

椭球状态定界的数值稳定算法

柴伟, 孙先仿

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 100083, 北京)

摘要: 针对带有未知但有界噪声的线性离散时间系统, 提出了一种数值稳定的集员状态估计递推算法. 算法采用椭球集合来描述状态的不确定性和噪声的界限. 椭球形状矩阵的计算采用奇异值分解技术, 以提高算法的数值稳定性. 同时, 给出了包含时间更新椭球和在状态空间中与量测量和量测噪声相一致的椭球交集的次最小容积椭球的计算方法, 以避免受病态矩阵求逆的影响. 蒙特卡洛仿真结果表明, 数值稳定算法所得到的均方误差和椭球容积与最优算法得到的十分接近. 此外, 当存在舍入误差时, 数值稳定算法可以保证形状矩阵的正定性, 而最优算法有时难以保证, 说明该算法比最优算法具有更好的数值稳定性.

关键词: 状态估计; 稳定性; 集员; 奇异值分解

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)04-0453-05

Numerically Stable Ellipsoidal State Bounding Algorithm

Chai Wei, Sun Xianfang

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A numerically stable recursive set membership state estimation algorithm for linear discrete-time systems with unknown but bounded noises is proposed, where ellipsoidal sets are adopted to describe the state uncertainties and to bound the process and observation noises. With the purpose of getting high numerical stability, singular value decomposition is used in the propagation of the shape-defining matrix of the ellipsoid. Besides, a subminimal-volume ellipsoid containing the intersection of the time-updated ellipsoid and the ellipsoidal set of state values consistent with the current observation and noise bounds is computed to circumvent inverse of ill-conditioned matrix. Monte Carlo simulations are performed on a digital computer for different models to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm. The simulation results show that the proposed algorithm not only matches the performance of the optimal algorithm closely in terms of mean ellipsoid volumes and mean square errors, but also keeps shape-defining matrix positive definite consistently.

Keywords: state estimation; stability; set membership; singular value decomposition

集员滤波是处理具有未知但有界(UBB)误差数据的一种滤波方法, 其所得结果是包含被估计量真实值的一个集合, 此集合的 Chebyshev 中心可作为被估计量的一个点估计. 与 Kalman 滤波等基于随机噪声假设条件下的滤波方法相比, 由于它只要求系统噪声有界, 且噪声界已知, 而不需要知道诸如

噪声分布、均值和方差等统计特性, 因而具有适用范围广、鲁棒性强等优点. 特别对于稳定的动态系统, 由于未建模动态都可以表示为加性有界扰动, 因而可将未建模动态所引起的扰动和其他噪声统一处理.

集员滤波算法可分为椭球状态定界算法^[1]、超平行体状态定界算法^[2]、全对称多胞形状状态定界算

法^[3]及多面体状态定界算法^[4]. 作为集员滤波的一种, 椭圆状态定界算法是比较有吸引力的算法, 因为相对其他集员滤波算法其精度较高而计算量低, 且与 Kalman 滤波算法有很多相似之处. 最近 10 年来, 有很多与椭圆状态定界算法有关的研究成果被报道^[1,5-7]. 最优椭圆状态定界算法^[1,6]与 Kalman 滤波算法相似, 同样存在数值稳定性问题, 但这方面的研究却没有报道. 本文借鉴了文献[8]中奇异值分解滤波的思想, 针对最优算法的数值稳定性问题对其进行了改进, 提出了椭圆状态定界的数值稳定算法.

1 系统模型描述

考虑如下形式的线性离散时间动态系统模型

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}_k \in R^n$ 和 $\mathbf{z}_k \in R^m$ 分别为系统状态和量测向量; $\mathbf{w}_{k-1} \in R^l$ 和 $\mathbf{v}_k \in R^m$ 分别为未知的过程噪声和量测噪声向量; $\mathbf{F}_{k-1} \in R^{n \times n}$ 为非奇异状态转移矩阵; $\mathbf{G}_{k-1} \in R^{n \times l}$ 为过程噪声输入矩阵; $\mathbf{H}_k \in R^{m \times n}$ 为行满秩量测矩阵. 假设噪声未知但有界, 分别属于椭圆集合

$$\mathbf{W}_k = \{\mathbf{w}_k : \mathbf{w}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{w}_k \leq 1\} \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_k = \{\mathbf{v}_k : \mathbf{v}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k \leq 1\} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{Q}_k \in R^{l \times l}$ 和 $\mathbf{R}_k \in R^{m \times m}$ 为已知正定矩阵. 已知系统初始状态 $\mathbf{x}_0$ 属于椭圆集合

$$\mathbf{E}_0 = \{\mathbf{x}_0 : (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T \mathbf{P}_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) \leq 1\} \quad (4)$$

式中: $\hat{\mathbf{x}}_0 \in R^n$ 为椭圆中心; $\mathbf{P}_0 \in R^{n \times n}$ 为描述椭圆形状和方向的正定矩阵.

