

复金兹伯格-朗道方程螺旋波外矢量场响应的数值模拟

籍万新

(西安交通大学理学院, 710049, 西安)

摘要: 针对反应扩散时序振荡系统螺旋波外力场响应缺乏定量化研究的情况, 采用龙格-库塔算法对复金兹伯格-朗道方程螺旋波解的外均匀矢量场响应进行了数值模拟. 发现在实均匀外矢量场作用下, 螺旋波斑图中心不但沿外矢量场方向做匀速直线运动, 速度为矢量场的场强, 而且还具有沿垂直于外矢量场方向的速度分量, 该速度分量是平行方向速度分量的4%. 在外均匀虚矢量场的作用下, 除了螺旋波斑图中心做匀速直线运动外, 螺旋波斑图的臂沿外矢量场方向的一侧变密, 而逆外矢量场方向的一侧变疏, 其中形变随外均匀矢量场的强度增强而变大.

关键词: 螺旋波; 斑图; 数值模拟

中图分类号: O175.29 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)10-1242-03

Numerical Simulation of Responses of Spiral Wave to External Vector Field for Complex Ginzburg-Landau Equation

Ji Wanxin

(School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: For lack of quantitative studies concerning the external force field effects on the spiral wave in oscillation reaction diffusion system, the solution of spiral wave in complex Ginzburg-Landau equation is simulated numerically with Runge-Kutta algorithm. For real uniform external vector field, it is found that the core of the spiral wave travels uniformly along the vector field with its velocity equal to the strength of the vector field, and a vertical component about 4% of the parallel component exists. The simulation shows that the core of the spiral wave moves uniformly along a straightly line under constant imaginary vector field. The arms of the spiral wave become close along the vector field and vice versa, in which the deformation of the spiral wave increases with the enlarging strength of the vector field.

Keywords: spiral wave; pattern; numerically simulation

螺旋波是存在于非线性系统的一种普遍的稳定斑图, 是研究非线性科学家关注的课题之一^[1]. 例如: 在流体的瑞利-贝纳德对流现象、液晶中的伊辛-布劳赫相变、反应扩散系统中的化学波、黏性霉菌的自组织、人体心脏中的心电信号、卵细胞钙离子波中都观察到了螺旋波^[2-4]. 人们在自然界中发现, 在外界微扰下螺旋波发生飘移和形变. 因此, 探讨螺旋波斑图的这些运动和形变的机理具有重要的意义.

Munuzuri 等人首先观察到弹性激发介质中的螺旋波中心在外力作用下发生移动^[5]. 在直流或交流外电场作用下, Steinback 等人发现了螺旋波的中心产生共振运动, 同时可以观察到螺旋波发生了畸变^[6]. 值得注意的是, 目前针对螺旋波的运动规律及其机理, 已从理论上进行了大量的探讨, 但是主要研究工作集中于激发介质系统, 而对于共振介质系统的研究尚未见到报道^[7]. 另一方面, 大多数研究结果

只是定性或半定量的,缺乏定量化的研究成果.此外,还有一些实验观测现象不能从理论上解释.

本文将研究描述瑞利-贝纳德对流和共振介质反应扩散系统等非线性过程的二维复金兹伯格-朗道方程的螺旋波对外矢量场作用下的响应,利用计算机数值模拟方法来探讨这一问题.数值模拟发现,在实均匀外矢量场作用下,螺旋波中心不但沿外矢量场方向做匀速直线运动,速度的大小为矢量场的值,而且还具有沿垂直于外矢量场方向的速度分量.此外螺旋波将发生形变,形变量与外矢量场的大小和方向之间存在着紧密的关系.

