非线性统一弹粘塑性本构模型[D]. 西安:西安交通大学土木工程系, 2006.

(编辑 葛赵青)