

统一屈服面空间相交问题的处理

张传庆, 周辉, 冯夏庭

(中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室, 430071, 武汉)

摘要: 提出了一种空间分区处理技术, 以解决弹塑性数值分析中多重屈服面空间相交时, 应力超出屈服面后使屈服面难以确定、继而引起塑性因子无法计算等问题. 在应力角位于 0 到 $\pi/3$ 之间时, 利用通过统一剪切屈服面交线的子午面将屈服面的外部区域划分为 2 个区域, 提出以拉伸屈服面与剪切屈服面相交而成二面角的平分面来划分这两种屈服面外部区域的方法, 从而可将屈服面外的应力空间划分成 4 个区域, 接着推导出了它们之间分界面的数学表达式, 最后提出了相应的屈服函数选择法则, 并将其增量本构格式插入 FLAC^{3D} 软件中. 通过算例的数值计算结果与解析结果的对比, 验证了此处理技术力学上的合理性和数学上的正确性.

关键词: 统一屈服面; 拉伸屈服面; 势函数; 空间分区方法

中图分类号: TU443 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)11-1330-05

Handling of Spatial Intersection of Unified Yield Surface

Zhang Chuanqing, Zhou Hui, Feng Xiating

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: A spatial zonal approach is proposed to handle the problems about determination of yield surface and plastic factor when multiple yield surfaces arise to intersect spatially in the elasto-plastic numerical analysis. The unified yield surface usually consists of twelve planes, while it contains only two shear yield planes when the stress angle is within the interval $(0, \pi/3)$. The outside of the two shear yield planes is divided into two partitions with the meridian plane passing through their intersection line. Then the angle-bisecting plane of dihedral of the tension yield plane and the shear yield plane is used to divide the outside of these yield surfaces into four partitions. The formulas are derived in detail corresponding to the interfaces among these partitions, the selection criterion of the yield functions is proposed, and the corresponding incremental constitutive model is inserted into the software FLAC^{3D}. A case about elasto-plastic analysis of a circular tunnel is presented. A comparison of the results from numerical calculation and analytical solution verifies the rationality of this method.

Keywords: unified yield surface; tension yield surface; potential function; spatial zonal approach

统一屈服准则^[1-3]是我国著名力学家俞茂宏教授于 1994 年提出的, 可以表达各种岩土材料的屈服特性, 而 FLAC^{3D} 是一个具有强大的计算分析功能、专门针对岩土工程问题开发并被广泛应用的数值分

析软件, 若能将二者结合起来, 无疑会大大促进岩土工程领域相关问题的解决. 在应力空间中, 统一屈服面由 12 个面组成. 在工程分析中, 若要同时考虑剪切屈服面和拉伸屈服面, 首先必须解决 FLAC^{3D}

中应力超出多重屈服面的处理问题.

应力超出屈服面的处理技术一直是弹塑性数值分析中的关键技术. 对于单屈服面问题, 如图 1 所示, 将超出的应力增量拉回屈服面的技术已经比较成熟^[4]. 但是, 当同一应力空间中存在多重屈服面且相交时, 要计算塑性因子及塑性势面对于应力的梯度向量, 首先就需要判断弹性应力增量(用矢量表示为 $\vec{CA}$)超出的是哪个屈服面, 应该采用哪个屈服函数与塑性势函数. FLAC^{3D}在处理 Drucker-Prager 屈服准则与拉伸屈服准则、Mohr-Coulomb 屈服准则与拉伸屈服准则时, 分别在 τ - σ 平面或 σ_1 - σ_3 平面上采用两相交屈服线的角平分线将屈服线以外的区域划分成 2 个区域, 即剪切应力区和拉伸应力区^[5], 但当屈服函数不能转化为平面应力状态来分析时, 就需要采用屈服面之间的角平分面来划分屈服面之外的应力空间.

针对 FLAC^{3D}中同时考虑统一屈服准则和拉伸屈服准则时应力超出屈服面的问题, 本文仍采用 FLAC^{3D}软件中的方法, 详细推导了这一问题的相关处理公式, 并以实例验证了此方法的正确性.