1 数值模拟与结果分析

复金兹伯格-朗道方程可表示成如下形式^[7]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1 + ib)\nabla^2 A - (1 + ic)|A|^2 A \quad (1)$$

式中: $A(x, y, t)$ 是一个复变函数,它以时间 t 和二维空间坐标 (x, y) 为自变量;参数 b 和 c 表示线性和非线性散射; ∇^2 为拉普拉斯算子.当 $b \neq c$ 时,式(1)在一定的参数范围具有稳定的螺旋波解.单臂螺旋波的解可解析地表示成^[8]

$$A(x, y, t) = F(r)\exp\{i[\sigma\theta + \Psi(r) - \omega t]\}$$

式中: r 代表以螺旋波中心为原点的径向坐标; θ 表示相应的极角; $\sigma = \pm 1$ 表示螺旋波的旋转方向,称为拓扑不变量; $F(r)$ 和 $\Psi(r)$ 是两个实变函数.在远离螺旋波中心区域($r \rightarrow \infty$) $F \approx (1 - K_0^2)^{1/2}$,并且 $\Psi(r) \approx K_0 r$,其中渐近波数 K_0 由参数 b 和 c 决定,而在螺旋波的核心中心($r \rightarrow 0$), $F \approx \Psi' \approx r$.

Gabbay等人指出,外矢量场存在时复金兹伯格-朗道方程具有如下的形式^[9]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1 + ib)\nabla^2 A - (1 + ic)|A|^2 A + \mathbf{V} \cdot \nabla A \quad (2)$$

式中: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + i\mathbf{V}_2$ 表示复变外矢量场.外矢量场可以是电场或磁场等,通常情况下 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 分别是时间和空间坐标的实变函数.

采用龙格-库塔算法对式(2)进行数值模拟,选择二维的 356×356 格点点阵,空间步长 $h_s = 0.5$,时间步长 $h_t = 0.05$,介质边界选取Von Neumann“无通量”边界条件.在数值计算中,参数 $b = -1.0$, $c = 0.5$.从复金兹伯格-朗道方程的相图可知,在这组参数的情况下,无外场的复金兹伯格-朗道方程

(式(1))具有一个顺时针($\sigma = -1$)的单臂螺旋波斑图.如图1所示,该单臂螺旋波是在给定初始条件下,经过演化时间 $t = 800$ 后获得.数值实验表明,该螺旋波斑图是稳定的.

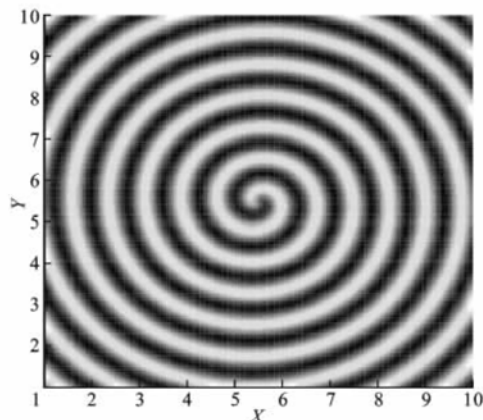


图1 稳定螺旋波斑图

为了探讨不同情况下均匀矢量场存在时的效应,我们首先考虑外矢量场为实数的情况,即 $\mathbf{V}_2 = 0$.选取外矢量场的方向沿 X 轴正方向,即 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 = V_{1X}\mathbf{e}_X$.式(2)的数值模拟结果显示,均匀实变的外矢量场使得整个斑图沿矢量场方向发生位移,位移的大小与矢量场的大小成正比.图2为加入外矢量场 $V_{1X} = -0.3$ 后, $t = 800$ 时单臂螺旋波斑图的变化.

在螺旋波形成后,选择不同 V_{1X} 进行了一系列的数值计算,其中选择存在外矢量场的加入时间间隔 $\Delta t = 800$,选择 V_{1X} 为 $0.02 \sim 0.4$,相应步长为 0.02 .在不同的 V_{1X} 情况下确定位移量,其结果如图3所示.可以看出,位移 Δx 与外矢量场的大小之间存在线性关系,直线的斜率 $k = 1/800$.根据速度的定义, $v = \Delta x / \Delta t$,得 $v = \Delta x / 800$.如果作速度 v 与 V_{1X} 的关系图,得到的将是一条斜率为1的直线,即 $v = V_{1X}$.因此,可以得出结论:螺旋波中心在外矢量场方向的速度正好是外矢量场的大小.

