

6-PRRS 并联机器人正逆奇异性研究

刘玉斌, 赵杰, 杨永刚, 蔡鹤皋

(哈尔滨工业大学机器人研究所, 150001, 哈尔滨)

摘要: 基于雅可比矩阵研究了一种 6-PRRS 并联机器人的奇异性问题. 对于正奇异, 推导出一种基于速度投影的雅可比矩阵求解方法, 提出了空间瞬时轴这一新的概念, 并给出奇异产生时并联机构正奇异的表现形式. 对于逆奇异, 将并联机构拆分成多个串联机构, 由指数积方法求得雅可比矩阵, 并证明了机构逆奇异产生时的雅可比矩阵为奇异. 基于正、逆奇异, 又提出了一种更为特殊的复合奇异现象, 即在某个特定的空间位姿下, 正、逆奇异同时发生, 并给出了可能的存在形式. 所提雅可比矩阵的求解过程及其奇异性的证明, 以及对机构奇异的表現形式的描述, 为研究并联机构的奇异性提供了新的、直观的方法.

关键词: 机器人; 雅可比矩阵; 空间瞬时轴; 指数积; 奇异性

中图分类号: TP242 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)08-0922-05

Study on Forward and Inverse Singularity of a 6-PRRS Parallel Robot

LiuYubin, Zhao Jie, Yang Yonggang, Cai Hegao

(Robot Research Institute, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The singularity of a 6-PRRS parallel robot is studied based on Jacobins matrix. For forward singularity, the Jacobins matrix is obtained based on velocity projection, a new notion of spatial instantaneous axis is introduced, and the expressive form of the parallel mechanism singularity is given when it is generated. For inverse singularity, the parallel robot is divided into several series mechanisms, and the Jacobins matrix of these series mechanisms is solved by the exponential product equation and proved to be singular when the series mechanisms are singular. Based on forward or inverse singularity, a more special composite singular phenomena is proposed, which is generated when the forward and inverse singularities occur simultaneously under a certain spatial pose, and its possible existent form is given. The solving process of Jacobins matrix, the proving of matrix singularity and the description of the mechanism singularity provide a new and intuitional method for studying the singularity of parallel mechanism.

Keywords: robot; Jacobins matrix; spatial instantaneous axis; exponential product; singularity

奇异性和雅可比矩阵是并联机器人领域的 2 个重要研究内容, 奇异性概念是指在一个特定的配置状态下, 在并联机器人失去或者获得一个或多个自由度的情况下, 用并联机构的雅可比矩阵来表示输入与输出的微分关系.

到目前为止, 对并联机器人的奇异性有几种不同的分类方法, 如简洁分类下的结构性奇异、配置奇

异^[1]和公式奇异. 基于闭环机构的雅可比矩阵配置性奇异可进一步分为正、逆、复合奇异^[2].

一般情况下, 铰链与运动平台之间的速度关系为

$$Av = B\dot{q} \quad (1)$$

它是并联机构奇异的基本公式, 基于这个公式很多研究者通过代数方法^[3]、旋量理论^[4]、微分几何法等

对并联机构的奇异性进行了研究^[5-8].

本文推导出一种基于速度投影的雅可比矩阵求解方法,并给出正奇异发生时并联机构的具体表现形式,同时将并联机构拆分成多个串联机构,由此推导出逆奇异雅可比矩阵为奇异性矩阵,而且基于正、逆奇异又提出了一种更为特殊的复合奇异现象,并给出了可能的存在形式.

1 并联机构正奇异

1.1 基于速度投影方法的雅可比矩阵求解

6-PRRS 并联机器人属双平台并联多支路结构,主要有固定平台、动平台、以及连接 2 个平台的固定长度的连杆. 每个分支所包含的运动副数目及结构是相同的,其构成为:移动副 P 沿固定平台作直线运动, P 的移动部分的滑块通过 2 个转动副 R 与连杆连接,连杆通过球副 S 与动平台连接,如图 1 所示. 该并联机构的驱动关节为 6 个移动关节,具有 6 个自由度.

