

声波衰减的格子-Boltzmann 方法模拟

王勇, 何雅玲, 刘迎文, 黄竞, 童长青

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 采用格子-Boltzmann 方法分别模拟了一维及二维通道内平面声波的衰减过程. 模拟中, 声源给定速度及密度, 出口采用出口边界条件. 一维模型下, y 方向采用周期性边界条件; 二维模型下, y 方向采用无滑移边界条件. 模拟结果表明: 在介质黏性以及壁面摩擦(仅二维)的作用下, 声波沿着传播方向逐渐衰减, 速度振幅及密度振幅越来越小, 压力梯度呈负指数形式减小; 随着波长的增大或介质黏度的减小, 声波的衰减减缓, 压力梯度越小. 模拟获得的速度分布、压力梯度分布以及衰减系数与理论值吻合良好. 最后, 给出了声源的激发声压级.

关键词: 格子-Boltzmann; 声波; 衰减

中图分类号: TK124 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)01-0005-04

Simulation on Attenuation of Sound Waves with Lattice-Boltzmann Method

Wang Yong, He Yaling, Liu Yingwen, Huang Jing, Tong Changqing

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Using the lattice-Boltzmann method, a numerical simulation was performed for the attenuation of plane sound waves both in one and two-dimensional channels. Sine-type velocity and density were given as the sound source at the inlet. In the vertical direction, periodic boundary condition was adopted for one-dimensional channel, and non-slip boundary condition for two-dimensional channel. Profiles of the density, velocity and pressure gradient were obtained. The results show that the waves will attenuate along the propagating direction due to the internal viscous dissipation of the propagation medium, and the friction of the walls which is only for the two-dimensional case. The attenuation of the sound waves leads to a negative exponent pressure gradient. With the increase of the wavelength or the decrease of the medium viscosity, the attenuation of sound waves becomes slower, and the pressure gradient becomes smaller. For both cases, the results agree well with the analytical solutions. In addition, the sound level of the source was presented.

Keywords: lattice-Boltzmann; sound wave; attenuation

格子-Boltzmann 方法(LBM)是以统计物理学为理论基础,并由格子气自动机发展而来的一种新的流体数值模拟方法,被认为是一种介观的动理论格式^[1]. 与传统的数值模拟方法相比, LBM 具有物理意义清晰,边界条件处理简单,并行性能好等优点,因此吸引着众多领域学者的兴趣^[2-6].

热致声自激振荡过程是热声发动机中典型的非线性现象,也是热声研究的难点^[7-8]. 起振是声波发

展的物理过程,与之相反的则是声波衰减. 通过对声波衰减的研究,有利于从相反角度探讨影响声波起振以及振动维持的因素,为开展热声现象的 LBM 研究提供重要依据. 在不考虑热问题的情况下,平面波的衰减主要由黏性吸收所引起.

由于在密度分布函数的推导过程中使用了低 Mach 数限制,所以目前的 LBM 模型主要用于弱可压缩流动的模拟,即要求流体密度的变化量较小^[2].

另外,声波的传播伴随着介质密度的变化,通常情况下各声学参量都是一级微量^[9],即质点速度甚小于声速,介质密度变化甚小于静态密度.基于以上两方面,采用 LBM 模拟声波现象在理论上是切实可行的.历史上,已有部分学者采用 LGA 实现了声波的模拟,并取得了一定成绩^[10-12],而 LBM 的声波模拟,却是最近几年才开始的.英国 Edinburgh 大学的 Buick 等采用二维七速的 LBM 模型对声波衰减进行了数值研究,给出了声场介质的速度随时间的衰减情况,并证明模拟获得的相关频率及衰减系数与理论值吻合良好^[4]. Oxford 大学的 Haydock 和 Yeomans 则采用 LBM 模拟了行波声场中由于声波衰减而引起的声流,给出了一维情况下声场介质的速度分布以及压力梯度分布^[5],但模拟中采用的入口边界条件需要对边界节点的密度分布函数进行额外计算,操作较繁复且物理意义不够明确.