1 统一屈服面与拉伸屈服面

约定 3 个主应力的大小排序为 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. 此时, 统一屈服面的主应力表达式^[6]为

$$f_1^* = A_1\sigma_1 + B_1\sigma_2 + C_1\sigma_3 + k \quad (1)$$

$$\sigma_2 \leq [(\sigma_3 + \sigma_1) + \beta(\sigma_3 - \sigma_1)]/2$$

$$f_2^* = A_2\sigma_1 + B_2\sigma_2 + C_2\sigma_3 + k \quad (2)$$

$$\sigma_2 \geq [(\sigma_3 + \sigma_1) + \beta(\sigma_3 - \sigma_1)]/2$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}(1-\beta) - \frac{1}{3}a \\ B_1 &= \frac{1}{2}b(1-\beta) - \frac{1}{3}a \\ C_1 &= -\frac{1}{2}(1+b)(1+\beta) - \frac{1}{3}a \\ A_2 &= \frac{1}{2}(1+b)(1-\beta) - \frac{1}{3}a \\ B_2 &= -\frac{1}{2}b(1+\beta) - \frac{1}{3}a \\ C_2 &= -\frac{1}{2}(1+\beta) - \frac{1}{3}a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: b 为中间主应力效应系数, $b \in [0, 1]$; β 为正应力效应系数, $\beta \in [0, 1]$; a 为静水应力效应系数, $a \in [0, 1]$; k 为强度参数, $k = (1+b)c \cos \phi$.

拉伸屈服面的表达式为

$$f^t = \sigma_3 - \sigma_1 \quad (4)$$

式中: σ_t 为材料的抗拉强度.

在主应力空间内, 式(1)、(2)和(4)所对应的屈服面如图 2 所示. 按照主应力排序, 在图 2 的主应力空间内只能出现统一屈服面的 1/6 部分, 即 2 个相交平面, 但为使图形表达得直观, 图 2 中给出了整个剪切屈服面的图形. 至于拉伸屈服面, 图 2 只画出了式(4)所表达的部分.

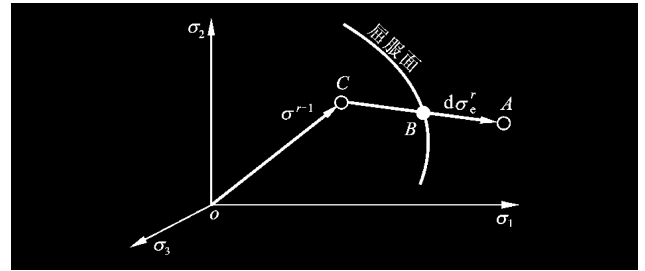


图 1 应力空间内的应力增量与屈服面

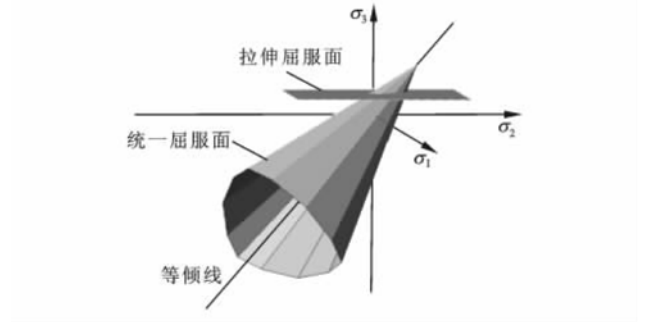


图 2 统一屈服面与拉伸屈服面

2 应力点所属应力空间区域的划分

2.1 应力角的定义

如图 3 所示, 在 π 平面上, $o'\sigma'_1$ 、 $o'\sigma'_2$ 和 $o'\sigma'_3$ 轴分别为主应力空间中应力主轴的投影. 应力点 P 的坐标为 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, 在 π 平面上的投影分别为 $((2/3)^{1/2}\sigma_1, (2/3)^{1/2}\sigma_2, (2/3)^{1/2}\sigma_3)$ ^[7]. 建立 x - y 直角坐标系, y 轴与 σ'_3 轴重合, x 轴与其正交, 则在此坐标系内, P 点的坐标 (x, y) 为

$$x = (\sigma_2 - \sigma_1)/2^{1/2} \quad (5)$$

$$y = (2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1)/6^{1/2} \quad (6)$$

