

一种判断点与多边形关系的快速算法

陈瑞卿, 周健, 虞烈

(西安交通大学机械电子及信息系统研究所, 710049, 西安)

摘要: 采用对多边形各边赋权值的方法, 分析射线与多边形相交的不同情况, 给出了使用结构化查询语言实现交点个数求解的快速解决方案. 结合数据库管理系统提供的优化查询机制, 通过执行一次查询求得射线与多边形的交点个数, 从而快速地判断出点与多边形的位置关系. 与其他改进方法相比, 该方法易于理解, 计算简单, 对于具有多顶点的复杂多边形, 其优越性显得更为突出.

关键词: 交点; 多边形; 结构化查询语言; 算法

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)01-0059-05

Fast Method to Determine Spatial Relationship between Point and Polygon

Chen Ruiqing, Zhou Jian, Yu Lie

(Institute of Mechatronics and Information Systems, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To analyze the different locations of the intersection of a ray and a polygon quickly, a scheme of calculating the number for the intersection point is established based on the structure query language (SQL) and the method of weighting each side of the polygon. Combined with the optimized query mechanism of database management system, the amount of the intersections can be calculated by running the SQL once, and the spatial relationship between the point and polygon is confirmed rapidly. It is verified that the method is simpler and more understandable than the competing methods, especially for the complicated multi-vertex polygons.

Keywords: point of intersection; polygon; structure query language; algorithm

点与多边形位置关系的判断问题是计算机图形学中的基本问题,也是多年来国内外的诸多学者比较关注的问题,他们针对点在多边形内的检测问题作了广泛的研究,提出了许多算法以提高计算效率^[1-7]. 归纳起来常用的方法有3种:叉积判断法、夹角之和检验法与射线法. 其中,叉积判断法要同时对全部边进行叉积运算,角度法则要使用复杂的三角运算,因此二者的计算量都非常大. 目前,工程上应用最多的还是射线法,这种方法简单可靠,但是如果对所有的边都进行求交,当多边形形状比较复杂、边数较多时,其计算量也不容忽视. 虽然文献[3, 5-6]都对射线法所涉及的求解交点的计算量问题作了不同程度的改进,但问题都未能彻底得到解决. 为此,本文引入数据库表,使用结构化查询语言(SQL),借助数据库的快速查询功能,通过执行查询语句直接

求出射线与多边形边的交点个数,进而快速地判断点与多边形的关系.

1 多边形的数据建模

多边形是一组首尾相连的线段的有限集合,线段的端点就是多边形的顶点,线段即为多边形的边,所以多边形可以用有序的点序列 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ 表示,也可以用 $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_0}$ 所代表的边表示.

为了便于使用 SQL 求解射线与多边形的交点个数,采用有向边表示的方法建立多边形的数学模型,图1为使用数据库建模工具(ERWIN)建立的多边形的表示模型,通过多边形的物理模型可以直接生成模型对应的数据库表,表的名称为“T_Borders”. “BorderID”作为表的主键并表示边的编号,

不同的“BorderID”代表一条不同的边,表中的一条记录表示一条由起点到终点的有向边。

如图2所示,由 $P_1, P_2, \dots, P_{12}$ 个顶点构成,即有 $\overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{11}P_{12}}, \overline{P_{12}P_1}$ 等12条边。使用图1所示的模型表示该多边形的形式如表1所示。



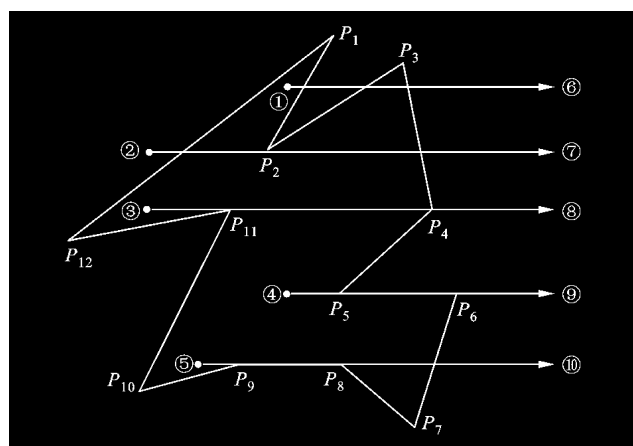
(a)逻辑模型

(b)物理模型

图1 多边形的表示模型

表1 由图1表示的多边形模型

BorderID	x_1	y_1	x_2	y_2
1	240	22	222	100
2	222	100	347	31
3	347	31	366	170
4	366	170	302	226
5	302	226	383	226
6	383	226	337	352
7	337	352	289	289
8	289	289	185	289
9	185	289	96	325
10	96	325	182	170
11	182	170	85	183
12	85	183	240	22