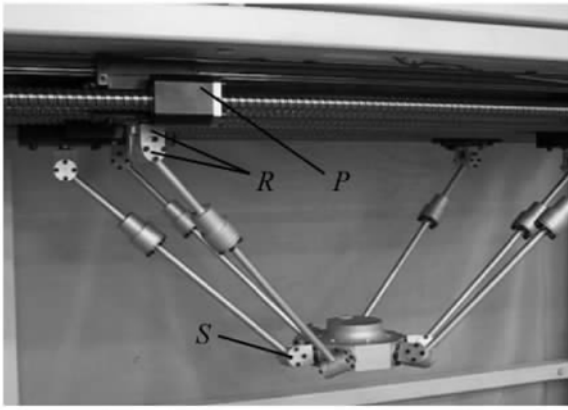


图 1 6-PRRS 并联机器人

刚体运动可以分解为跟随基点的平动与绕基点的转动,若以并联机器人的第一个运动支链为分析对象,那么机器人动平台铰链点的运动速度

$$\mathbf{V}_{A_1} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_1 \quad (2)$$

式中: $\mathbf{V}_{A_1} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 是铰点 A_1 的运动速度; $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 是动平台运动速度; $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 是动平台绕基点运动的瞬时角速度; $\mathbf{R}_1 \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 是铰点到动平台中心的矢量.

由速度投影定理,可将铰点 A_1 与铰点 B_1 的速度投影到这 2 点所在的向量 $\mathbf{n}_1$ 上(见图 2),令方向向量 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1$,则有以下投影关系

$$\mathbf{V}_{A_1} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{V}_{B_1} \cdot \mathbf{n}_1 \quad (3)$$

式中: $\mathbf{V}_{B_1} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 是铰点 B_1 的运动速度. 由式(2)、式(3)有

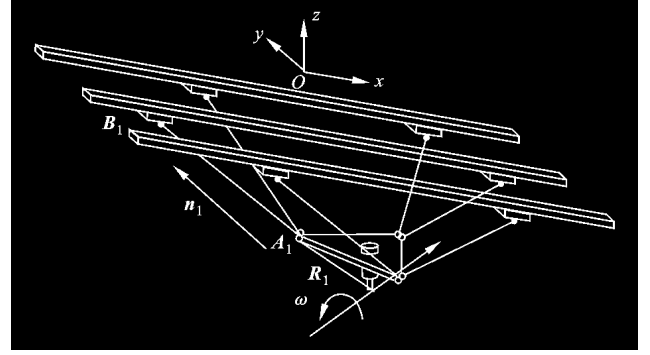


图 2 速度投影方法

$$\mathbf{V}_{B_1} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{V}_{A_1} \cdot \mathbf{n}_1 = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \quad (4)$$

令 $\mathbf{n}_1 = [n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}]$, 又考虑到 $\mathbf{V}_{B_1}$ 向量方向的特殊性, $\mathbf{V}_{B_1} = [V_{B_1x}, 0, 0]$, 则有

$$\mathbf{V}_{B_1} \cdot \mathbf{n}_1 = [V_{B_1x}, 0, 0] [n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}]^T = V_{B_1x} n_{1x} \quad (5)$$

根据式(4)、式(5)有

$$V_{B_1x} n_{1x} = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = [\mathbf{n}_1, \mathbf{R}_1 \times \mathbf{n}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (6)$$

令 $\mathbf{n}'_1 = \frac{\mathbf{n}_1}{n_{1x}}$, 可推导出

$$V_{B_1x} = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_1) \cdot \frac{\mathbf{n}_1}{n_{1x}} = [\mathbf{n}'_1, \mathbf{R}_1 \times \mathbf{n}'_1] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (7)$$

以上的分析是针对一个分支而言的,对于 6 个支链,令 $\mathbf{V}_{B_c}$ 为 6 个滑块在 X 方向上的速度矩阵,则有

$$\mathbf{V}_{B_c} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中

$$\mathbf{V}_{B_c} = [V_{B_1x} \cdots V_{B_6x}]_{6 \times 1}^T$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}'_1 & \mathbf{R}_1 \times \mathbf{n}'_1 \\ \mathbf{n}'_2 & \mathbf{R}_2 \times \mathbf{n}'_2 \\ \mathbf{n}'_3 & \mathbf{R}_3 \times \mathbf{n}'_3 \\ \mathbf{n}'_4 & \mathbf{R}_4 \times \mathbf{n}'_4 \\ \mathbf{n}'_5 & \mathbf{R}_5 \times \mathbf{n}'_5 \\ \mathbf{n}'_6 & \mathbf{R}_6 \times \mathbf{n}'_6 \end{bmatrix}_{[6 \times 6]} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{J}$ 表示机构输入与输出映射关系的雅可比矩阵. 该雅可比矩阵是基于空间向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的, 因此若表示基于欧拉角形式的雅可比矩阵, 还需在此基础上增加一个转换矩阵 $\mathbf{A}_{\omega\theta}$, 用来表示总旋转与欧拉角旋转之间的关系, 则对于欧拉角的雅可比矩阵, 有

