

求解三维准静态矢量磁位的快速多极方法

王晓丽, 罗先觉, 盛剑霓

(西安交通大学电气工程学院, 710049, 西安)

摘要: 将快速多极算法(FMM)应用于三维准静态电磁场矢量磁位的求解, 首先根据计算精度的要求把连续分布的场源进行离散化处理, 然后通过静电类比分析, 将求解三维准静态矢量磁位的问题转化为多体问题, 进而利用快速多极方法来计算三维空间中载流导体产生的矢量磁位, 可以将计算量由 $O(N^2)$ 降低为 $O(N)$ 次运算, 大大提高了计算速度. 算例的计算结果表明, 当取剖分体积单元的边长等于 0.25 倍透入深度时, 采用 FMM 方法计算的电流密度不均匀分布载流导体在其自身所在空间的磁矢位与精确解的相对误差小于 0.005, 而其在自身所在空间以外的磁矢位的 FMM 计算结果, 具有更高的精度. 经过积分方程离散和静电模拟分析, 应用 FMM 算法可正确地计算三维空间载流导体的矢量磁位, 计算误差可通过剖分密度进行控制. 提出的方法扩展了 FMM 算法在准静态矢量磁位数值计算领域中的应用, 为芯片上互连电感参数的计算奠定了基础.

关键词: 快速多极算法; 电磁场; 数值计算; 矢量磁位; 载流导体

中图分类号: TM153.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)04-0489-04

Calculating Magnetic Vector Potential in 3-D Electromagnetoquasistatic Field with Fast Multipole Method

Wang Xiaoli, Luo Xianjue, Sheng Jianni

(School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The fast multipole method (FMM) is introduced to solve the magnetic vector potential in 3-D electromagnetoquasistatic field. The continually distributed source is discretized according to the required accuracy, the electromagnetoquasistatic integral function is discretized by electrostatic analogy analysis, and then the magnetic vector potential created by current-carry conductors in 3-D space is transformed into N -body problem which can be calculated by FMM. Thus the computation is reduced from $O(N^2)$ to $O(N)$ and the error can be flexibly controlled by division density. The numeral results demonstrate that with division length of volume cell density as a quarter of skin depth, the relative error of the FMM result of the magnetic vector potential of the redistributed current-carry conductor in its own space gets less than 0.005, and the result of magnetic vector potential outside the conductor is more accurate. The fast multipole method for calculating the magnetic vector potential in 3-D electromagnetoquasistatic field can be extended to evaluate the on-chip interconnect inductance parameters.

Keywords: fast multipole method; electromagnetic field; numerical calculation; magnetic vector potential; current-carry conductor

近年来,快速多极方法(FMM)算法越来越多地应用于电磁场数值计算的各个领域,与传统的算法比较,应用 FMM 算法来求解大尺寸电磁散射问题,

可大大降低内存需要,计算速度显著提高^[1-3]. FMM 算法与边界元和有限元方法相结合,来求解大型涡流场问题也取得了很好的计算效果^[4-6]. 由于 FMM

算法很适合于进行并行计算,采用并行 FMM 算法可以求解上百万个未知数的大型矩阵向量乘法运算^[7].大量的数值计算试验已经证明了 FMM 算法是一种非常有效的数值加速算法.

在集成电路互连线的分析与设计过程中,需要计算互连线在空间中某些区域内的电磁场分布,在这种情况下,应用有限元方法求解电磁场问题需要对整个场域进行剖分.由于集成电路互连线分布结构复杂,为获得较高的精度需要加密对场域或边界的剖分,这样计算机的内存占用和计算时间会急剧增加.本文提出的方法首先根据计算精度的要求把连续分布的场源进行离散化处理,然后通过静电类比分析,将求解三维准静态矢量磁位的问题转化为多体问题,进而利用快速多极方法来计算.该算法只需要对场源和需要计算的场域进行剖分,大大降低了对计算机内存的要求,提高了计算速度.

本文通过对积分方程的离散和静电类比分析,推导出了应用多极加速方法计算磁矢位的公式,最后通过算例证明了算法的正确性和有效性.