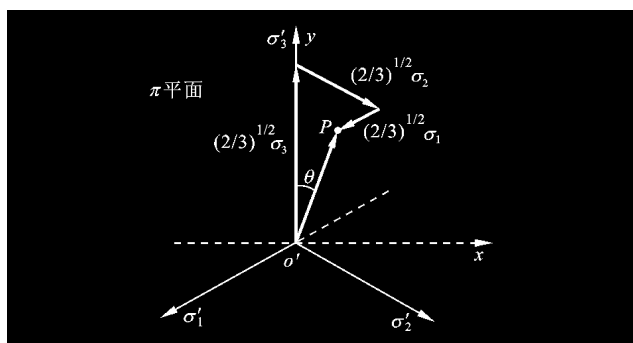
于是, 应力角 θ ^[6] 为

$$\theta = \arctan(x/y) \quad (7)$$

$$\tan \theta = \frac{x}{y} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)/2^{1/2}}{(2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1)/6^{1/2}} = \frac{3^{1/2}(\sigma_2 - \sigma_1)}{2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1} \quad (8)$$

2.2 应力空间的区域划分

在数值计算过程中, 当应力点超出屈服面时, 必须对其所超出的屈服面(剪切屈服面 1、剪切屈服面

图3 π 平面上应力角的定义

2或拉伸屈服面)进行判断(如图4所示),以便在进行应力校正时采用相对应的屈服面和塑性势面^[4].在求出3个主应力后,通常要将它们进行排序.这样,本文所进行的空间区域划分只指应力角为 $[0, \pi/3]$ 的应力空间.

由图4和图5可见,应力角为 $[0, \pi/3]$ 的屈服面外的应力空间被划分成了4个区域,根据应力点所落的不同区域即可采用不同的屈服函数和势函数.下面将分别求解这些区域分界面的函数表达式.

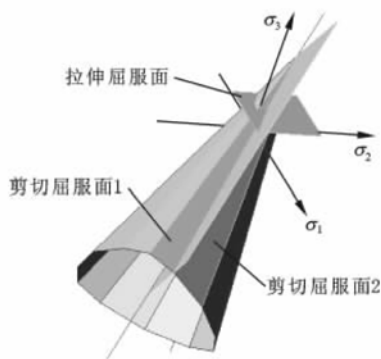


图4 剪切屈服面1与2的分界面

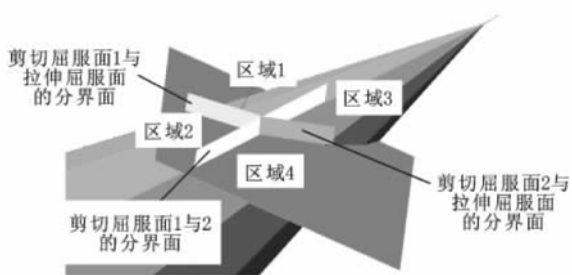


图5 屈服面外应力空间的区域划分

3 剪切屈服面1和2之间的分界面

只考虑剪切破坏,则剪切屈服面1、2外部区域的分界面为通过二者交线的子午面,即以式(9)、式

(10)中 σ_2 的大小来区分,若 σ_2 符合式(9)的条件,则此应力点位于区域1和2中,否则位于区域3和4中

$$\sigma_2 \leq [(\sigma_3 + \sigma_1) + \beta(\sigma_3 - \sigma_1)]/2 \quad (\text{区域1和2}) \quad (9)$$

$$\sigma_2 \geq [(\sigma_3 + \sigma_1) + \beta(\sigma_3 - \sigma_1)]/2 \quad (\text{区域3和4}) \quad (10)$$

将 $\sigma_2 = [(\sigma_3 + \sigma_1) + \beta(\sigma_3 - \sigma_1)]/2$ 代入上式,可求得与分界面相对应的应力角 θ_b

$$\tan \theta_b = 3^{1/2}(1 + \beta)/(3 - \beta) \quad (11)$$

于是,可根据应力角 θ_b 来划分剪切屈服面1和2之外的区域

$$0 \leq \theta \leq \theta_b \quad (\text{区域1和2}) \quad (12)$$

$$\theta_b < \theta \leq \pi/3 \quad (\text{区域3和4}) \quad (13)$$

4 剪切与拉伸屈服面之间的分界面

4.1 剪切屈服面1与拉伸屈服面之间的分界面

在数值计算中,当应力增量导致应力点在图5中的剪切屈服面1和拉伸屈服面的相交面附近超出屈服面时,必须指明它突破的是哪个屈服面,以便采用相应的屈服函数和势函数来进行塑性应变的计算和应力状态的矫正.