$$\mathbf{J}_\theta = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\omega\theta} \end{bmatrix}_{[6 \times 6]} \quad (10)$$

1.2 6-PRRS 并联机器人正奇异形式

运动学正奇异指的是,在某一特定位置的情况下,运动平台获得一个或者多个自由度,或者说即使在所有的驱动关节都固定的情况下,运动平台仍然可以在某些方向进行瞬时运动。

在平面刚体运动中,总可以找到与刚体刚性连接而瞬时速度(在基础坐标系中)为0的点,这个点叫作瞬时转动中心,简称瞬心。瞬心是2个不同刚体杆件之间的瞬时相对旋转中心,在特殊情况下,如果一个刚体相对于另一个刚体做纯移动,那么这2个刚体的瞬时运动中心可以视为无穷远;如果2个刚体有2个或者2个以上的瞬时中心,则可以认为它们之间没有相对运动。瞬心概念可从平面拓展到空间,以上分析与结果同样成立。

刚体在空间运动中,可以找到与刚体刚性连接而瞬时速度(在基础坐标系中)为0的直线,这条直线叫作瞬时转动轴,简称瞬轴。在空间机构中引入瞬时轴概念,是为了在不同位姿条件下找出运动平台可能存在的瞬时转动轴。当并联机器人的6根杆或者6根杆的延长线同时与空间某一直线 k 相交时,由于杆与运动平台之间的连接关系为球副,则此时的运动平台可以绕空间直线 k 做瞬时运动,如图3所示。这种瞬时运动也可以有如下描述,即当空间机构的驱动副(主动关节)锁定时,该驱动副的运动平台仍然存在不确定运动的可能,这是机构速度输入与输出影射关系的一种边界状态,在实际应用中应尽量避免出现。

由1.1节可知,6-PRRS 并联机构的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{R}_1 \times \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 & \mathbf{R}_2 \times \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_3 & \mathbf{R}_3 \times \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{n}_4 & \mathbf{R}_4 \times \mathbf{n}_4 \\ \mathbf{n}_5 & \mathbf{R}_5 \times \mathbf{n}_5 \\ \mathbf{n}_6 & \mathbf{R}_6 \times \mathbf{n}_6 \end{bmatrix}_{[6 \times 6]} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{R}_i$ 、 $\mathbf{n}_i$ 分别为 1×3 的方向向量。

如图3所示, k 、 $\mathbf{R}_i$ 、 $\mathbf{n}_i$ 这3条直线共面,6杆都与空间某一直线 k 相交,直线 $\mathbf{R}_i$ 与直线 k 、 $\mathbf{n}_i$ 同时相交,则 $\mathbf{R}_i \times \mathbf{n}_i$ 产生的向量一定垂直于以上3条直线决定的平面,故也有 $\mathbf{R}_i \times \mathbf{n}_i \perp k$ 。由此可得, $(\mathbf{R}_i \times \mathbf{n}_i) \cdot k = 0$,即2个互相垂直的向量的点积为0。若 $\mathbf{R}_i \times \mathbf{n}_i = [x_i \ y_i \ z_i]$, $k = [k_x \ k_y \ k_z]$,可得 $k_x x_i + k_y y_i + k_z z_i = 0$ 。