1 积分方程的离散

根据电磁场数值分析理论,在研究连续分布的量的作用时,可以把它近似看成离散分布的量,考察其单个离散元的作用,如果问题是线性的,那么通过叠加的办法就能求得整体的效果.对于各向同性媒质中的载流导体,电流密度矢量为 $\bar{J}$,在无限大空间中产生的磁矢位为

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV \quad (1)$$

根据计算精度的要求,首先将导体剖分为 N 个小体积单元,可以近似认为每个小体积单元内的电流密度为恒定,经过这样的离散化,得到

$$\bar{A}(\bar{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left(\int_{V_i} \frac{\bar{J}_i}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV_i \right) \quad (2)$$

在直角坐标系下,把电流密度矢量 $\bar{J}$ 分解为 3 个方向上的分量

$$\bar{J} = J_x \bar{e}_x + J_y \bar{e}_y + J_z \bar{e}_z \quad (3)$$

那么

$$A_x(\bar{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left(\int_{V_i} \frac{J_{i,x}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV_i \right) \quad (4a)$$

$$A_y(\bar{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left(\int_{V_i} \frac{J_{i,y}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV_i \right) \quad (4b)$$

$$A_z(\bar{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left(\int_{V_i} \frac{J_{i,z}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV_i \right) \quad (4c)$$

式中: $J_{i,x}$ 、 $J_{i,y}$ 、 $J_{i,z}$ 表示剖分单元 i 的电流密度 $\bar{J}_i$

在 x 、 y 、 z 方向上的分量,矢量磁位 $\bar{A}$ 由 3 个方向的分量合成

$$\bar{A} = A_x \bar{e}_x + A_y \bar{e}_y + A_z \bar{e}_z \quad (5)$$

2 静电模拟

设空间中体积单元 V_i 处分布着体电荷密度为 ρ_i 的静止电荷,在空间中 P 点处产生的电位

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V_i} \frac{\rho_i}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV \quad (6)$$

因为体积单元 V_i 很小,从而体积单元内的电荷密度 ρ_i 可近似为恒定.根据 FMM 算法中多极展开的思想^[8],当计算远场区域的电位时,我们可以进一步用体积单元内均匀分布的 M 个等量静止电荷来近似电荷的体分布

$$\phi(P) \approx \frac{q_i}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^M \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'_k|} \quad (7)$$

M 个静止电荷带电量相等,其电量为

$$q_i = \frac{\rho_i V_i}{M} \quad (8)$$

比较式(4)、(6)和(7)可以得到

$$\left. \begin{aligned} A_x(\bar{r}) &\approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left(J_{i,x} \Delta V_i \sum_{k=1}^M \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'_{ik}|} \right) \\ A_y(\bar{r}) &\approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left(J_{i,y} \Delta V_i \sum_{k=1}^M \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'_{ik}|} \right) \\ A_z(\bar{r}) &\approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left(J_{i,z} \Delta V_i \sum_{k=1}^M \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'_{ik}|} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: ΔV_i 表示剖分单元 i 的体积.由式(9)可见,经过积分方程离散和静电模拟分析,我们已经把求解载流导体在无限大空间中产生的磁矢位的问题转化为多体问题,这样经过 3 次运用 FMM 算法,分别求出 $A_x(\bar{r})$ 、 $A_y(\bar{r})$ 和 $A_z(\bar{r})$,应用式(5)最后合成磁矢位 $\bar{A}(\bar{r})$.

3 示例计算

例 1: 如图 1 所示,求载流导体 A 在其自身所在空间区域和导体 B 所在的空间区域的矢量磁位.载流导体 A 电流分布均匀,电流密度就为 $\bar{J}_x = 0.000\ 1\text{ A}/\mu\text{m}^2$.

首先对载流导体 A 和 B 进行剖分,取剖分单元为立方体,分别采取 3 种不同的剖分密度计算,即分别取体积单元的边长 $a_1 = 0.5\ \mu\text{m}$, $a_2 = 0.25\ \mu\text{m}$, $a_3 = 0.125\ \mu\text{m}$,取每个体积单元的等效静止电荷数 $M=8$.应用 FMM 算法求解时,剖分场域层数为 5,多极展开截止级数项 $p=12$.

