

随机 1-集压缩型算子方程的几个定理

陈晓莉, 朱传喜, 吴照奇

(南昌大学数学系, 330047, 南昌)

摘要: 利用凹函数、凸函数、凹泛函和凸泛函的性质, 研究了几类边界条件由凹(凸)函数、凹(凸)泛函和单调函数控制下的随机 1-集压缩型算子方程随机解的存在情况, 所得结果推广了著名的 Altman 定理以及朱传喜和李国祯文中的一些定理.

关键词: 随机算子方程; 随机解; 凹函数; 凸函数

中图分类号: O211.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)02-0241-04

Several New Theorems for Random Operator Equation of 1-Set-Contractive Type

Chen Xiaoli, Zhu Chuanxi, Wu Zhaoqi

(Department of Mathematic, Nanchang University, Nanchang 330047, China)

Abstract: The characteristics of concave function and convex function are considered, the random solution existence of random 1-set contractive operator equations whose boundary conditions are governed by concave function, convex function or monotone function is investigated. The conclusions expand the famous Altman theorem and those in Zhu's and Li's.

Keywords: random operator equation; random solution; concave function; convex function

自李国祯于 1993 年和 1996 年提出随机拓扑度^[1]和随机不动点指数^[2]概念以来, 随机拓扑度和随机不动点指数理论已成为研究随机非线性算子的随机不动点的一种基本方法, 建立了许多新的随机不动点定理, 并应用到各类随机方程的研究中. 朱传喜在文[3-5]中研究了随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ ($\forall \omega \in \Omega, \mu \geq 1$) 随机解的存在情况, 本文继续研究这类随机算子方程在不同边界条件下随机解的存在情况.

1 预备知识

设 E 是可分的实 Banach 空间, (E, B) 是一个可测空间, 其中 B 表示 E 中的所有开子集所产生的 σ -代数. 又设 (Ω, Σ, μ) 是一个完全的概率测度空间, 其中 μ 表示概率测度, $\mu(\Omega) = 1$. 设 X 是 E 中的凸闭集, D 是 X 中的一个有界开集, α 表示非紧性测度. 记 $R = (-\infty, +\infty)$, $R^+ = [0, +\infty)$.

定义 1^[6] 设 I 是 R 中的一个区间, $\varphi: I \rightarrow R$. 如果 φ 满足 $\varphi(tx + (1-t)y) > t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$, $\forall x, y \in I, x \neq y, t \in (0, 1)$, 称 φ 是 I 上的严格凹函数. 同样, 如果 $-\varphi$ 是 I 上的严格凹函数, 称 φ 是 I 上的严格凸函数.

定义 2^[6] 设 G 是 E 的非空凸子集, $\phi: G \rightarrow R$. 如果 $\phi(tx + (1-t)y) > t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$, $\forall x, y \in G, x \neq y, t \in [0, 1]$, 称 ϕ 是 G 上的严格凹泛函. 同样, 如果 $-\phi$ 是 G 上的严格凹泛函, 称 ϕ 是 G 上的严格凸泛函.

引理 1^[5] 实数 $\mu \geq 1$, 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭 1-集压缩算子, 且满足 $A(\omega, x) \neq \alpha x$, $\forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, \alpha \geq \mu$, 则随机 1-集压缩型算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

2 定理及其证明

定理 1 设 $A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭 1-集压缩算

子,且 $\theta \in D$, 如果存在严格凹函数 $\varphi: R^+ \rightarrow R$, $\varphi(0)=0$, 使得 $\forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, \mu \geq 1, \beta \in (0, 1]$, 有

$$(H_1) \quad \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|) - \beta\varphi(\|\mu x\|)$$

则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

证明 根据引理 1, 我们只需证明 $A(\omega, x) \neq \alpha x$, $\forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, \alpha \geq \mu$. 使用反证法, 假设存在 $\alpha_0 \geq \mu \geq 1, \omega_0 \in \Omega, x_0 \in \partial D$, 使得 $A(\omega_0, x_0) = \alpha_0 x_0$, 把此式代入 (H_1) 得

$$\varphi(\|\alpha_0 x_0 - \beta\mu x_0\|) \leq \varphi(\|\alpha_0 x_0\|) - \beta\varphi(\|\mu x_0\|)$$

即

$$\varphi(\|\alpha_0 x_0\|) \geq \varphi\left(\left(1 - \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\right)\|\alpha_0 x_0\|\right) + \beta\varphi\left(\frac{\mu}{\alpha_0}\|\alpha_0 x_0\|\right) \quad (1)$$