 $P_1 \sim P_{12}$:多边形的顶点;①~⑤:判断点;

⑥~⑩:由判断点引出的射线

图2 矢量图形中的一个任意多边形

2 射线与多边形各边交点个数的求解

射线法判断点与多边形关系的关键是通过判断点引一条射线,求射线与多边形边的交点个数,如果交点个数为偶数则点在多边形外,如果为奇数则点在多边形内。如图2所示,有5个判断点分别对应5条水平向右的射线,它们与多边形相交的位置各不相同:如⑥只与多边形的边相交;⑦和⑧与多边形的顶点相交;射线⑨和⑩与多边形的某些边重合。不同情况下交点个数的求解方法不同,下面分析不同情况下交点个数的求解过程。

2.1 一般情况

如图2中的⑥只与多边形的边相交,不通过多边形的顶点,属于射线与边相交的一般情况,此时分为以下2种情况来判断射线与多边形的边是否有交点。

(1)当边的2个端点分别位于水平射线的上下两侧,并且同时位于判断点 (x, y) 的右侧,则该边与射线有一个交点,如图2中的 $\overline{P_3P_4}$ 。对于表1,满足该条件的结构化查询语言(SQL)描述为

$$((x_1 > x \text{ and } x_2 > x) \text{ and } ((y_1 > y \text{ and } y_2 < y) \text{ or } (y_1 < y \text{ and } y_2 > y))) \quad (1)$$

(2)如果边的2个端点分别位于水平射线的上下两侧,并且分别位于判断点的左右两侧,如边 $\overline{P_{12}P_1}$ 、 $\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{P_2P_3}$ 。从图2中可以看出, $\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{P_2P_3}$ 与⑥有交点,而 $\overline{P_{12}P_1}$ 与⑥无交点。此时,判断该边与射线是否有交点的原则是:如果判断点与边的下侧端点连线的斜率大于该边的斜率,即边在判断点的右侧,则射线与该边有交点;如果判断点与边的下侧端点连线的斜率小于该边的斜率,即边在判断点的左侧,则射线与该边无交点。满足该条件的SQL描述为

$$((x_1 > x \text{ and } x_2 < x) \text{ or } (x_1 < x \text{ and } x_2 > x)) \text{ and } ((y_1 > y \text{ and } y_2 < y) \text{ or } (y_1 < y \text{ and } y_2 > y)) \text{ and } (\text{case when } y_1 < y_2 \text{ then } (y - y_1)/(x - x_1) - (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \text{ else } (y - y_2)/(x - x_2) - (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) \text{ end} > 0) \quad (2)$$

在以上的描述中,为了判断边的哪个端点位于判断点下方,使用了SQL中的case when语句。

2.2 射线通过多边形顶点的情况

射线通过多边形顶点的情况有2种:①通过单个或多个互不相邻的顶点;②通过2个或多个相邻顶点,即射线与多边形的边重合。

如图2中所示的⑦和⑧属于第1种情况,即⑦

通过单个顶点,⑧通过2个不相邻顶点,⑦通过多边形的顶点 P_2 ,该顶点对应的2条边都位于顶点的上侧;⑧通过多边形的顶点 P_4 和 P_{11} ,其中 P_{11} 对应的2条边都位于顶点的下侧, P_4 对应的2条边则分别位于顶点的两侧。

由图2可以看出:⑦通过顶点 P_2 并与边 $\overline{P_{12}P_1}$ 和边 $\overline{P_3P_4}$ 各有一个交点,如果把 P_2 算作一个交点,则射线与多边形的交点个数等于3,根据射线法的奇偶判断原则,②位于多边形内,但从图2中可以看出②位于多边形外,因此判断有误;⑧通过 P_{11} 和 P_4 顶点,③应该在多边形外,而从图2可见③在多边形内,由此看出,当射线通过多边形的顶点时,交点个数的计算与射线通过的顶点所对应边的情况有关。当射线通过多边形的顶点时,如果该顶点的前后2个相邻顶点位于射线的同侧,则认为在相交的顶点处有2个交点或者没有交点,因为断定点是否在多边形内的主要依据是射线与多边形边交点个数的奇偶性,所以认为这种顶点不作为交点,如顶点 P_2 。如果该顶点的前后2个相邻顶点位于射线的异侧,则认为在相交处的顶点就是一个顶点,如顶点 P_{11} 。