本文采用这两个相交面二面角的角平分面作为分界面,并区分为区域1和2(见图5).当应力点落在区域1时,采用拉伸屈服函数及相应的势函数来进行应力校正;当应力点落在区域2时,采用剪切屈服函数1及其势函数来进行应力校正.此分界面的基本求解方法为:首先求得它的法向量,然后再在剪切屈服面1和拉伸屈服面的交线上寻得交界面上的一点,从而可写出其点法式方程.

对于剪切屈服面1,其法向量为 $\mathbf{n}_1^s(A_1, B_1, C_1)$,且 $C_1 < 0$,可知指向屈服面的内侧.拉伸屈服面的法向量为 $\mathbf{n}^t(0, 0, 1)$,指向 σ_3 的正方向,如图6所示.于是,交界面的法向量必与这两个屈服面法向量的角平分向量方向平行.

向量 $\mathbf{n}_1^s$ 和 $\mathbf{n}^t$ 的夹角 γ 的余弦为

$$\cos \gamma = \frac{C_1}{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)^{1/2}} \leq 0 \quad (14)$$

角平分向量 $\mathbf{n}_1^{s,t}$ 与 $\mathbf{n}^t$ 的夹角 $\gamma/2$ 的余弦为

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^{1/2} = \left(\frac{C_1 + (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)^{1/2}}{2(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)^{1/2}} \right)^{1/2} = D_1 \quad (15)$$

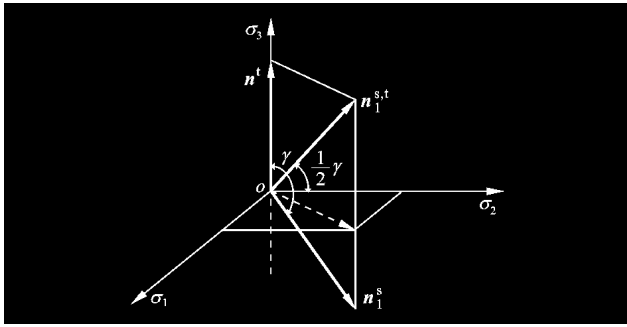


图6 角平分向量的求取

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin(\gamma/2)}{\cos(\gamma/2)} = \frac{(1-D_1^2)^{1/2}}{D_1} \geq 0 \quad (16)$$

$$C'_1 = \frac{(A_1^2 + B_1^2)^{1/2}}{\tan(\gamma/2)} \geq 0 \quad (17)$$

向量 $\mathbf{n}_1^{s,t}(A_1, B_1, C'_1)$ 即为角平分面的法向量, 指向受拉方向。

因为区域 1~4 分界面的公共线与屈服面的交点为各分界面所共有, 因此在建立点法式方程时, 只需求取这一点就可以了。此点由下列方程组求得

$$\left. \begin{aligned} f_1^s &= A_1\sigma_1 + B_1\sigma_2 + C_1\sigma_3 + k = 0 \\ f^t &= \sigma_3 - \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 &= [(\sigma_3 + \sigma_1) + \beta(\sigma_3 - \sigma_1)]/2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

最后化为 σ_1 的直线方程

$$E_1\sigma_1 + F_1\sigma_t + k = 0 \quad (19)$$

即

$$\sigma_1 = -(k + F_1\sigma_t)/E_1 \quad (20)$$

式中

$$E_1 = \frac{1}{4}(1-\beta)(2+b-b\beta) - \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}a\beta \quad (21)$$

$$F_1 = -\frac{1}{4}(1+\beta)(b\beta+2+b) - \frac{1}{6}a(1+\beta) - \frac{1}{3}a \quad (22)$$

从而可以推出交点的坐标为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^P &= -\frac{k + F_1\sigma_t}{E_1} \\ \sigma_2^P &= \frac{1}{2}\left(\sigma_t - \frac{k + F_1\sigma_t}{E_1}\right) + \frac{\beta}{2}\left(\sigma_t + \frac{k + F_1\sigma_t}{E_1}\right) \\ \sigma_3^P &= \sigma_t \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