本文采用 LBM 分别模拟了一维及二维模型下平面波的衰减过程.模拟中采用了一种更为简单可行的边界条件,即入口处声源给定正弦变化的速度与密度扰动.本文将模拟结果和理论分析解进行了比较,吻合很好,证明了所开发的声波模拟程序的正确性,为进一步将 LBM 应用于热声系统中更复杂的流动与换热现象的研究奠定了基础.国内与此相关方面的研究也尚未见报导.

1 LBM 模拟方法的实施

本文使用二维九速的 LBM 模型^[3],其速度场演化方程为

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

式中: f_i 为密度分布函数; f_i^{eq} 为平衡态密度分布函数; $\mathbf{c}_i$ 为粒子速度(参见文献[3]); τ 为密度分布函数趋于其平衡态分布的松弛时间.平衡态密度分布函数定义为

$$f_i^{\text{eq}} = \omega_i \rho \left[1 + 3 \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{u^2}{c^2} \right] \quad (2)$$

$$\omega_i = \begin{cases} 4/9, & i = 0 \\ 1/9, & i = 1 \sim 4 \\ 1/36, & i = 5 \sim 8 \end{cases}$$

式中: ρ 、 $\mathbf{u}$ 分别为流体密度和速度,定义为

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \mathbf{u} = \sum_i \mathbf{c}_i f_i \quad (3)$$

利用 Chapman-Enskog 展开方法,可由式(1)导出 Navier-Stokes 方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) &= -\nabla p + \nabla \cdot [\rho \nu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $p = c_s^2 \rho = c^2 \rho / 3$ 为压力, c_s 为声速; $\nu = (2\tau - 1)\Delta x^2 / (6\Delta t)$ 为运动黏性系数, Δx 、 Δt 分别为格子宽度和时间步长.

2 数值模拟的物理模型

考虑平面声波在通道内沿着 x 方向传播,声源位于 $x=0$ 处,通道长、高分别为 L_x 、 L_y ,如图 1 所示.声源的速度给定 $u_0 = U \sin(\omega t)$,其中 U 为振幅, $\omega = 2\pi c_s / \lambda$ 为角速度, λ 为波长,则 $k = 2\pi / \lambda$ 为波数.相应地,声源处的密度则为^[5]

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho \sin(\omega t) = \rho_0 (1 + U \sin(\omega t) / c_s) \quad (5)$$

式中: ρ_0 为平均密度; $\delta \rho$ 为密度振幅.

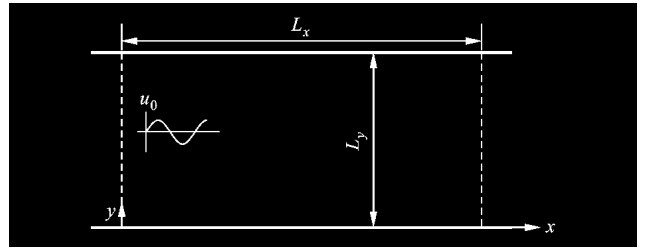


图1 物理模型示意图

模拟中采用均匀网格,格子数 $N_x \times N_y = L_x \times L_y$.此外, $\rho_0 = 1.0$, $\delta \rho = 0.01$,则 $U = c_s \delta \rho / \rho_0 = 0.00577$.本文分别对一维及二维模型下的声波衰减进行了模拟,具体模拟细节及结果如下.

3 模拟细节及结果

3.1 一维声波衰减

对于一维模型, y 方向上采用周期性边界条件^[2].同时, x 方向上足够大,不考虑声波的反射,进口直接给定介质速度及密度,出口采用出口边界条件^[2],取 $N_x \times N_y = 10\,000 \times 20$.速度及压力梯度的理论分析解为^[13]

$$u_x(x, t) = U e^{-\alpha x} \sin(\omega t - kx) \quad (6)$$

$$P' = -\rho_0 \langle 2u_x \partial u_x \rangle = \rho_0 \alpha U^2 e^{-2\alpha x} \quad (7)$$

式中: α 为单位长度上的声波衰减系数,定义为^[4]

$$\alpha = 4\pi^2 \nu / (c_s \lambda^2) \quad (8)$$

模拟结果表明,随着声波的传播,声场中的介质在其平衡位置附近作简谐振动并表现出疏密相间,振动的方向与声波前进的方向一致,且沿声波方向密度振幅逐渐减小(限于篇幅,未给出图).图 2a 和

2b 分别为 $\nu=0.1, \lambda=50$ 和 100 时通道中心线上介质的瞬时速度分布. 由图 2 可知, 在介质黏性的作用下, 声波沿着传播方向逐渐衰减, 表现为速度振幅越来越小, 且随着波长的增大, 声波的衰减减缓. 不同波长下模拟获得的速度分布与解析解均十分吻合.

