

用于弹道目标跟踪的有限差分扩展卡尔曼滤波算法

巫春玲, 韩崇昭

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对目前常用的滤波算法不能同时做到精确和高效跟踪目标的缺点, 提出一种有限差分扩展卡尔曼滤波(FDEKF)算法用于再入阶段的弹道目标跟踪. 该算法应用有限差分运算得到滤波的验前、验后误差协方差矩阵, 避免了非线性函数求导运算, 以及 Jacobian 阵和 Hessian 阵的计算, 降低了计算难度, 扩大了应用范围, 增强了滤波过程的收敛性. Monte Carlo 数值仿真表明, FDEKF 算法与扩展卡尔曼滤波(EKF)算法和无味卡尔曼滤波(UKF)算法相比较, 在跟踪精度上比 EKF 算法提高了约 20%, 与 UKF 算法相当, 在计算复杂度上比 EKF 算法稍有增加, 但比 UKF 算法低约 39%. 这说明 FDEKF 算法在计算量增加不多的情况下, 滤波精度有显著提高.

关键词: 弹道目标跟踪; 扩展卡尔曼滤波; 无味卡尔曼滤波; 有限差分

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)02-0143-04

Finite-Difference Extended Kalman Filtering Algorithm for Ballistic Target Tracking

WU Chunling, HAN Chongzhao

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to overcome the disadvantage of the common used filtering algorithms that can not achieve the tracking accuracy and effectiveness at the same time, a finite-difference extending Kalman filter algorithm was proposed for ballistic target tracking problem in the re-entry phase. This algorithm uses finite differences to approximate the priori error covariance matrix and the posterior error covariance matrix, and avoids evaluations of derivatives, the Jacobian and Hessian matrices, which enlarge the application areas and improve the filtering convergence. The Monte Carlo simulations show that, compared with the extended Kalman filter (EKF) and the unscented Kalman filter (UKF), the tracking accuracy of the new algorithm is close to that of UKF, but 20% higher than that of EKF; the computational complexity of the new algorithm is close to that of EKF, but 39% lower than that of UKF. All these results show that the filtering accuracy of the proposed algorithm is improved evidently with a little increasing in computational cost.

Keywords: ballistic target tracking; extended Kalman filter; unscented Kalman filter; finite-difference

由于理论和实际应用的原因, 再入阶段的弹道目标跟踪问题^[1]已引起研究者的广泛关注. 由于弹道目标运动方程是非线性的, 因此需要建立一种随机的非线性滤波算法. 目前, 最常用的非线性滤波

算法是扩展卡尔曼滤波(EKF)算法^[1-2]、无味卡尔曼滤波(UKF)算法^[3-4]以及各种粒子滤波(PF)算法^[5-6]等. EKF 算法简单, 易于实现, 但当滤波问题高度非线性或局部线性化假设不成立时, EKF 算法

会引进很大的估计误差,导致滤波发散. UKF 算法采用了确定性抽样的方法,相比 EKF 算法来说,在计算量增加不多的情况下,滤波精度有很大提高,但当系统维数增加时,计算量也会大大增加. PF 算法在理论上有很高的估计精度,但由于运算过程复杂、耗时多而无法走向实用. 本文提出有限差分扩展卡尔曼滤波(FDEKF)算法,利用有限差分方法^[7-8]计算扩展卡尔曼滤波算法中非线性函数的偏导数运算,避免了 Jacobian 阵和 Hessian 阵的计算,算法实现简单,计算精度高. 计算机仿真表明,本文算法对再入阶段的弹道目标跟踪有效.

1 弹道目标跟踪问题

1.1 目标运动模型

弹道目标运动的离散时间非线性状态方程为

$$\mathbf{X}_{k+1} = \Psi(\mathbf{X}_k) + \mathbf{W}_k \quad (1)$$

式中: k 是非负整数; $\mathbf{X}_k = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k]^T$ 是状态向量,其中 x_k 和 y_k 是笛卡尔坐标系 (x, y) 中目标的位置, $\dot{x}_k$ 和 $\dot{y}_k$ 是目标速度; $\{\mathbf{W}_k\}, k \geq 0$ 是过程噪声序列,与量测噪声和初始状态独立,假定过程噪声序列是 0 均值的高斯白噪声,其协方差矩阵为

$$\mathbf{Q} = q \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: T 是连续两个雷达量测的时间间隔; q 是过程噪声强度参数. 过程噪声解释了所有模型中没有考虑到的力的作用,以及模型与实际偏离等造成的影响.