2 最优椭圆状态定界算法

以下简要介绍最优算法, 具体推导见文献[6], 其过程包括时间更新和测量更新两部分.

2.1 时间更新

已知包含 $k-1$ 时刻状态 $\mathbf{x}_{k-1}$ 的椭圆

$$\mathbf{E}_{k-1} = \{\mathbf{x}_{k-1} : (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \leq 1\} \quad (5)$$

则包含 $\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{E}_{k-1} \oplus \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{W}_{k-1}$ 的时间更新椭圆 $\mathbf{E}_{k|k-1}$ 的中心

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (6)$$

形状矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= (p_k + 1)\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \\ & (p_k^{-1} + 1)\mathbf{G}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{G}_{k-1}^T \end{aligned} \quad (7)$$

其中参数 $p_k > 0$. 使椭圆 $\mathbf{E}_{k|k-1}$ 的容积达到最小的参数 p_k 由下式求解

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^{(p)} + p_k} = \frac{n}{p_k(p_k + 1)} \quad (8)$$

式中: $\lambda_i^{(p)}$ 是 $\mathbf{G}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{G}_{k-1}^T(\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T)^{-1}$ 的特征值; n 为状态的维数.

2.2 量测更新

设 $\bar{\mathbf{E}}_k$ 为量测向量 $\mathbf{z}_k$ 和量测噪声向量 $\mathbf{v}_k$ 限定的状态集合, 则包含集合 $\mathbf{E}_{k|k-1} \cap \bar{\mathbf{E}}_k$ 的量测更新椭圆 $\mathbf{E}_k$ 的中心

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + q_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{e}_k \quad (9)$$

形状矩阵

$$\mathbf{P}_k = \beta_k(q_k)(\mathbf{P}_{k|k-1} - q_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (10)$$

其中参数 $q_k \geq 0$, 而

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (11)$$

$$\mathbf{S}_k = q_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \quad (12)$$

$$\beta_k(q_k) = 1 + q_k - q_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{e}_k \quad (13)$$

使椭圆 $\mathbf{E}_k$ 的容积达到最小的参数 q_k 由下式求解

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{(q)}}{1 + \lambda_i^{(q)} q_k} = n \frac{1}{\beta_k(q_k)} \frac{d\beta_k(q_k)}{dq_k} \quad (14)$$

式中: $\lambda_i^{(q)}$ 是 $\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k$ 的特征值; n 为状态的维数, 而

$$\frac{d\beta_k(q_k)}{dq_k} = 1 - \mathbf{e}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{e}_k \quad (15)$$

当

$$n(1 - \mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{e}_k) - \text{tr}(\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k) \geq 0 \quad (16)$$

时, 式(14)无正根, 此时置 $q_k = 0$, 即 $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}$.

2.3 最优算法存在的数值稳定性问题

从式(10)可见, 最优算法存在正定矩阵与半正定矩阵相减的运算. 在计算机上运行时, 由于存在舍入误差, 有可能使 $\mathbf{P}_k$ 阵失去正定性, 从而使滤波无法正常进行下去. 例如

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{H}_k = [1 \quad 0]; \mathbf{R}_k = r = \epsilon^2$$

当 $\epsilon \ll 1$ 时, 考虑计算机字长限制 $\epsilon^2 = 0$. 按式(10)计算, 得

$$\mathbf{P}_k = \left(1 + q_k - \frac{q_k \epsilon_k^2}{q_k + \epsilon^2}\right) \begin{bmatrix} \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + q_k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 + q_k - \epsilon_k^2 \end{bmatrix}$$

可见 $\mathbf{P}_k$ 的正定性难以保证.