射线通过相邻顶点的情况如图2所示的⑨和⑩,这2条射线分别通过多边形的 $\overline{P_5P_6}$ 和 $\overline{P_8P_9}$ 边,此时由于线段与射线重合,所以可以分别把 P_5 、 P_6 和 P_8 、 P_9 都各作为一个顶点,此后的交点个数的判断与射线通过单个顶点时的判断方法相同。

为了能从表1表示的多边形数据中直接使用查询语句,来判断射线通过的顶点是否为交点,对通过点的2条相关边的走向赋一个权值,射线通过顶点的情况如图3所示。如果 $\overline{P_1P_2}$ 的方向向下,则该边的权值为-0.5,如果方向向上,则该边的权值为0.5。如果2个相邻端点在同一水平线上,如图3e、3f,则其对应边的权值为0。由此可以得出,如果以 P 为顶点的2条相关边同时位于 P 点上侧或者下侧,则2条边的权值之和等于0(见图3a、3b),如果分别位于 P 点上下两侧,则2条边的权值之和等于1(见图3d)或者-1(见图3c)。如果射线只通过图3d所示类型的顶点,权值之和“1”就可以作为交点个数。如果射线只通过图3c所示类型的顶点,权值之和“-1”取绝对值后就可以作为交点个数。如果射线同时通过了图3c和图3d所示的顶点,即通过2个顶点,则权值之和等于0,这与奇偶判断条件相符,这种方法同样适合于图3e和图3f的情况。

可以通过计算相交顶点相关边的权值之和来判断交点的个数,如果权值之和等于0,则射线与多边形

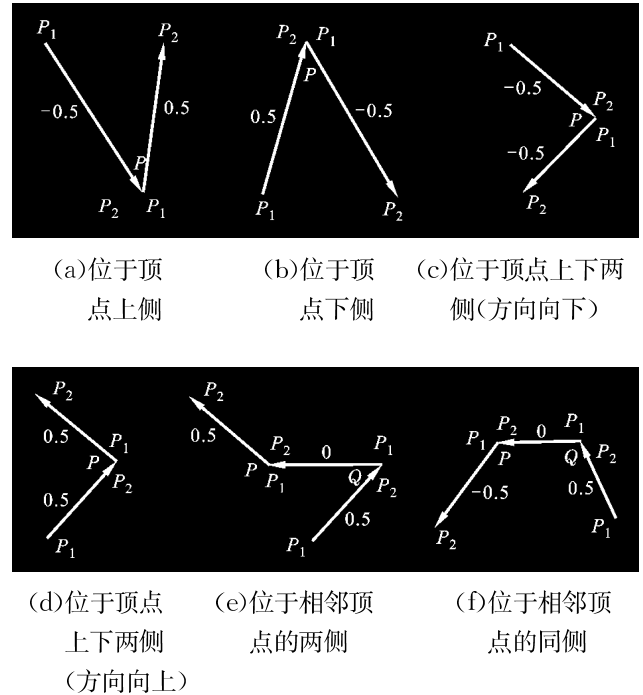


图3 射线与多边形顶点相交的情况

形无交点;如果权值之和等于 N 或者 $-N(N>0)$,则射线与多边形有 N 个交点,并把该交点与其他情况的交点个数之和作为判断点与多边形关系的依据。

根据边的方向,对边赋权值的问题同样可以使用“case when”语句,具体的SQL描述如下:

```
select ABS(sum (case
    when  $y_1 < y_2$  then -0.5 // 如果边的方向向下
    when  $y_1 > y_2$  then 0.5 // 如果边的方向向上
    else 0 end)) // 如果边与射线重合
from T_Borders where ( $y_1 = y$  or  $y_2 = y$ )
```