对式(11)进行列运算,再由 $k_x x_i + k_y y_i + k_z z_i =$

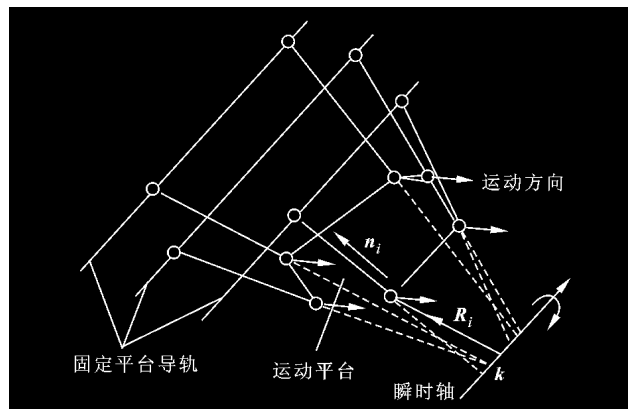


图3 运动平台瞬时转动轴

0可知,经列运算的雅可比矩阵的最后一列可以全部转化为0,由此可以判定此雅可比矩阵的秩小于6,不为满秩,即奇异。

如果6根杆或者其延长线相交于空间一点,则并联机器人的运动平台可以绕着空间一点做任意方向的运动,如图4所示,这将是上面的结果退化出的更为特殊的情况。

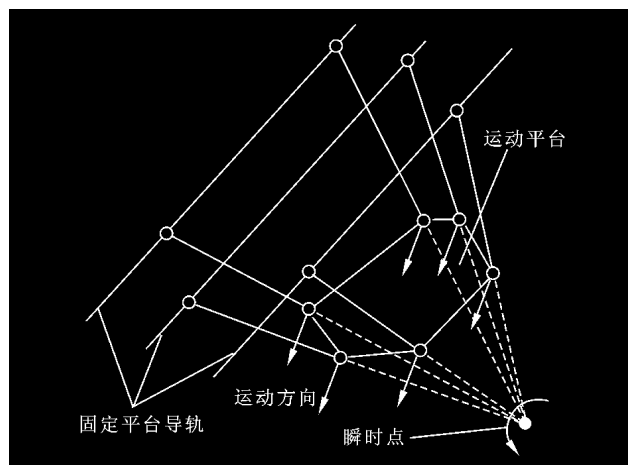


图4 运动平台瞬时转动点

2 并联机构逆奇异

因为指数积紧凑的表达方式与李代数有联系,所以它可以作为机器人运动学的计算工具^[7],而机器人正运动学也可以方便地用指数积一致地表达出来。下面将关注开链机器人的雅可比矩阵,为表述开链机器人模型,在图5中定义一个基础坐标系 S ,在运动平台的中心定义了一个参考坐标系 T ,由此正运动可以一致地表达为

$$g_{ST}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{ST}(O) \quad (12)$$

式中: θ_i 表示运动旋量 $\hat{\xi}_i$ 的旋转与位移; $g_{ST}(O) \in SE(3)$ 表示坐标系 T 的初始位置与姿态,其中 $SE(3)$

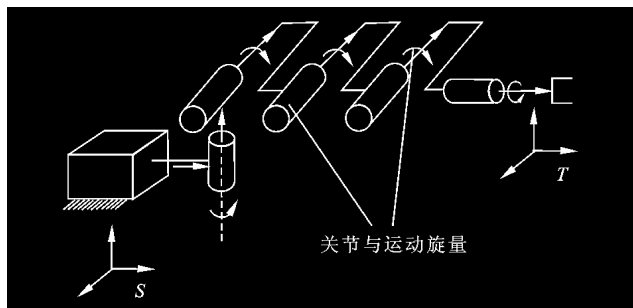


图5 运动旋量与指数积公式

表示位形空间与特殊正交集的乘积空间; $\hat{\xi}_i \in SE$ (3)表示关节 i 在坐标系 S 中的运动旋量,而

$$\hat{\xi}_i = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_i & v_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中, $v_i = [v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}]$ 与 $\hat{\omega}_i$ 是旋转对称阵。

瞬时速度也可以描述为

$$\hat{V}_{ST} = J_{ST}(\theta) \dot{\theta} \quad (14)$$

$$J_{ST}(\theta) = \left[\left(\frac{\partial g_{ST}}{\partial \theta_1} g_{ST}^{-1} \right)^\wedge \cdots \left(\frac{\partial g_{ST}}{\partial \theta_n} g_{ST}^{-1} \right)^\wedge \right] \quad (15)$$

$J_{ST}(\theta)$ 是运动平台的雅可比矩阵,通过分析可以得到

$$J_{ST}(\theta) = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n] \quad (16)$$