另外, 从 $\theta \in D, x_0 \in \partial D, \alpha_0 \geq 1$ 知 $\alpha_0 x_0 \neq \theta$, 故 $\|\alpha_0 x_0\| \neq 0$, 从而由 φ 的严格凹性知

$$\begin{aligned} \varphi\left(\left(1 - \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\right)\|\alpha_0 x_0\|\right) + \beta\varphi\left(\frac{\mu}{\alpha_0}\|\alpha_0 x_0\|\right) &= \\ \varphi\left(\left(1 - \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\right)\|\alpha_0 x_0\| + \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\|\theta\|\right) + \\ \beta\varphi\left(\frac{\mu}{\alpha_0}\|\alpha_0 x_0\| + \left(1 - \frac{\mu}{\alpha_0}\right)\|\theta\|\right) &> \\ \left(1 - \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\right)\varphi(\|\alpha_0 x_0\|) + \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\varphi(0) + \\ \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\varphi(\|\alpha_0 x_0\|) + \beta\left(1 - \frac{\mu}{\alpha_0}\right)\varphi(0) &= \\ \left(1 - \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\right)\varphi(\|\alpha_0 x_0\|) + \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\varphi(\|\alpha_0 x_0\|) &= \\ \varphi(\|\alpha_0 x_0\|) \end{aligned}$$

即

$$\varphi\left(\left(1 - \frac{\beta\mu}{\alpha_0}\right)\|\alpha_0 x_0\|\right) + \beta\varphi\left(\frac{\mu}{\alpha_0}\|\alpha_0 x_0\|\right) > \varphi(\|\alpha_0 x_0\|) \quad (2)$$

由式(1)、式(2)得, $\varphi(\|\alpha_0 x_0\|) > \varphi(\|\alpha_0 x_0\|)$, 这不可能, 从而证明了 $A(\omega, x) \neq \alpha x, \forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, \alpha \geq \mu$ 成立. 因此, 根据引理 1 可知, $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

推论 1 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭 1-集压缩算子, 且满足

$$\begin{aligned} \|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^\alpha &\leq \|A(\omega, x)\|^\alpha - \beta\|\mu x\|^\alpha \\ \forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, 0 < \alpha < 1 \\ \mu &\geq 1, \beta \in (0, 1] \end{aligned}$$

则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随

机解.

证明 令 $\varphi(t) = t^\alpha, t \in R^+, 0 < \alpha < 1$, 则易知 $\varphi: R^+ \rightarrow R^+$ 为严格凹函数, 且 $\varphi(0) = 0$, 故据定理 1 可知结论成立.

推论 2 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭 1-集压缩算子, 且 $\varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|) - \beta\varphi(\|\mu x\|), \forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, \mu \geq 1, \beta \in (0, 1]$. 其中 $\varphi: R^+ \rightarrow R^+$ 可导, $\varphi(0) = 0$, 且当 $t > 0, s > 0$ 时, $\varphi'(s(t+1)) - \varphi'(st) < 0$, 则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

证明 只需证 $\varphi: R^+ \rightarrow R^+$ 是严格凹函数. 事实上, $\forall y > x > 0$, 令 $s = y - x, t = x/s$, 则 $x = st, y = s(t+1)$. 于是 $\varphi'(y) = \varphi'(s(t+1)) < \varphi'(st) = \varphi'(x)$, 因此 φ' 是 R^+ 上的严格减函数. 易知 $\varphi: R^+ \rightarrow R^+$ 是严格凹函数, 故根据定理 1 可知结论成立.

与定理 1 及其推论相应的有下面的定理 2 及其推论.

定理 2 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭 1-集压缩算子, 如果存在严格凸函数 $\varphi: R^+ \rightarrow R, \varphi(0) = 0$, 使得

$$\begin{aligned} \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|) &\geq \\ \varphi(\|A(\omega, x)\|) - \beta\varphi(\|\mu x\|) \end{aligned}$$

$$\forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, \mu \geq 1, \beta \in (0, 1]$$

则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

推论 3 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭 1-集压缩算子, 且满足

$$\begin{aligned} \|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^\alpha &\geq \|A(\omega, x)\|^\alpha - \beta\|\mu x\|^\alpha \\ \forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, \alpha > 1, \mu &\geq 1, \beta \in (0, 1] \end{aligned}$$

则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

推论 4 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭 1-集压缩算子, 且 $\varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|) - \beta\varphi(\|\mu x\|), \forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, \mu \geq 1, \beta \in (0, 1]$. 其中 $\varphi: R^+ \rightarrow R^+$ 可导, $\varphi(0) = 0$, 且当 $t > 0, s > 0$ 时, $\varphi'(s(t+1)) - \varphi'(st) > 0$, 则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

注 1 在推论 1 中取 $\beta=1$, 就是文献[5]中的定理 3, 因此定理 1 推广了文献[5]中的定理 3. 在推论 3 中取 $\beta=1, \mu=1, \alpha=2$, 即为 Altman 定理的随机形式, 因此定理 2 是 Altman 定理的一种推广形式.