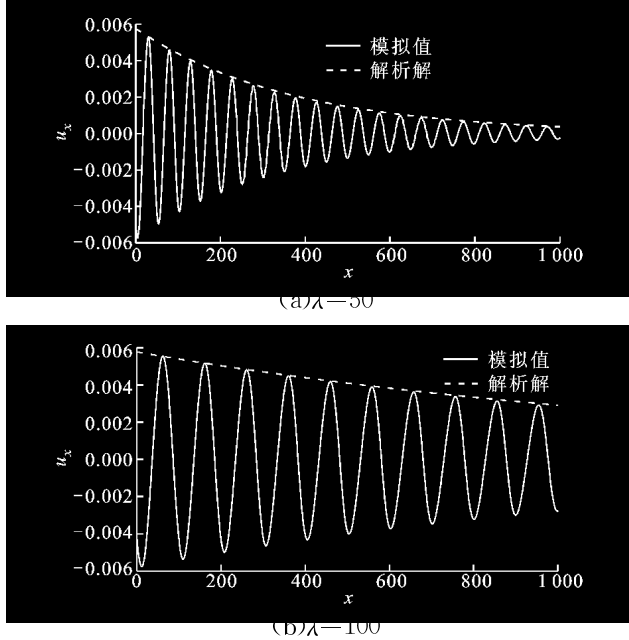


图2 一维模型下两种波长的瞬时速度分布

由于黏性作用, 声波速度振幅沿着传播方向逐渐减小, 声场中存在非线性压力梯度. 图 3 给出了 $\nu=0.1, \lambda=50$ 和 100 时通道中心线上的压力梯度. 模拟值经过了 100 个周期的时间平均. 由图可知, 沿声波传播方向压力梯度呈负指数形式减小, 且波长越大, 声波衰减越慢 (参见图 2), 对应压力梯度越小, 压力梯度减小也越慢. 两种波长情况下, 本文的模拟结果和理论值吻合得很好.

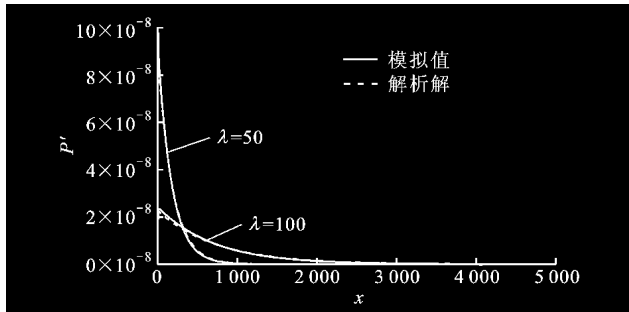


图3 一维模型下两种波长的二阶压力梯度分布

3.2 二维声波衰减

对于二维模型, 通道壁面上采用无滑移边界条件^[14]. y 方向上宽度的选取需要满足 $\nu\lambda/2\pi c_s L_y^2 \ll 1$ ^[4]. 与一维模型相同, x 方向上格子数足够大, 不考虑声波的反射, 进口给定介质速度及密度, 出口采用

出口边界条件^[2]. 具体地, 取 $N_x \times N_y = 3000 \times 500$. 由于受到壁面的摩擦, 声波会在壁面附近形成厚度为 $(\nu\lambda/\pi c_s)^{1/2}$ 的边界层^[13], 而在远离壁面的通道中心区域, 介质的速度以及压力梯度仍可以采用式 (6)、(7). 与一维模型相比, 二维模型下的声波衰减系数, 除了要考虑介质黏性以外, 还需要添加壁面的影响, 定义如下^[4]

$$\alpha = 4\pi^2\nu/(c_s\lambda^2) +$$

$$\pi \left[\frac{8\nu}{3c_s k L_y^2} \cos^2 \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(- \left(\frac{27\nu}{8c_s k L_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