式中: $\xi_i = \begin{bmatrix} -\omega_i \times q_i \\ \omega_i \end{bmatrix}$, $\xi_i \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ 是 $J_{ST}(\theta)$ 的元素,

$$J_{ST}(\theta) = \begin{bmatrix} q_1 & -\omega_2 \times q_1 & -\omega_3 \times q_1 & -\omega_4 \times q_2 & -\omega_5 \times q_2 & -\omega_6 \times q_2 \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \quad (17)$$

需指出的是,在文献[7]中,以下几个特殊情况将会导致开链结构奇异,同时雅可比矩阵也可被简化成以下3种形式:①2个转动关节有相同的转动轴;②3个转动关节平行并且在同一个平面上;③4个转动关节相交在同一个点上。

式(17)中的 $\omega_4, \omega_5, \omega_6 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$,因为这3个矢

$$J_{ST}(\theta) \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 & -\omega_2 \times q_1 & -\omega_3 \times q_1 + (k_1 \omega_4 + k_2 \omega_5 + k_3 \omega_6) \times q_2 & -\omega_4 \times q_2 & -\omega_5 \times q_2 & -\omega_6 \times q_2 \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 - (k_1 \omega_4 + k_2 \omega_5 + k_3 \omega_6) & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 & -\omega_2 \times q_1 & -\omega_3 \times (q_1 - q_2) & -\omega_4 \times q_2 & -\omega_5 \times q_2 & -\omega_6 \times q_2 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \quad (18)$$

给定 $V = -\omega_3 \times (q_1 - q_2)$,因叉乘运算结果垂直于初始的2个向量,所以 $V \perp \omega_3, V \perp (q_1 - q_2)$ 。

由于并联机器人结构的因素,所以矢量 q_1 总是

$$\begin{bmatrix} v_1 - k_4 V & -\omega_2 \times q_1 & V & -\omega_4 \times q_2 & -\omega_5 \times q_2 & -\omega_6 \times q_2 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 \times q_1 & V & -\omega_4 \times q_2 & -\omega_5 \times q_2 & -\omega_6 \times q_2 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \quad (19)$$

从式(19)可以得到这样的结论:当 $v_1 \perp (q_1 - q_2)$,亦即一个杆垂直于相应的导轨(见图7)时,

同时也正是当前位姿的运动旋量^[7]。

运动学逆奇异是指,机构在一个特定的位置失去一个或者更多的自由度.因为6-PRRS可以被分解为6个独立支链,同样逆奇异也可以分解为6个独立的分支.暂时忽略驱动关节,每一个分支都可以视为一个如图6所示的、与运动平台连接起来的6自由度串联机器人结构。

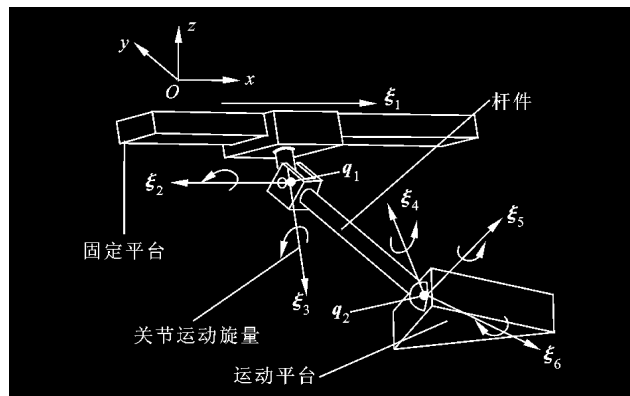


图6 6-PRRS运动链运动学

可以把一个球铰等效为3个互相垂直的回转型运动副(见图6),由此根据式(16)可得到本文的空间并联机构的雅可比矩阵

$R(J_{ST}(\theta)) \leq 5$, 矩阵 $J_{ST}(\theta)$ 是奇异的, 同时该机构也是奇异的. 这时的机构奇异可以作如下描述: 空间机构的某些驱动副(主动关节)动作, 却不能影响动平台的运动. 这是机构速度输入与输出影射关系的另外一种边界状态, 在实际应用中也应尽量避免出现.