另外, 文献[6]通过求一个与椭圆 $\mathbf{E}_k$ 容积的平

方成比例的函数

$$f_k(q_k) = \det(\mathbf{P}_k) \quad (17)$$

的最小值点,导出了使椭圆 E_k 容积达到最小的参数所满足的式(14).采用数值方法求解式(14)时,每次迭代都需要进行式(12)、式(13)和式(15)的矩阵计算(主要是 $\mathbf{S}_k$ 及其逆的计算),会占用很多时间,且这些计算是不必要的.如果 $\mathbf{S}_k$ 病态或接近奇异,计算其逆会出现较大误差,从而使式(14)的根 q_k 偏离 $f_k(q_k)$ 的最小值点,这样结果的最优性难以保证.虽然理论上 q_k 不会很大,因为若 q_k 趋于正无穷,椭圆 E_k 将趋于椭圆 $\bar{E}_k$,椭圆 $\bar{E}_k$ 一般是无界的,而最优椭圆 E_k 不会趋于无界.但是,由于病态矩阵求逆, q_k 的计算结果难免很大,此时不但结果的最优性难以保证,还会造成不良后果.因为若 q_k 很大, $\mathbf{P}_k$ 将趋于 $(\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1}$,而 $\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k$ 一般不是满秩的,这样将不利于保持 $\mathbf{P}_k$ 的正定性.

3 椭圆状态定界的数值稳定算法

针对最优算法的数值稳定性问题,本文对其进行了改进.

3.1 时间更新

假设 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 及参数 p_k 已求出, $\mathbf{P}_{k-1}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 的奇异值分解成立,即

$$\mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{U}_{k-1} \mathbf{D}_{k-1}^2 \mathbf{U}_{k-1}^T \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{U}_{k|k-1} \mathbf{D}_{k|k-1}^2 \mathbf{U}_{k|k-1}^T \quad (19)$$

式中: $\mathbf{U}_{k-1}$ 和 $\mathbf{U}_{k|k-1}$ 为 $R^{n \times n}$ 中的正交阵; $\mathbf{D}_{k-1}$ 和 $\mathbf{D}_{k|k-1}$ 为 $R^{n \times n}$ 中的对角线矩阵. 分别将式(18)、式(19)代入式(7),有

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}_{k|k-1} \mathbf{D}_{k|k-1}^2 \mathbf{U}_{k|k-1}^T = \\ & (p_k + 1) \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{U}_{k-1} \mathbf{D}_{k-1}^2 \mathbf{U}_{k-1}^T \mathbf{F}_{k-1}^T + \\ & (p_k^{-1} + 1) \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{G}_{k-1}^T \end{aligned} \quad (20)$$

然后完成如下的奇异值分解过程

$$\begin{bmatrix} (p_k + 1)^{1/2} \mathbf{D}_{k-1} \mathbf{U}_{k-1}^T \mathbf{F}_{k-1}^T \\ (p_k^{-1} + 1)^{1/2} \mathbf{Q}_{k-1}^{T/2} \mathbf{G}_{k-1}^T \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{\Phi}}_k \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Lambda}}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{\Theta}}_k^T \quad (21)$$

式中: $\mathbf{Q}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k^{T/2} = \mathbf{Q}_k$; $\bar{\mathbf{\Phi}}_k \in R^{(n+D) \times (n+D)}$ 和 $\bar{\mathbf{\Theta}}_k \in R^{n \times n}$ 为正交阵; $\bar{\mathbf{\Lambda}}_k \in R^{n \times n}$ 为对角线矩阵. 将式(21)两边同时左乘相应矩阵的转置矩阵,结合式(20),得

$$\mathbf{U}_{k|k-1} = \bar{\mathbf{\Theta}}_k; \quad \mathbf{D}_{k|k-1} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_k \quad (22)$$

3.2 量测更新

将式(12)代入式(13)后,对等式右端作适当处理,得

$$\begin{aligned} \beta_k(q_k) &= 1 + q_k - q_k \mathbf{e}_k^T (q_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{e}_k = \\ & 1 + q_k - q_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_k^{-T/2} \cdot \\ & (q_k \mathbf{R}_k^{-1/2} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-T/2} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R}_k^{-1/2} \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (23)$$

由 $q_k > 0$ 以及 $\mathbf{R}_k^{-1/2} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-T/2}$ 正定,有

$$\beta_k(q_k) \leq 1 + q_k - q_k \frac{\mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{e}_k}{1 + q_k \lambda_{\max}^{(q)}} \quad (24)$$

