

基于状态观测器的分数阶统一混沌系统的同步控制

逯俊杰, 刘崇新, 张作鹏, 陈向荣
(西安交通大学电气工程学院, 710049, 西安)

摘要: 基于状态观测器控制法, 提出一种分数阶系统状态观测器, 实现了 2.7 阶统一混沌系统的同步控制. Matlab 仿真结果表明, 基于状态观测器的控制方法不仅适用于整数阶混沌系统, 也适用于分数阶混沌系统. 利用该方法实现混沌系统的同步, 无需计算系统的 Lyapunov 指数, 在工程上易于实现, 为混沌系统及分数阶混沌系统在实际中的应用奠定了理论基础.

关键词: 状态观测器; 分数阶统一混沌系统; 同步控制

中图分类号: O415.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)04-0497-04

State-Observer Based Synchronization Control Between Fractional-Order Unified Chaotic Systems

Lu Junjie, Liu Chongxin, Zhang Zuopeng, Chen Xiangrong
(School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A fractional-order state-observer is proposed and the synchronization between 2.7-order unified chaotic systems is realized based on the control method of state-observer. The results simulated by Matlab prove that the scheme is applicable to either integral-order systems or fractional-order systems. The state-observer based chaotic synchronization facilitates the engineering realization without calculating the system Lyapunov index and establishes the groundwork for the factual applications of chaotic system and the fractional-order chaotic system.

Keywords: state-observer; fractional-order unified chaotic system; synchronization control

虽然分数阶微积分已经有 300 多年的历史, 但是在近十几年才成为当前国际上的一个热点研究课题, 并在松弛、振荡、湍流、控制等领域得到了有效应用. 最近, 分数阶混沌系统又引起人们广泛的兴趣和深入的研究. 在 Chua 电路^[1]、Lorenz 系统^[2]、Chen 系统^[3-5]、Duffing 系统^[6]、Sprott 系统^[7-8] 以及 Rossler 混沌和超混沌系统^[9]中, 通过计算机数值仿真发现, 当系统的阶数为分数的时候, 系统仍呈现混沌状态, 且更能反映系统所呈现的物理现象.

1990 年, 美国海军实验室专家 Pecora 和 Carroll 提出一种驱动-响应控制法, 并实现了两个混沌系统的同步^[10], 从而激起了人们对动态系统, 特别是对混沌系统同步化问题的研究兴趣. 迄今为止, 已经相继提出几种不同的混沌同步控制方法, 比较典型的有驱动-响应同步、相互耦合同步、自适应控制

同步法、激活控制同步法、延迟反馈同步法等.

本文首先介绍分数阶系统的同步理论, 然后设计一种分数阶状态观测器, 最后利用该观测器实现 2.7 阶统一混沌系统的同步.

1 分数阶微分及分数阶系统的同步理论

目前, 对分数阶微分的定义有好几种, 但最常用的是 Riemann-Liouville 定义的分数阶微分, 其数学表达式如下

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1)$$

式中: $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数; $n-1 < \alpha < n$, α 为分数, n 为整数.

假设所研究的分数阶混沌系统驱动方程的形式为

$$\frac{d^{\alpha} \mathbf{X}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{C}\mathbf{X}) + \mathbf{D} \quad (2)$$

式中: $0 < \alpha \leq 1$; $\mathbf{X} \in R^{n \times 1}$ 、 $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ 、 $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ 、 $\mathbf{C} \in R^{1 \times n}$ 、 $\mathbf{D} \in R^{n \times 1}$ 为连续矩阵; $\mathbf{C}\mathbf{X} \in R$; $\mathbf{F}: R^1 \rightarrow R^m$ 为非线性映射; $\mathbf{A}\mathbf{X}$ 为线性部分; $\mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{C}\mathbf{X})$ 为非线性部分.