最后, 可得角平分面的点法式方程为

$$f_1^P = A_1(\sigma_1 - \sigma_1^P) + B_1(\sigma_2 - \sigma_2^P) + C'_1(\sigma_3 - \sigma_3^P) = 0 \quad (24)$$

当 $f_1^P < 0$ 时, 应力点在区域 2, 即剪切屈服, 反之则在区域 1, 即拉伸屈服。

4.2 剪切屈服面 2 与拉伸屈服面之间的分界面

与上节相似, 采用剪切屈服面 2 与拉伸屈服面相交面二面角的角平分面作为分界面来划分其外部区域, 并区分为区域 3 和 4。当应力点落在区域 3 时, 采用拉伸屈服函数及相应的势函数来进行应力校正; 当应力点落在区域 4 时, 采用剪切屈服函数 2 及其势函数来进行应力校正。

对于剪切屈服面 2, 其法向量为 $\mathbf{n}_2^s(A_2, B_2, C_2)$, 且 $C_2 < 0$, 可知其指向屈服面的内侧。拉伸屈服面的法向量为 $\mathbf{n}^t(0, 0, 1)$, 指向 σ_3 的正方向。于是, 交界面的法向量必与这两个屈服面法向量的角平分向量方向平行。

向量 $\mathbf{n}_2^s$ 和 $\mathbf{n}^t$ 的夹角 γ' 的余弦为

$$\cos \gamma' = \frac{C_2}{(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)^{1/2}} \leq 0 \quad (25)$$

角平分向量 $\mathbf{n}_2^{s,t}$ 与 $\mathbf{n}^t$ 的夹角 $\gamma'/2$ 的余弦为

$$\cos \frac{\gamma'}{2} = \left(\frac{1 + \cos \gamma'}{2} \right)^{1/2} = \left(\frac{C_2 + (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)^{1/2}}{2(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)^{1/2}} \right)^{1/2} = D_2 \quad (26)$$

$$\tan \frac{\gamma'}{2} = \frac{\sin(\gamma'/2)}{\cos(\gamma'/2)} = \frac{(1-D_2^2)^{1/2}}{D_2} \geq 0 \quad (27)$$

$$C'_2 = \frac{(A_2^2 + B_2^2)^{1/2}}{\tan(\gamma'/2)} \geq 0 \quad (28)$$

向量 $\mathbf{n}_2^{s,t}(A_2, B_2, C'_2)$ 即为角平分面的法向量, 指向受拉方向。

利用上节求取的公共点 $(\sigma_1^P, \sigma_2^P, \sigma_3^P)$ 来建立此分界面的点法式方程

$$f_2^P = A_2(\sigma_1 - \sigma_1^P) + B_2(\sigma_2 - \sigma_2^P) + C'_2(\sigma_3 - \sigma_3^P) = 0 \quad (29)$$

5 处理方法的算例验证

通过岩土工程软件 FLAC^{3D} 的 UDM 接口, 本文将此处理技术及相应的增量本构格式插入软件中, 同时为了验证计算格式及程序代码的正确性, 分析其精度情况, 还对一个圆形隧道同时应用数值方法和解析方法^[8]进行了弹塑性求解, 并对相应求解结果进行了对比分析。

图 7 所示为一圆形隧道的计算模型, 隧道半径为 1.0 m, 地应力在 x 和 z 方向均为 30 MPa, 根据材料、隧道的几何形状和地应力的对称性, 取图示 1/4 模型进行计算。统一弹塑性本构模型的计算参数如表 1 所示。