式中: $\lambda_{\max}^{(q)}$ 为 $\mathbf{R}_k^{-1/2} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-T/2}$ 的最大特征值. 将式(12)代入式(10)后,由矩阵求逆引理,得

$$\mathbf{P}_k = \beta_k(q_k) (\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + q_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \quad (25)$$

再将式(25)代入式(17),有

$$f_k(q_k) = \beta_k(q_k)^n \det(\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + q_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \quad (26)$$

由于式(26)等号右边行列式大于0,再由式(24)及 $\beta_k(q_k) > 0$,可得 $f_k(q_k)$ 的一个上界为

$$g_k(q_k) = \rho_k(q_k)^n \det(\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + q_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \quad (27)$$

其中

$$\rho_k(q_k) = 1 + q_k - q_k \frac{\mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{e}_k}{1 + q_k \lambda_{\max}^{(q)}} \quad (28)$$

分别对式(27)两边取对数,然后对 q_k 求导,得

$$\frac{d \ln g_k(q_k)}{dq_k} = n \frac{1}{\rho_k(q_k)} \frac{d \rho_k(q_k)}{dq_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{(q)}}{1 + \lambda_i^{(q)} q_k} \quad (29)$$

式中: $\lambda_i^{(q)}$ 是 $\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k$ 的特征值. 令式(29)右边得0,即 $g_k(q_k)$ 的最小值点满足

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{(q)}}{1 + \lambda_i^{(q)} q_k} = n \frac{1}{\rho_k(q_k)} \frac{d \rho_k(q_k)}{dq_k} \quad (30)$$

其中

$$\frac{d \rho_k(q_k)}{dq_k} = 1 - \frac{\mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{e}_k}{(1 + q_k \lambda_{\max}^{(q)})^2} \quad (31)$$

从式(28)和式(31)可见,求解式(30)无需计算 $\mathbf{S}_k$ 及其逆,因而本文采取求函数 $f_k(q_k)$ 上界函数 $g_k(q_k)$ 的最小值点以绕开 $\mathbf{S}_k$ 及其逆的计算. 此外,函数 $g_k(q_k)$ 的最小值点是函数 $f_k(q_k)$ 的最小值点的近似,因而其对应的椭圆具有次最小容积. 通过分析可以发现,如果式(16)成立,等价于下式成立

$$n(1 - \mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{e}_k) - \text{tr}(\mathbf{R}_k^{-1/2} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-T/2}) \geq 0 \quad (32)$$

则 $g_k(q_k)$ 最小值点不大于0,应直接令 $q_k = 0$; 反之,可知 $g_k(q_k)$ 最小值点大于0,即式(30)有正根.

注意, $\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \in R^{n \times n}$ 的特征值只比 $\mathbf{R}_k^{-1/2} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-T/2} \in R^{m \times m}$ 的特征值多 $n - m$ 个

0,所以求解式(30)时只需求解后者的特征值,再补上 $n-m$ 个 0 即可. 另外,将式(18)代入

$$\mathbf{G}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{G}_{k-1}^T(\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T)^{-1}$$

得

$$\mathbf{G}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{G}_{k-1}^T(\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{U}_{k-1}\mathbf{D}_{k-1}^2\mathbf{U}_{k-1}^T\mathbf{F}_{k-1}^T)^{-1} \in R^{n \times n}$$

发现后者特征值比

$$(\mathbf{D}_{k-1}^{-1}\mathbf{U}_{k-1}^T\mathbf{F}_{k-1}^{-1}(\mathbf{G}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}^{1/2}))^T\mathbf{D}_{k-1}^{-1}\mathbf{U}_{k-1}^T\mathbf{F}_{k-1}^{-1} \cdot (\mathbf{G}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}^{1/2}) \in R^{l \times l}$$

多 $n-l$ 个 0. 为了节省存储空间和计算量,我们将求解维数小的矩阵的特征值.