值得注意的是, 必须要选取合适的驱动信号来驱动响应系统, 一般我们选取非线性项来驱动响应系统, 故可设式(2)的驱动信号为

$$\omega = \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (3)$$

式中: $\omega \in R$. 设分数阶响应系统为

$$\frac{d^{\alpha} \mathbf{X}^*}{dt^{\alpha}} = \mathbf{A}\mathbf{X}^* + \mathbf{B}\mathbf{F}(\omega) + \mathbf{D} + \mathbf{K}(\omega - \omega^*) \quad (4)$$

式中: $\omega^* = \mathbf{C}\mathbf{X}^*$; $\mathbf{X}^* \in R^{n \times 1}$; $\mathbf{K} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T$ 为系统同步的控制参数. 定义系统同步误差 $e(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t)$, 则由式(2)~(4), 得到分数阶混沌系统同步时的误差方程为

$$\frac{d^{\alpha} e}{dt^{\alpha}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})e \quad (5)$$

很明显, 系统(5)与下式具有相同的稳定性

$$\frac{d^{\alpha} e^*}{dt^{\alpha}} = (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T)e^* \quad (6)$$

式中: $u(t) = -\mathbf{K}^T e^*(t)$ 为反馈控制信号, 决定着分数阶系统同步的效果. 利用分数阶系统的稳定性理论, 可以得到定理1.

定理1 对于给定的分数阶驱动系统(2)、响应系统(4)及驱动信号(3), 两系统同步的充分必要条件为矩阵 $(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T)$ 所有的特征值 λ_{nj} 均满足

$$|\arg(\lambda_{nj})| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad (7)$$

式中: $\arg(\lambda_{nj})$ 为特征值 λ_{nj} 的辐角.

定理1的证明见文献[11].

2 基于状态观测器的分数阶统一混沌系统的同步控制

根据控制理论, 不失一般性, 假设自治的分数阶混沌系统如式(2)所示, 设其输出为

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \quad (8)$$

式中: $\mathbf{K}$ 为待定常数. 由式(2)和式(8)组成的分数阶非线性系统为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^{\alpha} \mathbf{X}}{dt^{\alpha}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{C}\mathbf{X}) + \mathbf{D} \\ \mathbf{W}(\mathbf{X}) &= \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{C}\mathbf{X}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

因此, 分数阶混沌系统的同步问题就转化为对式(9)

的状态观测器的设计问题. 利用控制理论中的状态观测器的设计方法, 可构造式(9)的状态观测器为

$$\frac{d^{\alpha} \mathbf{Y}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{C}\mathbf{Y}) + \mathbf{D} + \mathbf{B}[\mathbf{W}(\mathbf{X}) - \mathbf{W}(\mathbf{Y})] \quad (10)$$

则式(9)与式(10)的误差系统为

$$\frac{d^{\alpha} e}{dt^{\alpha}} = \frac{d^{\alpha} \mathbf{X}}{dt^{\alpha}} - \frac{d^{\alpha} \mathbf{Y}}{dt^{\alpha}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})e \quad (11)$$

由误差动力学系统可以看出, 只要选取合适的系数 $\mathbf{K}$, 使得 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ 的全部特征值 λ_{nj} 在坐标轴的左半平面, 则 $|\arg(\lambda_{nj})| > \frac{\pi}{2}$, 即满足定理1, 从而实现分数阶混沌系统的同步. 在观测器的设计过程中, 假设 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ 能控, 并且利用控制论中的极点配置方法求取系数 $\mathbf{K}$.

统一混沌系统的分数阶系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= (25\alpha + 10)(y - x) \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= (28 - 35\alpha)x - zx + (29\alpha - 1)y \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= xy - \frac{8 + \alpha}{3}z \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

取 $q = 0.9$, $x(0) = 2$, $y(0) = 1$, $z(0) = 3$, 基于文献[3]的算法, 利用 Matlab 编写程序进行仿真, 得到系统(12)的相图如图1所示.

由图1可知, 分数阶统一系统中也存在混沌现象. 将式(12)改写成如下形式

$$\begin{aligned} \frac{d^q \mathbf{X}}{dt^q} &= \begin{bmatrix} -(25\alpha + 10) & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(8 + \alpha)/3 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (-x_1 x_3) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (x_1 x_2) \end{aligned} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3]^T$, 于是有 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$\mathbf{F}(\mathbf{C}\mathbf{X}) = [-x_1 x_3, x_1 x_2]^T$. 因此, 分数阶统一混沌系统的状态观测器方程可以写成

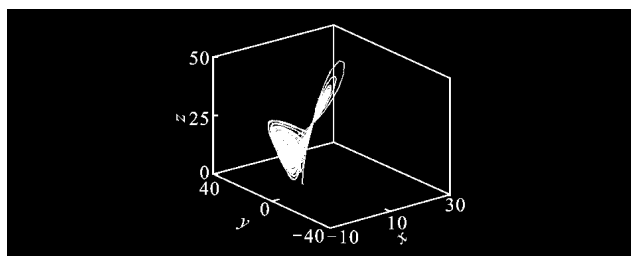
$$\frac{d^q \mathbf{Y}}{dt^q} = \begin{bmatrix} -(25\alpha + 10) & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(8 + \alpha)/3 \end{bmatrix} \mathbf{Y} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (-y_1 y_3) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (y_1 y_2) +$$