文献[8]给出了相应的应力及位移的解析表达

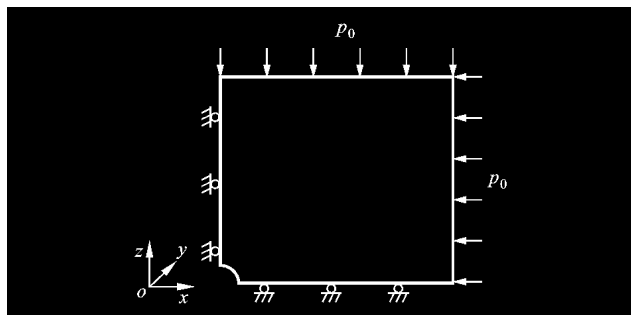


图7 隧道的计算模型

表1 计算参数

K/GPa	G/GPa	b	β	C/MPa	a	σ_t /MPa
3.9	2.8	1.0	0.5	5.975 4	0	1

K:体积模量; G:剪切模量; b:中间主应力系数; β :正应力系数; C:强度系数; a:静水应力系数; σ_t :抗拉强度。

式. 计算所得径向应力及环向应力的数值解与解析解的对比如图8所示, 可见数值解与解析解吻合较好. 径向应力的最大相对误差为0.385%, 平均相对误差为0.156%; 环向应力的最大相对误差为0.443%, 平均相对误差为0.054%. 总的看来, 这样的误差值可以满足分析工程问题的精度要求, 也说明了本文所提出的处理方法、推导的计算公式及所编制的接口程序的正确性。

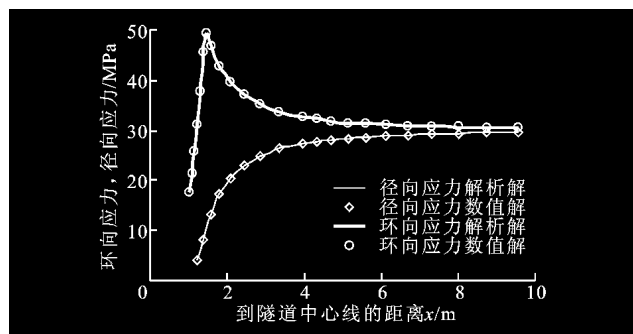


图8 径向应力及环向应力的数值解与解析解

6 结 论

在数值分析时, 若同时应用多重屈服面, 如统一屈服面和拉伸屈服面, 为了计算塑性因子 $d\lambda$ 及塑性势函数对应力分量的偏导 $\partial g / \partial \sigma_i$, 就必须判断弹性应力增量超出的是哪个屈服面, 应采用哪个屈服函数与塑性势函数. 要解决这一问题, 首要的工作就是对屈服面的应力空间进行区域划分, 求得分界面, 这样才可以根据应力点所落入的区域来选择相应的屈服函数或势函数. 本文考虑了同时应用统一剪切屈服面和拉伸屈服面的情况, 在主应力大小排序后, 或

者说在应力角为 $[0, \pi/3]$ 的应力空间内, 将屈服面外的空间划分为4个区域, 求得了各区域之间分界面的点法式方程, 并将所推导出的公式应用到大型岩土工程软件 FLAC^{3D} 中, 通过算例分析验证了公式及程序的正确性, 为基于统一强度理论的弹塑性模型与大型软件的结合铺平了道路, 不仅扩展了统一弹塑性理论的应用范围, 也增强了软件的分析功能。

参考文献:

- [1] 俞茂宏, 咎月稳, 范文, 等. 20世纪岩石强度理论的发展——纪念 Mohr-Coulomb 强度理论 100 周年[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(5): 545-550.
Yu Maohong, Zan Yuewen, Fan Wen, et al. Advances in strength theory of rock in 20th century — 100 years in memory of the Mohr-Coulomb strength theory [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(5): 545-550.
- [2] 俞茂宏, 张永强, 杨松岩. 统一强度理论的又一重要推广[J]. 西安交通大学学报, 1998, 32(12): 108-110.
Yu Maohong, Zhang Yongqiang, Yang Songyan. Another important generalization of the unified strength theory [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1998, 32(12): 108-110.
- [3] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1-9.
Yu Maohong. Unified strength theory for geomaterials and its applications [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(2): 1-9.
- [4] Owen D R J, Hinton E. Finite elements in plasticity-theory and practice [M]. Swansea: Pineridge Press, 1980: 215-268.
- [5] Itasca Consulting Group Inc. FLAC^{3D} (version 2.1) user manual [M]. Minneapolis, USA: Itasca Consulting Group Inc., 2003.
- [6] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 342-362.
- [7] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003: 17-19.
- [8] 徐拴强, 俞茂宏, 胡小荣. 基于双剪统一强度理论的地下圆形洞室稳定性研究[J]. 煤炭学报, 2003, 28(5): 522-526.
Xu Shuanqiang, Yu Maohong, Hu Xiaorong. The stability analysis of circular tunnel based on the twin unified strength theory [J]. Journal of China Coal Society, 2003, 28(5): 522-526.

(编辑 葛赵青)