图 4 给出了 $\nu=0.2, \lambda=25$ 和 50 时通道中心线上介质的瞬时速度分布. 图 5 为 $\nu=0.2, \lambda=25$ 和 50 时通道中心线上介质的压力梯度分布. 分别对 100、200 以及 400 个周期内通道中心线上的压力梯度做了时间平均, 确保结果不再随时间变化. 由图可知, 对于速度分布以及压力梯度, 模拟获得的结果与理论值吻合良好. 与一维模型类似, 二维时波长越长, 声波衰减越慢, 对应压力梯度越小, 压力梯度减小也越慢. 此外, 当波长较大 ($\lambda=50$) 时, 壁面影响加强, 模拟结果与理论值略有偏差.

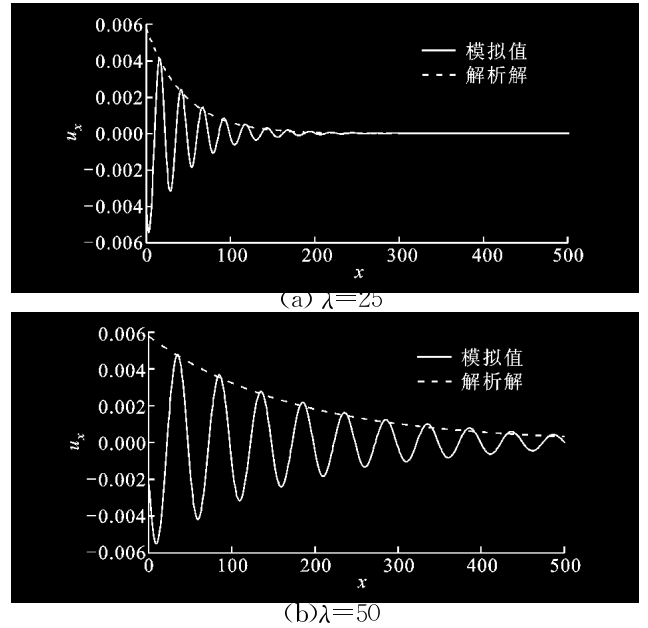


图4 二维模型下两种波长的瞬时速度分布

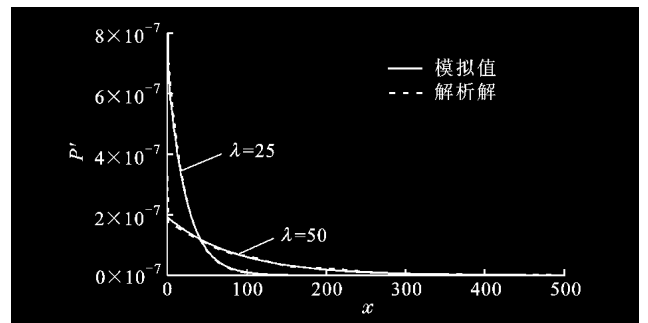


图5 二维模型下两种波长的二阶压力梯度分布

图6给出了二维模型下,声波衰减系数随黏度系数以及波长的变化规律.由图可知,在黏度系数一定的情况下,模拟获得的衰减系数随着波长的增大而减小,这与前面的结论是相吻合的.此外,在波长一定的情况下,模拟获得的衰减系数则随着黏度的增大而增大.在波长较小(频率较大)且黏度系数较大的时候,由于声波衰减非常剧烈,模拟结果和理论值稍有偏差,而多数情况下,模拟获得的衰减系数与理论值吻合得很好.