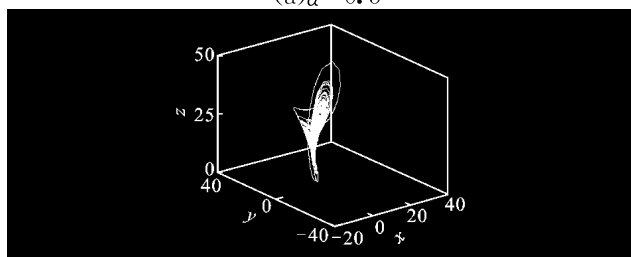
$$B[F(CX) - F(CY)] + BK(X - Y) \quad (14)$$

式中: $Y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$. 由式(13)和式(14)可以得出, 这两个系统的误差动力学方程为 $\frac{d^q e}{dt^q} = (A - BK)e$, 通过配置 $(A - BK)$, 从而实现两个系统的同步.

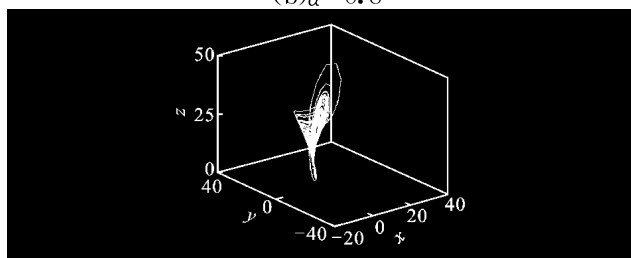
当 $\alpha = 0.5$ 时, A 的特征值为 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-22.827\ 7, 11.827\ 7, -2.666\ 7)$. 在仿真过程中, 选取极点 $\gamma = (-4.5 + i14.387\ 5, -4.5 - i14.387\ 5, -8.166\ 7)$. 通过 Matlab 库函数中的极点配置函数, 计算求得 $K_{0.5} = \begin{bmatrix} 34.10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5.333\ 3 \end{bmatrix}$. 取相同的极点值, 当 $\alpha = 0.8$ 时, $K_{0.8} = \begin{bmatrix} 28.575 & 2.2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.233\ 4 \end{bmatrix}$. 当 $\alpha = 1.0$ 时, $K_{1.0} = \begin{bmatrix} 25.492\ 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.166\ 7 \end{bmatrix}$. 取 $q = 0.9$, $x_1(0) = 2.0$, $x_2(0) = 1.0$, $x_3(0) = 3.0$, $y_1(0) = 2.2$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 2.9$ 进行仿真, 得到观测器未作用时系统(13)与系统(14)的 x_1 - y_1 相图如图 2 所示, 观测器作用时两系统的同步相图如图 3 所示.