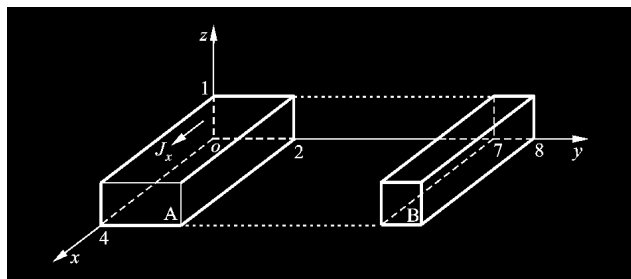


图1 载流导体A产生的矢量磁位

分别采取不同剖分密度计算导体A、B所在空间区域中部分场点的矢量磁位,计算结果见表1、表2.表中 A_{a_1} 、 A_{a_2} 和 A_{a_3} 分别表示3种不同剖分密度下应用多极算法计算的矢量磁位, A_{dir} 为利用两点之间的距离公式直接计算的结果,其剖分密度为 $a=0.025\text{ }\mu\text{m}$,将 A_{dir} 作为准精确值与多极算法的计算结果进行比较.

表1的计算结果表明,随着剖分密度增加,电流密度均匀的载流导体A在其自身所在空间区域的矢量磁位的计算结果快速收敛于 A_{dir} ,当取剖分体积单元的边长等于0.125倍导体A的最小特征尺寸时,采用FMM方法计算的矢量磁位与直接解法的相对误差为0.000 025.表2的计算结果表明,应用FMM方法计算电流密度均匀的载流导体A在B处的矢量磁位具有更快的收敛速度.当取剖分体积单元的边长等于0.5倍导体A的最小特征尺寸时,

表1 不同剖分密度下计算导体A的矢量磁位

$(x/\mu\text{m}, y/\mu\text{m}, z/\mu\text{m})$	矢量磁位/ $10^{-11} \times \text{Web} \cdot \text{m}^{-1}$			
	A_{a_1}	A_{a_2}	A_{a_3}	A_{dir}
(0.0,0.0,0.0)	4.115 6	4.117 3	4.117 7	4.117 8
(1.5,0.5,0.5)	7.687 3	7.700 4	7.703 6	7.704 6
(2.0,0.5,0.5)	7.792 0	7.805 0	7.808 3	7.809 3
(3.5,0.25,0.75)	5.992 7	6.005 8	6.009 1	6.010 1
(4.0,1.0,1.0)	4.911 0	4.914 3	4.915 1	4.915 3

表2 不同剖分密度下计算导体B的矢量磁位

$(x/\mu\text{m}, y/\mu\text{m}, z/\mu\text{m})$	矢量磁位/ $10^{-11} \times \text{Web} \cdot \text{m}^{-1}$			
	A_{a_1}	A_{a_2}	A_{a_3}	A_{dir}
(0.0,7.0,0.0)	1.253 8	1.253 8	1.253 8	1.253 8
(1.5,7.5,0.5)	1.216 6	1.216 6	1.216 6	1.216 6
(2.0,7.5,0.5)	1.219 9	1.219 9	1.219 9	1.219 9
(2.5,7.75,0.25)	1.171 7	1.171 7	1.171 7	1.171 7
(4.0,8.0,1.0)	1.090 9	1.090 9	1.090 9	1.090 9

FMM计算结果与 A_{dir} 的相对误差为 1×10^{-6} .

例2:如图1所示,求载流导体A在其自身所在空间区域和导体B所在的区域空间的矢量磁位.载

流导体A的电流密度为 $J_0 e^{-\frac{1}{\delta}d}$, J_0 为导体表面的电流密度,透入深度 $\delta = \frac{1}{(\pi f \mu \sigma)^{1/2}}$, d 为与导体边界的最小垂直距离.在本算例中,设 $J_0 = J_x = 0.0001\text{ A}/\mu\text{m}^2$, $\delta = 0.2\text{ }\mu\text{m}$.首先对载流导体A和B进行剖分,每个体积单元的电流密度为 $J_i = J_0 e^{-\frac{1}{\delta}d_i}$, d_i 为体积单元 V_i 的几何中心点与导体A边界的最小垂直距离.取剖分单元为立方体,分别采取3种不同的剖分密度计算,即分别取体积单元的边长 $a_1 = \delta$, $a_2 = 0.5\delta$, $a_3 = 0.25\delta$,取每个体积单元的等效静止电荷数 $M=8$.应用FMM算法求解时,剖分场域层数为5,多极展开级数项 $p=12$.导体A、B所在空间区域中部分场点的矢量磁位计算结果见表3、表4.