用类似定理 1 的方法还可以证明下面的两个定理.

定理 3 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭 1-集压

缩算子,如果存在严格凹泛函 $\phi: X \rightarrow R, \phi(\theta) = 0$, 使得

$$\begin{aligned} \phi(A(\omega, x) - \beta\mu x) &\leq \phi(A(\omega, x)) - \beta\phi(\mu x) \\ \forall (\omega, x) &\in \Omega \times \partial D, \mu \geq 1, \beta \in (0, 1] \end{aligned}$$

则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

定理4 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭1-集压缩算子,如果存在严格凸泛函 $\phi: X \rightarrow R, \phi(\theta) = 0$, 使得

$$\begin{aligned} \phi(A(\omega, x) - \beta\mu x) &\geq \phi(A(\omega, x)) - \beta\phi(\mu x) \\ \forall (\omega, x) &\in \Omega \times \partial D, \mu \geq 1, \beta \in (0, 1] \end{aligned}$$

则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

引理2 当 $0 < \alpha < 1, t > \mu \geq 1, 0 < \beta \leq 1$ 时,下面两个结论成立

$$\begin{aligned} (1) (t - \beta\mu)^\alpha &> t^\alpha - \beta\mu^\alpha \\ (2) (t + \beta\mu)^\alpha &< t^\alpha + \beta\mu^\alpha \end{aligned}$$

证明 先证明结论(1),令 $f(t) = (t - \beta\mu)^\alpha - t^\alpha + \beta\mu^\alpha, t > \mu \geq 1, 0 < \beta \leq 1$, 则 $f'(t) > 0$, 因此 $f(t)$ 是 (μ, ∞) 上的严格单调增加函数. 由 $t > \mu$ 知, $f(t) > f(\mu) = [(1 - \beta)^\alpha - 1 + \beta]\mu^\alpha > (1 - \beta - 1 + \beta)\mu^\alpha = 0$, 即 $(t - \beta\mu)^\alpha > t^\alpha - \beta\mu^\alpha, t > \mu \geq 1, 0 < \beta \leq 1$.

用类似的方法,可证明(2)成立.

定理5 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭1-集压缩算子,实数 $\mu \geq 1, 0 < \beta \leq 1$. 如果存在减连续函数 $\varphi: R \setminus \{0\} \rightarrow R$, 使得 $\forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, 0 < m + \lambda < 1$, 函数 φ 满足下面条件之一

$$(H_2) \quad \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) - \mu x\|^\lambda - \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H'_2) \quad \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda - \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H_3) \quad \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|^{m+\lambda} - \beta\|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda \|\mu x\|^m)$$

$$(H_4) \quad \varphi(\|A(\omega, x) + \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda + \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H'_4) \quad \varphi(\|A(\omega, x) + \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) - \mu x\|^\lambda + \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H_5) \quad \varphi(\|A(\omega, x) + \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|^{m+\lambda} + \beta\|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda \|\mu x\|^m)$$

其中 $(H_2) \sim (H_5)$ 中的 $\lambda \geq 0$, 而 $(H'_2), (H'_4)$ 中的 $\lambda \leq 0$, 则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

证明 根据条件不难证明引理1的条件成立,故函数 φ 满足其中的任何一个条件时,随机算子方程

$A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

引理3 当 $\alpha < 0, t > \mu \geq 1, 0 < \beta \leq 1$ 时,有

$$\begin{aligned} (1) (t - \beta\mu)^\alpha &> t^\alpha - \beta\mu^\alpha \\ (2) (t + \beta\mu)^\alpha &< t^\alpha + \beta\mu^\alpha \end{aligned}$$

类似于定理5的证明,我们有定理6成立.

定理6 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \bar{D} \rightarrow X$ 是随机半闭1-集压缩算子,实数 $\mu \geq 1, 0 < \beta \leq 1$. 如果存在减连续函数 $\varphi: R \setminus \{0\} \rightarrow R$, 使得 $\forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, m + \lambda < 0$, 函数 φ 满足下面条件之一

$$(H_6) \quad \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda - \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H'_6) \quad \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) - \mu x\|^\lambda - \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H_7) \quad \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|^{m+\lambda} - \beta\|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda \|\mu x\|^m)$$

$$(H_8) \quad \varphi(\|A(\omega, x) + \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) - \mu x\|^\lambda + \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H'_8) \quad \varphi(\|A(\omega, x) + \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda + \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H''_8) \quad \varphi(\|A(\omega, x) + \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|^{m+\lambda} + \beta\|\mu x\|^m \|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda)$$