(a) $\alpha = 0.5$

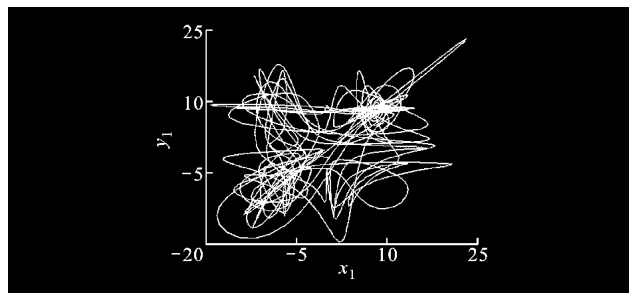


(b) $\alpha = 0.8$

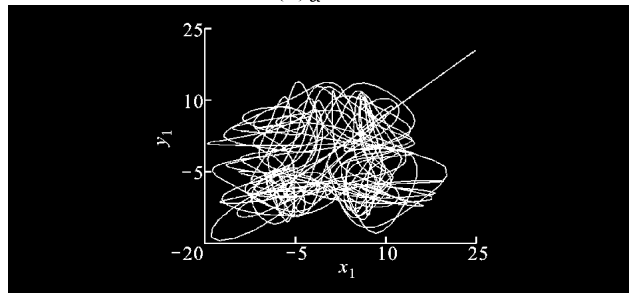


(c) $\alpha = 1.0$

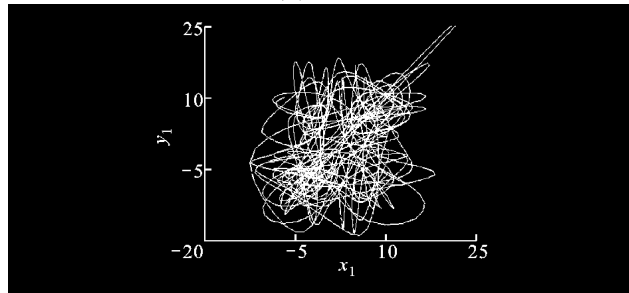
图 1 2.7 阶统一混沌系统的吸引子相图



(a) $\alpha = 0.5$

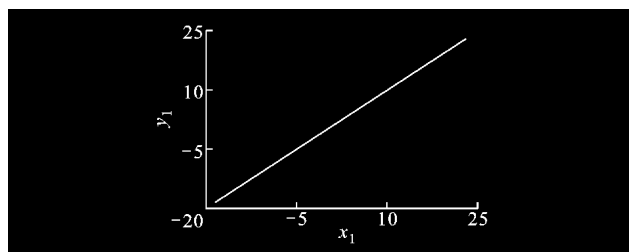


(b) $\alpha = 0.8$

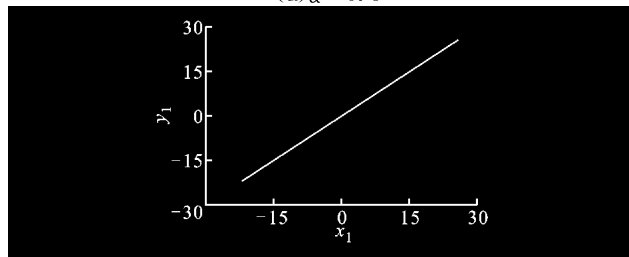


(c) $\alpha = 1.0$

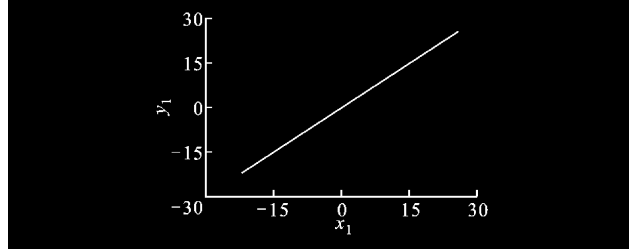
图 2 观测器未作用时系统(13)与系统(14)的 x_1 - y_1 相图($q=0.9$)



(a) $\alpha = 0.5$



(b) $\alpha = 0.8$



(c) $\alpha = 1.0$

图 3 观测器作用时系统(13)与系统(14)的 x_1 - y_1 同步相图($q=0.9$)

3 结 论

本文基于状态观测器的控制方法实现了分数阶统一混沌系统的同步控制,得到以下结论:

(1)状态观测器控制法不仅适用于整数阶混沌系统,也适用于分数阶混沌系统;

(2)基于状态观测器的方法,无需计算分数阶混沌系统同步时的 Lyapunov 指数,且操作简单,在工程上容易应用;

(3)基于状态观测器方法实现混沌同步,为分数阶混沌系统在实际中的应用奠定了理论基础.

参考文献:

- [1] Hartly T T, Lorenzo C F, Qammer H K. Chaos in a fractional order Chua's system [J]. IEEE Trans CAS-I, 1995, 42:485-490.
- [2] Grigorenko I, Grigorenko E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system [J]. Phys Rev Lett, 2003, 91:034101.
- [3] Li Changpin, Peng Guojun. Chaos in Chen's system with a fractional order [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 22:443-450.
- [4] Li Chunguang, Chen Guanrong. Chaos in the fractional order Chen system and its control [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 22:549-554.
- [5] Lu Junguo, Chen Guanrong. A note on the fractional-order Chen system [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 27:685-688.
- [6] Gao Xin, Yu Juebang. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 24:1097-1104.
- [7] Ahamd W M, Sprott J C. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 16:339-351.
- [8] Gao Xin, Yu Juebang. Chaos and chaotic control in a fractional-order electronic oscillator [J]. Chinese Physics, 2005, 14:908-913.
- [9] Li Chunguang, Chen Guanrong. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rossler equations [J]. Physica: A, 2004, 341:55-61.
- [10] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.
- [11] Lu Junguo. Synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a scalar transmitted signal [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 27:519-525.

(编辑 杜秀杰)