因为此方法求得的权值有可能为负,因此使用ABS()函数对权值的结果取绝对值。

将第2.1节和第2.2节情况下的交点个数求和就可以求得射线与多边形交点的总个数,使用union将2种情况下的2个查询结果集合为一个结果集,再用一个查询语句从这个结果集中求得2种情况下交点的总个数,即可判断点在多边形内还是在多边形外。具体的查询语句如下:

```
Select sum(PointsCount) from
(select ABS(sum (case
    when  $y_1 < y_2$  then -0.5
    when  $y_1 > y_2$  then 0.5
```

```

else 0 end)) As PointsCount
from T_Borders where ( $y_1=y$  or  $y_2=y$ )
union
select cast ( count ( * ) as float ) As
PointsCount from T_Borders
where (( $x_1>x$  and  $x_2>x$ ) and (( $y_1>y$  and
 $y_2<y$ ) or ( $y_1<y$  and  $y_2>y$ )))
or (( $x_1>x$  and  $x_2<x$ ) or ( $x_1<x$  and  $x_2>x$ )) and (( $y_1>y$  and  $y_2<y$ ) or ( $y_1<y$  and  $y_2>y$ ))
and (case
when  $y_1<y_2$  then  $(y-y_1)/(x-x_1)-(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ 
else  $(y-y_2)/(x-x_2)-(y_1-y_2)/(x_1-x_2)$ 
end $>=0$ )
)

```

2.3 判断点在多边形的边上的情况

判断点与多边形的位置关系除点在多边形内和点在多边形外,还有一种情况是点在多边形的边界上.在第2.1节描述的第2种情况中,如果判断点与边的下侧端点连线的斜率等于该边斜率,则判断点在多边形的边上.此外,如果判断点与多边形的某个顶点重合,则判断点在多边形的边上.

对于点在多边形边界上判断的SQL描述如下:

```

select count ( * ) from T_Borders
where ( $x_1=x$  and  $y_1=y$ ) //表示判断点就是多边形顶点
or ( $x_1=x$  and  $x_2=x$  and (( $y_1>y$  and  $y_2<y$ ) or ( $y_1<y$  and  $y_2>y$ ))) //表示判断点位于垂直于射线的边上
or ((( $x_1>x$  and  $x_2<x$ ) or ( $x_1<x$  and  $x_2>x$ )) and (( $y_1>y$  and  $y_2<y$ ) or ( $y_1<y$  and  $y_2>y$ )) and ( $x_1<>x_2$ ))
and (case when  $y_1<y_2$  then  $(y-y_1)/(x-x_1)-(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$  else  $(y-y_2)/(x-x_2)-(y_1-y_2)/(x_1-x_2)$  end $=0$ ))

```

//表示判断点与边的下侧端点连线的斜率与该边的斜率相等.

如果语句执行的结果求得的记录个数为1,则认为点在多边形边界上;如果为0,则表示点没有多边形边界上.

3 算例分析

为了验证方法的可行性,在PIV 2.0的微机上

使用SQL Server 2000查询分析器对上述语句进行了调试,并将1:50万的中国地图中的县域图层数据导入SQL Server 2000数据库中,用其中顶点个数最多(3 543个)的新疆若羌县多边形区域进行了测试.结果表明,查询语句判断点与多边形的内外关系时,其运行时间不足1 s.为了进一步测试大数据量时该方法的执行效率,又用程序产生了一个具有10万个顶点的多边形,使用上述相同的环境测试,运行时间仅为2.6 s.文献[6]提出的映射相关边概念改进了多边形内外点的判别算法,在PⅢ 933的联想微机上将改进算法^[6]与射线法的运行效率进行了对比,对比结果如表2所示.

表2 改进算法与常规射线法的效率比较

顶点数 /个	运行时间/s		运行时间比 /%
	文献[6]算法	射线法	
10	0.082	0.099	82.83
25	0.100	0.280	35.71
40	0.250	0.450	55.56
50	0.300	0.620	48.39
100	0.520	1.200	43.33
1 000	4.600	11.910	38.62

由表2看出,对具有1 000个顶点的多边形,文献[6]算法的运行时间为4.6 s,常规射线法运行时间为11.91 s,而本文同样使用射线法,只是改进了交点个数的求解方法,就大大提高了运行效率.因此,使用SQL查询判断点与多边形位置关系的方法不仅可行且效率较高.