其中 $(H_6), (H_8)$ 中的 $\lambda \leq 0$, 而 $(H'_6), (H_7), (H'_8), (H''_8)$ 中的 $\lambda \geq 0$, 则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

引理4 当 $\alpha > 1, t > \mu \geq 1, 0 < \beta \leq 1$ 时,有

$$\begin{aligned} (1) (t + \beta\mu)^\alpha &> t^\alpha + \beta\mu^\alpha \\ (2) (t - \beta\mu)^\alpha &< t^\alpha - \beta\mu^\alpha \end{aligned}$$

定理7 设 $\theta \in D, A: \Omega \times \partial D \rightarrow X$ 是随机半闭1-集压缩算子,实数 $\mu \geq 1, 0 < \beta \leq 1$, 如果存在减连续函数 $\varphi: R \setminus \{0\} \rightarrow R$, 使得 $\forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, m + \lambda > 1$, φ 满足下面条件之一

$$(H_9) \quad \varphi(\|A(\omega, x) + \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) - \mu x\|^\lambda + \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H'_9) \quad \varphi(\|A(\omega, x) + \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda + \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H''_9) \quad \varphi(\|A(\omega, x) + \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \geq \varphi(\|A(\omega, x)\|^{m+\lambda} + \beta\|\mu x\|^m \|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda)$$

$$(H_{10}) \quad \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda - \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

$$(H'_{10}) \quad \varphi(\|A(\omega, x) - \beta\mu x\|^{m+\lambda}) \leq \varphi(\|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) - \mu x\|^\lambda - \beta\|\mu x\|^{m+\lambda})$$

其中 $(H_9), (H_{10})$ 中的 $\lambda \geq 0$, 而 $(H'_9), (H''_9), (H'_{10})$ 中的 $\lambda \leq 0$, 则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有一个随机解.

注2 若在定理5~7中令 $\varphi(t) = \frac{1}{t}$, 则 $\varphi(t)$ 是连续的减函数, 再令 $\lambda=0, \beta=1$, 则定理5~7中的条件即为文献[7]中相应定理的条件, 因此定理5~7推广了文献[7]中的相应定理.

注3 若令 $\beta=1, \varphi(t) = \frac{1}{t}, t \in R \setminus \{0\}$, 则 $\varphi(t)$ 是连续的减函数, 且 $(H_{10}), (H'_{10})$ 即为 $\|A(\omega, x) - \mu x\|^{m+\lambda} \geq \|A(\omega, x)\|^m \|A(\omega, x) + \mu x\|^\lambda - \|\mu x\|^{m+\lambda}$, 因此定理2推广了文献[5]中的定理2.

参考文献:

- [1] Li Guozhen, Chen Yuqing. The fixed point index and the fixed point theorems of 1-set-contractive mappings [J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 104(4): 1163-1170.
- [2] 李国祯. 随机1-集压缩算子的随机不动点指数和随机不动点定理[J]. 应用数学学报, 1996, 19(2): 203-212.
Li Guozhen. On random fixed point index and some random fixed point theorems of random 1-set-contraction operator[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1996, 19(2): 203-212.
- [3] 朱传喜. 1-集压缩型随机算子方程的若干定理[J]. 数学进展, 1998, 27(5): 464-468.
Zhu Chuanxi. Some theorems for random operator equation of 1-set-contractive type [J]. Advance in Mathematics, 1998, 27(5): 464-468.
- [4] 朱传喜. 关于随机算子方程的随机解[J]. 数学进展, 1997, 26(5): 429-434.
Zhu Chuanxi. On random solution of random operator equation[J]. Advance in Mathematics, 1997, 26(5): 429-434.
- [5] 朱传喜. 一类随机算子方程随机解的存在性[J]. 数学物理学报, 2003, 23A(3): 276-279.
Zhu Chuanxi. Existence of random solution for a class of random operator equations [J]. Acta Mathematica Scientia, 2003, 23A(3): 276-279.
- [6] 梁占平, 李福义, 张叶勤. Altman 定理的推广[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2004, 27(4): 335-337.
Liang Zhanping, Li Fuyi, Zhang Yeqin. Extension on Altman theorem [J]. Journal of Shanxi University(Nat Sci Ed), 2004, 27(4): 335-337.
- [7] Li Guozhen, Xu Shaoyuan, Duan Huagui. Fixed point theorems of 1-set-contractive operators in Banach spaces[J]. Applied Mathematics Letters, 2006, 19: 403-412.

(编辑 杜秀杰)