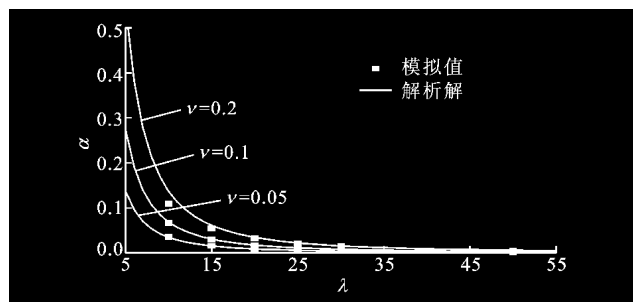


图6 二维模型下衰减系数随波长及黏度系数的变化

最后,还计算了声源处的激发声压级.定义声压级 $L_p = 20 \lg(P/P_{\text{ref}})$, 其中 P 为声波压力, $P_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa 为参考声压.考虑大气压力为 1×10^5 Pa, 模拟中给定声源处声波压力的相对变化为 1%, 则声源处声波压力为 1 kPa, 相应地激发声压级为 154 dB. 当激发声压级过高时, 声波的传播表现出非线性. 边界层、声波的非线性传播以及相应的热问题, 将是我们下一步工作的研究重点.

4 结 论

本文采用 LBM 分别模拟了一维及二维通道内平面声波的衰减过程, 主要结论如下:

(1) 在介质黏性以及壁面摩擦(仅二维)的作用下, 声波沿着传播方向逐渐衰减, 速度振幅及密度振幅越来越小, 且随着波长的增大或介质黏度的减小, 声波的衰减减缓, 表现为衰减系数的减小;

(2) 一维及二维模型下, 沿声波传播方向, 压力梯度都呈负指数形式减小, 且波长越大, 声波衰减越慢, 对应压力梯度越小, 压力梯度减小也越慢;

(3) 一维及二维模型下, 模拟获得的速度分布、压力梯度分布以及衰减系数与理论值吻合很好, 由此证明了所开发的声波模拟程序以及相应边界处理方法的正确性.

本文的结论, 对进一步开展热声现象的 LBM

研究具有重要的参考价值.

参考文献:

- [1] McNamara G, Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata[J]. Phys Rev Lett, 1988, 61(20): 2332-2335.
- [2] Succi S. Lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond[M]. Oxford: Clarendon Press, 2001.
- [3] Chen Shiyi, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. Annu Rev Fluid Mech, 1998, 30(1): 329-364.
- [4] Buick J M, Greated C A, Campbell D M. Lattice BGK simulation of sound waves[J]. Europhys Lett, 1998, 43(3): 235-240.
- [5] Haydock D, Yeomans J M. Lattice Boltzmann simulations of attenuation-driven acoustic streaming[J]. J Phys A: Math Gen, 2003, 36(20): 5683-5694.
- [6] 王勇, 何雅玲, 唐桂华, 等. 二维管道内交变流动的格子-Boltzmann 方法模拟研究[J]. 西安交通大学学报, 2006, 40(1): 14-17.
Wang Yong, He Yaling, Tang Guihua, et al. A numerical simulation of oscillating flow in a two dimensional channel using lattice-Boltzmann method [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2006, 40(1): 14-17.
- [7] Swift G W. Thermoacoustic engines[J]. J Acoust Soc Am, 1988, 84(4): 1145-1180.
- [8] Chen Yu, Liu Xu, Zhang Xiaoqing, et al. Thermoacoustic simulation with lattice gas automata[J]. J Applied Phy, 2004, 95(8): 4497-4499.
- [9] 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础[M]. 2 版. 南京: 南京大学出版社, 2001.
- [10] Lavalley P. Attenuation of sound waves in lattice gases[J]. Physics Letters A, 1992, 163(5/6): 392-396.
- [11] Stancell P, Greated C A. Lattice gas automaton simulation of acoustic streaming in a two-dimensional pipe[J]. Phys Fluids, 1997, 9(11): 3288-3299.
- [12] 刘旭, 陈宇, 张晓青. 热声发动机的格子气模拟[J]. 计算物理, 2004, 21(6): 501-504.
Liu Xu, Chen Yu, Zhang Xiaoqing. Lattice gas simulation of thermoacoustic prime movers [J]. Chinese J Comput Phys, 2004, 21(6): 501-504.
- [13] Nyborg W L M. Acoustic streaming[J]. Physical Acoustics, 1965, 2B: 265-331.
- [14] Inamuro T, Yoshino M, Ogino F. A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations [J]. Phys Fluids, 1995, 7(12): 2928-2930.

(编辑 荆树蓉)