另一方面,在给定外矢量场大小的情况下,改变加入外矢量场时间间隔 Δt ,确定系统相应产生的位移.当选定 $V_{1X} = 0.3$ 、时间间隔 Δt 从50到800、步长为50时,数值模拟结果如图4所示,可以看出位移 Δx 与时间间隔 Δt 之间存在线性关系.这说明在外矢量场一定的情况下,螺旋波的中心做匀速直线运动,运动的速度(即图4直线的斜率)为0.3.这进一步表明螺旋波中心在外矢量场上的速度分量恰好等于外矢量场的大小.

当外矢量场为虚值时,即 $\mathbf{V}_1 = 0$,对式(2)进行模拟,其中选取 $b = -1.0$, $c = 0.5$,并且外矢量场沿

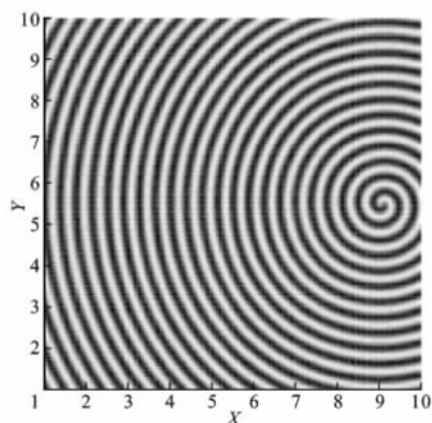
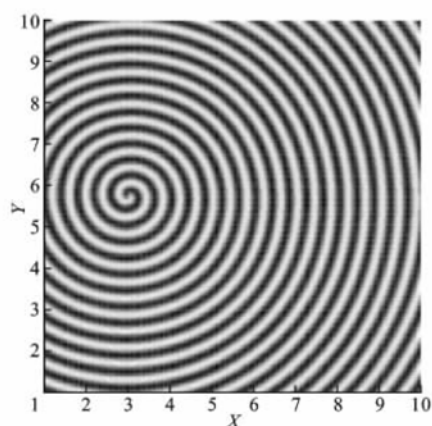
(a) 加入实矢量场前 $t=0$ 时(b) 加入实矢量场后 $t=800$ 时

图2 单壁螺旋波斑图在外实矢量场作用下的变化

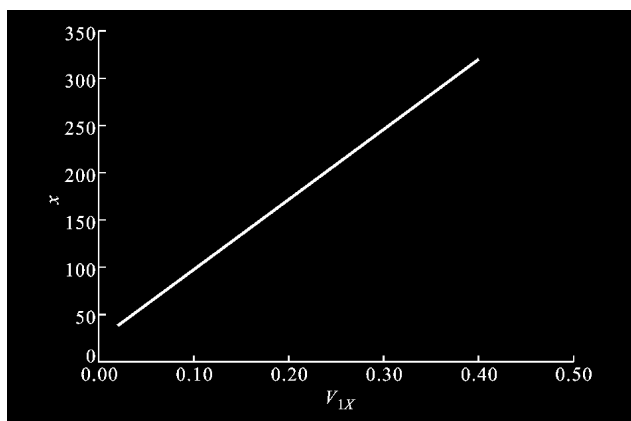


图3 实外矢量场与螺旋波中心位移的关系

X 轴方向, 即 $V_2 = V_{2X}e_X = 0.3e_X$. 数值模拟结果显示, 此时螺旋波中心位置不但发生改变, 而且发生较大范围的形变, 其中以螺旋波中心为界沿 X 轴正方向部分螺旋波变密, 而在 X 轴负方向, 螺旋波变得稀疏, 如图 5 所示. 另外还发现, 随着 V_{2X} 值的增大, 形变也越来越大, 也就是说变密的地方会更密, 而稀疏的地方会更稀疏.