若 $q_k=0$, 则置 $\hat{\mathbf{x}}_k=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\mathbf{U}_k=\mathbf{U}_{k|k-1}$, $\mathbf{D}_k=\mathbf{D}_{k|k-1}$; 否则,将式(25)等号两边分别求逆矩阵,然后将 $\mathbf{P}_k$ 和 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 的奇异值分解式代入,得

$$\beta_k(q_k)\mathbf{U}_k\mathbf{D}_k^{-2}\mathbf{U}_k^T = \mathbf{U}_{k|k-1}\mathbf{D}_{k|k-1}^{-2}\mathbf{U}_{k|k-1}^T + q_k\mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k \quad (33)$$

最后完成下式的奇异值分解过程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{k|k-1}^{-1}\mathbf{U}_{k|k-1}^T \\ q_k^{1/2}\mathbf{R}_k^{-1/2}\mathbf{H}_k \end{bmatrix} = \Phi_k \begin{bmatrix} \Lambda_k \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_k^T \quad (34)$$

式中: $\Phi_k \in R^{(n+m) \times (n+m)}$ 和 $\Theta_k \in R^{n \times n}$ 为正交阵; $\Lambda_k \in R^{n \times n}$ 为对角线矩阵. 将式(34)两边同时左乘相应矩阵的转置矩阵,结合式(33),有

$$\mathbf{U}_k = \Theta_k \quad (35)$$

$$\mathbf{D}_k = \beta_k(q_k)^{1/2}\Lambda_k^{-1} \quad (36)$$

将式(12)代入式(9),得

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + q_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T(q_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}\mathbf{e}_k \quad (37)$$

由于有下式成立

$$\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T(q_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} = (\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + q_k\mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k)^{-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1} \quad (38)$$

结合式(25),得

$$\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T(q_k\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} = \beta_k(q_k)^{-1}\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1} \quad (39)$$

所以将式(39)代入式(37)后,有

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + q_k\beta_k(q_k)^{-1}\mathbf{P}_k\mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{e}_k \quad (40)$$

将 $\mathbf{P}_k$ 的奇异值分解式中的矩阵变量按式(35)和式(36)作相应替换,再代入式(40),有

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + q_k\Theta_k\Lambda_k^{-2}\Theta_k^T\mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{e}_k \quad (41)$$

此外, $\mathbf{S}_k$ 病态或接近奇异可能会使 $\beta_k(q_k)$ 的计算值比理论值小,从而缩小了 $\mathbf{P}_k$, 造成椭球 E_k 不包含 $\mathbf{x}_k$ 的严重后果. 为了避免此种情况的发生,我们将式(36)中的 $\beta_k(q_k)$ 由 $\rho_k(q_k)$ 代替,即

$$\mathbf{D}_k = \rho_k(q_k)^{1/2}\Lambda_k^{-1} \quad (42)$$

实质上,这是对 E_k 适当放大,对算法没有本质影

响.

4 仿真研究

考虑两个离散时间线性系统,二者 $\mathbf{F}_{k-1}$ 、 $\mathbf{G}_{k-1}$ 和 $\mathbf{Q}_{k-1}$ 相同,为

$$\mathbf{F}_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.9 & 1.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{k-1} = \mathbf{I} (\mathbf{I} \text{ 为 } 3 \text{ 维单位阵})$$

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

系统(a)

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.5 & -0.9 \\ -1 & 0.8 & 1.1 \end{bmatrix}; \mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

系统(b)

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 10 & 0.019 & -0.09 \\ -1 \times 10^{-4} & 800 & 1 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \times 10^{-8}$$

初始矩阵 $\mathbf{P}_0$ 为 $10^5\mathbf{I}$, 中心 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 为 0, 噪声和初始状态均匀分布. 应用最优算法和本文算法分别对系统(a)和系统(b)进行状态估计, 各进行 100 次蒙特卡罗仿真, 仿真步长为 100, 取椭球中心作为状态的点估计, 状态估计的均方误差 ($\bar{\mathbf{e}}_i, i=1, 2, 3$)、平均椭球容积、平均运行时间由表 1 给出. 本文仿真计算机 CPU 为 AMD2500+, 内存为 256 Mb, 仿真语言为 Matlab6. 1.

采用两种算法对系统(a)进行状态估计没有数值稳定性问题, 从表 1 可见, 本文算法接近最优. 采用最优算法对系统(b)进行状态估计就存在数值稳定性问题, 导致滤波无法继续进行. 例如, 某次仿真某 k 时刻计算得到的

$$\mathbf{P}_k =$$

$$\begin{bmatrix} 0.008\ 526\ 02 & -3.317\ 85 \times 10^4 & -4.319\ 20 \times 10^4 \\ -3.446\ 43 \times 10^4 & 2.782\ 25 \times 10^{11} & 3.621\ 93 \times 10^{11} \\ -4.272\ 44 \times 10^4 & 3.449\ 04 \times 10^{11} & 4.489\ 96 \times 10^{11} \end{bmatrix}$$