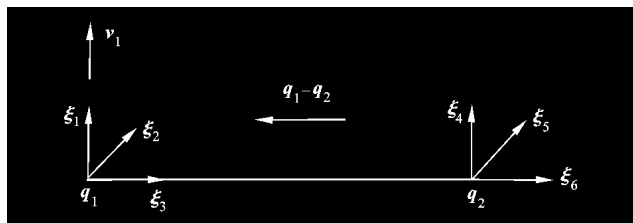


图7 逆奇异

3 6-PRRS 并联机器人复合奇异

复合奇异是指, 在一个特定的空间位姿情况下正奇异与逆奇异同时发生. 这是一个很有趣的现象, 当复合奇异发生时, 并联机器人运动平台失去某些自由度, 同时它又获得某些自由度. 这种正、逆奇异同时发生的情况在并联机构中很少出现, 因为这要求同时满足正、逆奇异产生的几何条件.

如图8所示, 固定平台、连杆以及运动平台均处于同一平面. 在此情况下, 有2根杆垂直于其相应的导轨, 这符合前面分析的支链逆奇异的条件, 此时机构支链的雅可比矩阵是奇异的, 证明同第2节. 在机构满足逆奇异产生条件的同时, 可以看到此时机构也满足正奇异条件, 在图8所示情况下, 机构6根杆分布于同一个平面上, 此时的这6根杆一定与平面内的某一直线相交(若平行则认为相交于无穷远处), 这个结果符合正奇异条件, 所以机构的雅可比

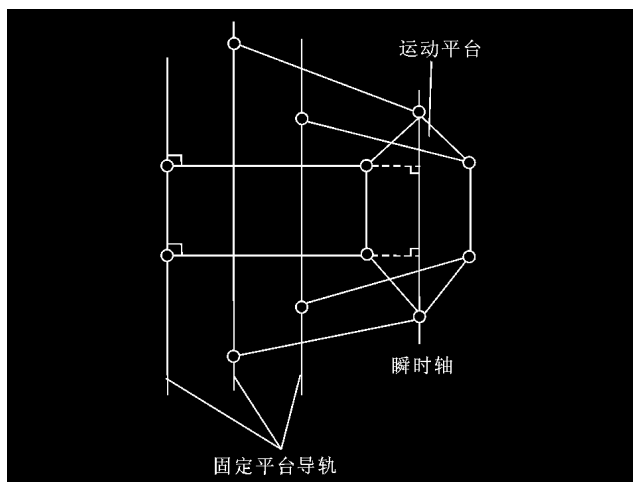


图8 6-PRRS 并联机器人复合奇异

矩阵为奇异, 证明同1.2节.

4 结 论

用速度投影方法和指数积方法求解 6-PRRS 并联机构正、逆奇异时的雅可比矩阵是有效、易实现的方法, 这2种方法可以应用于类似的并联机构.

针对机构的逆奇异性, 本文提出了一种不同于以往典型的串联机构奇异的形式, 证明了其所在位置的雅可比矩阵的奇异性, 并为其表现形式建立了空间运动瞬时轴与瞬时点的概念, 这种概念是平面瞬心概念的引申, 引入它使得并联机构的正奇异表现形式变得更为直观.

参考文献:

- [1] Ma O, Angeles J. Architecture singularities of platform manipulators [C]//Proceedings of IEEE Conference on Robotic and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 1991:1542-1547.
- [2] Gosselin C, Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematics chains [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3):281-290.
- [3] Collins C. On the duality of twist/wrench in serial and parallel chain robot manipulators [C]//Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 1995:526-531.
- [4] Angeles J. On twist and wrench generators and annihilators [C]//Proceeding of NATO-ASI on Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems. Piscataway, USA: IEEE, 1994:379-411.
- [5] Park F C, Kim J M. Singularity analysis of closed kinematic chains [J]. ASME Journal of Mech Des, 1999, 121(11):32-38.
- [6] Park F C, Kim J W. Manipulability and singularity analysis of multiple robot systems: a geometric approach [C]//Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation. Piscataway, USA: IEEE, 1998:1032-1037.
- [7] Murray R M, Li Zexiang, Sastry S S. A mathematical introduction to robotic manipulation [M]. Beijing: CRC Press Inc., 1994.
- [8] Kumar V. Instantaneous kinematics of parallel-chain robotic mechanism [J]. Transactions of the ASME: Journal of Mechanical Design, 1992, 114(2):349-358.

(编辑 苗凌)