4 结 论

本文通过分析射线与多边形相交的不同情况,巧妙地引入了边赋权值的方法,灵活地运用SQL中提供的“Case When”函数和“abs()”函数,使得各种情况下交点个数的求解均可通过执行一条查询语句来实现.因此,可以借助数据库管理系统提供的优化查询机制,快速地求得射线与多边形的交点个数,从而迅速实现点与多边形位置关系的判断.该方法不但彻底解决了射线法判定点与多边形包含关系中的计算量问题,而且避免了射线平移可能引起的计算量重复甚至判断错误.由于查询语句的构造需要使用“Case When”函数,因此选用该方法时必须选择能提供类似“Case When”函数功能的数据库作为支

持。目前,流行的大型数据库如 SQL SERVER、ORACLE、DB2 以及开源数据库 PostgreSQL 等都提供了这一函数,桌面数据库 ACCESS 也提供了类似该函数功能的 if 语句,因此该方法具有较好的实用性。

参考文献:

- [1] Feito F R, Torres J C, Urena L A. Orientation simplicity and inclusion test for planar polygons[J]. Computer & Graphics, 1995, 19(4):595-600.
- [2] 王文成, 吴恩华. 判断检测点是否是多边形或多面体内的新方法[J]. 软件学报, 2000, 11(12):1614-1619.
Wang Wencheng, Wu Enhua. A new method deciding whether a point is in a polygon or a polyhedron[J]. Journal of Software, 2000, 11(12):1614-1619.
- [3] 胡景松, 张丽芬, 王晓华, 等. 点与简单多边形关系的新算法[J]. 计算机工程, 2004, 30(20):86-88.
Hu Jingsong, Zhang Lifen, Wang Xiaohua, et al. New algorithm for simple polygon and point[J]. Computer Engineering, 2004, 30(20):86-88.
- [4] 李维诗, 李江雄, 柯映林. 平面多边形方向及内外点判断的新方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(6):405-407.
Li Weishi, Li Jiangxiong, Ke Yinglin. Orientation and point inclusion test for planar polygon [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2000, 12 (6):405-407.
- [5] 吴坚, 姜虹, 王小椿. 快速判断点是否在自交多边形内的方法[J]. 系统仿真学报, 2003, 15(11):1592-1594.
Wu Jian, Jiang Hong, Wang Xiaochun. A method for the decision of a point whether in or not in self-intersected polygon [J]. Journal of System Simulation, 2003, 15(11):1592-1594.
- [6] 张宁宇, 张树有, 谭建荣. 映射相关边概念的多边形内外点判别算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(7):935-938.
Zhang Ningning, Zhang Shuyou, Tan Jianrong. Point inclusion test for simple polygons by the nearest relevant edge [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(7) : 935-938.
- [7] 王晨, 池建斌, 冯桂珍. 一种判定点和多边形包含关系的有效方法[J]. 计算机应用与软件, 2005, 22(4):110-112.
Wang Chen, Chi Jianbin, Feng Guizhen. A method of judging the relationship between point and polygon [J]. Computer Applications and Software, 2005, 22 (4):110-112.

(编辑 管咏梅)

王铁军教授担任 2006—2007 年度“973 计划”项目首席科学家

在科技部在京召开的 2006—2007 年度国家重点基础研究发展计划(“973 计划”)项目实施会上,我校王铁军教授被聘为《大型动力装备制造基础研究》项目首席科学家,该项目未来 5 年共获得 8 900 万元经费资助,其中国拨专项经费 2 900 万元,企业配套经费 6 000 万元。

重型燃气轮机被誉为先进制造业王冠上的明珠,是国家重大装备先进制造水平的标志,涉及国民经济、能源电力、国防军工等重大领域。为了自主创新地发展我国重型燃气轮机制造业,加强以此为代表的大型动力装备制造基础理论研究是十分必要和刻不容缓的。《大型动力装备制造基础研究》项目从制约我国大型动力装备制造的共性瓶颈问题出发,以清洁高效燃煤发电装备为应用背景,围绕重型燃气轮机高温透平,在系统设计、关键零部件核心制造技术和科学实验层面,重点解决严酷服役环境调控理论与高性能工作界面形成机理、复杂构件的控形控性制造与精度协同理论、局部扰动传播与强耦合复杂结构系统动力奇异性等关键科学问题。通过 5 年实施,为我国 10 万~30 万 kW 重型燃气轮机高温透平制造提供自主创新的基础理论、关键零部件核心制造技术和系统集成技术,推动我国重型燃气轮机自主研发技术水平的跨越式发展。

我校是该项目第一承担单位,这也是我校自 2003 年以来连续 4 次以第一承担单位身份获得“973 计划”资助,在全国高校居前列,极大地提升了我校在相关基础研究领域中的国际地位。该项目的合作单位包括东方汽轮机厂、西北工业大学、清华大学、大连理工大学、中南大学和中国燃气涡轮研究院等企业、高校和科研院所。

(西安交通大学科技处)