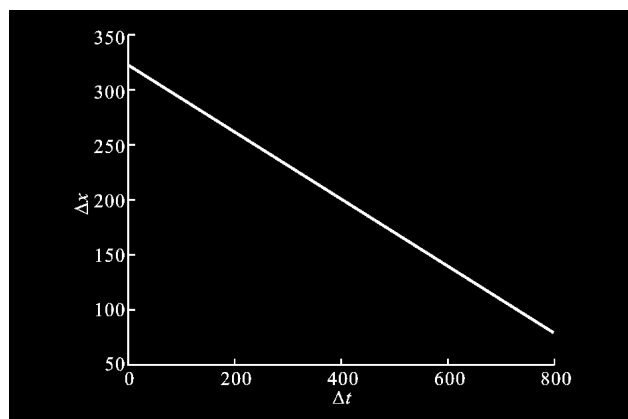


图4 给定实外矢量场时螺旋波中心位移与时间的关系

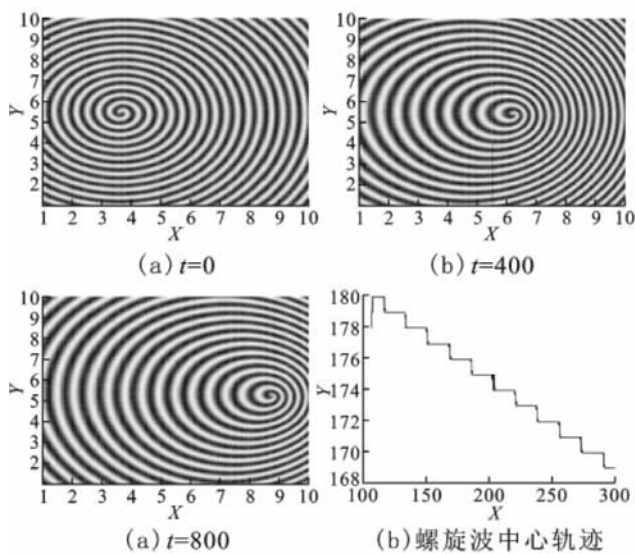


图5 虚外矢量场不同作用时间下螺旋波的形变和中心位移

2 结 论

在实均匀外矢量场作用下, 复金兹伯格-朗道方程的螺旋波中心不但沿外矢量场方向做匀速直线运动, 速度的大小为矢量场的值, 而且还具有沿垂直于外矢量场方向的速度分量, 垂直方向的速度是平行方向的速度速度的 4%. 在外均匀虚矢量场的作用下, 除了螺旋波中心做匀速直线运动外, 螺旋波的臂沿外矢量场方向的一侧变密, 而逆外矢量场方向的一侧变疏, 其中形变随外均匀矢量场的强度增强而变大.

参考文献:

- [1] Holden A V, Markus M, Othmer H G. Nonlinear wave in excitable media [M]. New York: Plenum, 1991.
- [2] Tritton D J. Physical fluid dynamics [M]. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1992.
- [3] 欧阳颀. 反应扩散系统中的斑图动力学 [M]. 上海: 上

- 海科技教育出版社, 2000.
- [4] Gray R A, Pertsov A M, Jalife J. Spatial and temporal organization during cardiac fibrillation[J]. *Nature*, 1998, 392(6671): 75-78.
- [5] Munuzuri A P, Innocenti C, Flesselles J M, et al. Elastic excitable medium[J]. *Phys Rev: E*, 1994, 50(2): R667-R670.
- [6] Steinbock O, Schütze J, Müller S C. Electric-field-induced drift and deformation of spiral waves in an excitable medium[J]. *Phys Rev Lett*, 1992, 68(2): 248-251.
- [7] Aranson I S, Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation[J]. *Rev Mod Phys*, 2002, 74(1): 99-143.
- [8] Hagan P S. Spiral waves in reaction-diffusion systems[J]. *SIAM J Appl Math*, 1982, 42(4): 762-786.
- [9] Gabbay M, Ott E, Guzdar P N. Motion of scroll wave filaments in the complex Ginzburg-Landau equation[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 78(10): 2012-2015.

(编辑 杜秀杰)