不为正定阵, 因为特征值分别为 $7.272\ 22 \times 10^{11}$ 、 $0.005\ 133\ 50$ 、 $-59.784\ 2$, $\mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{G}_k^T(\mathbf{F}_k\mathbf{P}_k\mathbf{F}_k^T)^{-1}$ 的特征值计算结果分别为 $6.685\ 69 \times 10^4$ 、 $-0.034\ 765\ 3$ 、 $4.804\ 07 \times 10^{-12}$, 代入式(8)后按预先设计好的牛顿迭代程序求解不收敛, 实际上此时式(8)无正根. 采用本文算法对系统(b)进行状态估计时没有出现问题, 说明本文算法的数值稳定性得到提高. 此外,

针对本文算例,本文算法的运行时间少,主要原因在于求解式(30)所节省的时间要比运行奇异值分解所耗时间多。

表1 估计结果

	系统(a)		系统(b)
	最优算法	本文算法	本文算法
$\bar{e}_1$	0.629 462	0.623 625	$2.148\ 33 \times 10^{-4}$
$\bar{e}_2$	0.248 963	0.246 478	$6.043\ 61 \times 10^{-14}$
$\bar{e}_3$	0.941 087	0.960 439	2.652 19
容积	42.731 3	42.894 2	$2.702\ 80 \times 10^{-10}$
运行时间/s	1.187	0.315 1	0.318 6

5 结 论

本文采用奇异值分解技术,提高了算法的数值稳定性,同时采用求次最小容积椭圆的方法进行量测更新,绕开矩阵求逆。仿真结果表明,本文算法精度接近最优,且具有很好的数值稳定性。此外,本文算法涉及到的矩阵运算及求根运算均可以并行实现^[9-10]。

参考文献:

- [1] Maksarov D G, Norton J P. State bounding with ellipsoid set description of uncertainty[J]. International Journal of Control, 1996, 65(5): 847-866.
- [2] Chisci L, Garulli A, Zappa G. Recursive state bound-

- ding by parallelotopes[J]. Automatica, 1996, 32(7): 1049-1055.
- [3] Alamo T, Bravo J M, Camacho E F. Guaranteed state estimation by zonotopes[J]. Automatica, 2005, 41(6): 1035-1043.
- [4] Spathopoulos M P, Grobov I D. A state-set estimation algorithm for linear systems in the presence of bounded disturbances[J]. International Journal of Control, 1996, 63(4): 799-811.
- [5] Durieu C, Walter E, Polyak B. Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 111(2): 273-303.
- [6] Maksarov D G, Norton J P. Computational efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximations[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2002, 16(5): 411-434.
- [7] Scholte E, Campbell M. A nonlinear set-membership filter for on-line applications[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(10): 1337-1358.
- [8] Wang Liang, Libert G, Manneback P. Kalman filter algorithm based on singular value decomposition[C]. // 31st IEEE Conference on Decision and Control. Tucson, USA: IEEE Press, 1992: 1224-1229.
- [9] 苏德富,钟诚. 计算机算法设计与分析[M]. 北京:电子工业出版社, 2005:217-221.
- [10] 陈国良,陈峻. VLSI 计算理论与并行算法[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,1991:90-197.

(编辑 杜秀杰)

[文摘预登]

支持向量机在电力变压器故障诊断中的应用

吴晓辉¹, 刘炯¹, 孟峥¹, 汪晓明², 李彦明¹

(1. 西安交通大学电气工程学院, 710049, 西安; 2. 江西省电力公司超高压分公司, 330006, 南昌)

利用支持向量机的学习方法,构建了电力变压器故障诊断模型,该模型将变压器故障分为放电性和过热性两大类,通过统计分析寻求特征量区分类间的故障类型,采用支持向量机识别类内的故障类型,利用基于交叉验证的网格搜索法来确定支持向量机的参数。考虑到变压器油中溶解气体特征空间的紧致性原理,利用模糊C均值聚类算法对所获取的样本进行预选取,有效解决了确定模型参数耗时巨大的问题,并在一定程度上提高了模型的推广能力。实例验证表明,该模型在有限样本情况下,能达到较高的变压器故障判断率,放电性故障样本正确判断率为90.5%,过热性故障样本正确判断率为85.9%,说明该模型具有很好的分类效果和推广能力。