表3 导体电流密度不均匀条件下导体A的矢量磁位

$(x/\mu\text{m}, y/\mu\text{m}, z/\mu\text{m})$	矢量磁位/ $10^{-11} \times \text{Web} \cdot \text{m}^{-1}$			
	A_{a_1}	A_{a_2}	A_{a_3}	A_{dir}
(0.0,0.0,0.0)	1.752 3	1.800 8	1.811 3	1.814 0
(0.5,0.5,0.5)	2.636 7	2.683 1	2.690 4	2.692 2
(2.0,0.5,0.5)	3.103 4	3.158 6	3.167 4	3.169 6
(3.5,0.25,0.75)	2.516 8	2.566 6	2.576 6	2.579 0
(4.0,1.0,1.0)	2.044 4	2.093 3	2.102 9	2.105 4

表4 导体电流密度不均匀条件下导体B的矢量磁位

$(x/\mu\text{m}, y/\mu\text{m}, z/\mu\text{m})$	矢量磁位/ $10^{-11} \times \text{Web} \cdot \text{m}^{-1}$			
	A_{a_1}	A_{a_2}	A_{a_3}	A_{dir}
(0.0,7.0,0.0)	0.509 0	0.538 7	0.547 2	0.547 9
(1.5,7.5,0.5)	0.494 0	0.522 8	0.531 1	0.531 8
(2.0,7.5,0.5)	0.495 3	0.524 2	0.532 5	0.532 9
(3.5,7.25,0.75)	0.501 3	0.530 6	0.539 0	0.539 4
(4.0,8.0,1.0)	0.442 8	0.468 6	0.476 0	0.476 6

表3的计算结果表明,随着剖分密度增加,电流密度不均匀的载流导体A在其自身所在空间区域的矢量磁位的计算结果快速收敛于 A_{dir} ,当取剖分体积单元的边长等于0.25倍透入深度时,采用FMM方法计算的矢量磁位与 A_{dir} 的相对误差为0.005.从表4的计算结果可以看出,应用FMM方法计算电流密度不均匀的载流导体A在B处的矢量磁位具有更快的收敛速度,当取剖分体积单元的边长等于0.25倍透入深度时,FMM计算结果与 A_{dir} 的相对误差为0.000 7.

以上两个例子可以证明,经过积分方程离散和

静电模拟分析,应用 FMM 算法可正确地计算三维空间载流导体的矢量磁位,计算误差可通过剖分密度进行控制.由多极算法的加速理论可知^[8],当计算的粒子数很大时,该算法的加速性能将会得到很好的体现.

4 结论与下一步工作

本文通过积分方程离散和静电类比分析,将求解准静态电磁场矢量磁位的问题转化为多体问题,利用 FMM 算法进行求解.本文提出的方法扩展了 FMM 算法在准静态电磁场矢量磁位数值计算领域中的应用,下一步的工作将该算法用于片上互连线电感参数的计算,为快速提取互连线寄生参数寻找快速可行的算法.

参考文献:

- [1] Belenguer A, Elsteban H, Boria V E, et al. Computation of the scattering of electrically large 2-D objects using FMM with TE/sup z/incidence [C]// Antennas and Propagation Society International Symposium. Los Angeles: IEEE, 2005: 455-458.
- [2] Wei X C, Li E P, Zhang Y J. Efficient solution to the large scattering and radiation problem using the improved finite-element fast multipole method [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2005, 41(5): 1684-1687.
- [3] Zhao Zhiqin, Li Ling, Smith J. Analysis of scattering from very large three-dimensional rough surfaces using MLFMM and ray-based analyses [J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2005, 47(3): 20-30.
- [4] Takahashi Y, Fujishima Y, Wakao S. Large-scale analysis of surface charge in eddy-current problems by the fast multipole method [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2005, 41(5): 1700-1703.
- [5] Takahashi Y, Wakao S. Large-scale analysis of eddy-current problems by the hybrid finite element-boundary element method combined with the fast multipole method [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2006, 42(4): 671-674.
- [6] Rubinacci G, Tamburrino A, Ventre S, et al. A fast 3-D multipole method for eddy-current computation [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2004, 40(2): 1290-1293.
- [7] Wu Fang, Zhang Yaojiang. Parallel multilevel fast multipole method for solving large-scale problems [J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2005, 47(4): 110-118.
- [8] Greengard L. The rapid evaluation of potential fields in particle systems [M]. Cambridge: MIT Press, 1988: 45-90.

(编辑 杜秀杰)