式(1)中的函数 $\Psi(\mathbf{X}_k)$ 由于空气阻力和地球引力的作用,所以是非线性的,表达式为

$$\Psi(\mathbf{X}_k) = \mathbf{M}\mathbf{X}_k + \mathbf{G}f(\mathbf{X}_k) + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中: g 为重力加速度,为已知常数;矩阵 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{G}$ 分别为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (4)$$

$f(\mathbf{X}_k)$ 为一个非线性函数,代表气动阻力的影响

$$f(\mathbf{X}_k) = -0.5 \frac{g}{\beta} \rho(y_k) (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2)^{1/2} \begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中: $\rho(y_k)$ 是空气密度,随着目标高度的下降按指数衰减^[3].

1.2 雷达量测模型

雷达观测量有 2 个,斜距 r 和俯仰角 ϵ ;斜距和俯仰角的量测误差标准离差分别为 σ_r 和 σ_ϵ ;雷达坐标始终为 $x_R=0, y_R=0$;将雷达量测转换到笛卡尔坐标系下为横坐标 $d=r\cos\epsilon$ 和纵坐标 $h=r\sin\epsilon$,因此量测的线性等式为

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}\mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{Z}_k = [d_k \ h_k]^T; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

式中: d_k, h_k 分别是雷达量测转换到笛卡尔坐标系下的横坐标和纵坐标; $\mathbf{H}$ 是观测矩阵; $\mathbf{V}_k$ 是笛卡尔坐标系中的量测噪声,与过程噪声和初始状态独立,为 0 均值的高斯白噪声,其协方差矩阵^[9]为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & \sigma_{dh} \\ \sigma_{dh} & \sigma_h^2 \end{bmatrix}$$

它的各个元素分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_d^2 &= \sigma_r^2 \cos^2(\epsilon) + r^2 \sigma_\epsilon^2 \sin^2(\epsilon) \\ \sigma_h^2 &= \sigma_r^2 \sin^2(\epsilon) + r^2 \sigma_\epsilon^2 \cos^2(\epsilon) \\ \sigma_{dh} &= (\sigma_r^2 - r^2 \sigma_\epsilon^2) \sin(\epsilon) \cos(\epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: $\sigma_d^2, \sigma_h^2, \sigma_{dh}$ 分别是笛卡尔坐标系中的量测误差方差和它们的互协方差. 对于所有的实际应用的目的,这是一个很好的近似,大大简化了跟踪算法,否则必须考虑量测等式的非线性.

2 跟踪滤波算法

2.1 扩展卡尔曼滤波算法

对于本文的再入阶段的弹道目标运动模型,给定直到 k 时刻的所有量测对目标的状态估计为 $\hat{\mathbf{X}}_{k/k}$,相应的估计误差协方差阵为 $\mathbf{P}_{k/k}$,则扩展卡尔曼滤波的单步实现流程如下:

(1)滤波初始化, $k=0$ 时刻,目标的状态估计为 $\hat{\mathbf{X}}_{0/0} = \hat{\mathbf{X}}_0$,对应的误差协方差矩阵为 $\mathbf{P}_{0/0} = \mathbf{P}_0$;

(2) $k+1$ 时刻的状态预测和相应的误差协方差矩阵为

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{X}}_{k/k} + \mathbf{G}f_k(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}) + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = (\mathbf{M} + \mathbf{G}\mathbf{F}_k)\mathbf{P}_{k/k}(\mathbf{M} + \mathbf{G}\mathbf{F}_k)^T + \mathbf{Q} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{F}_k$ 是非线性函数 $f_k(\mathbf{X}_k)$ 的 Jacobian 矩阵,取前一时刻的状态估计 $\hat{\mathbf{X}}_{k/k}$ 所得到的值,即

$$\mathbf{F}_k = [\nabla f_k^T(\mathbf{X}_k)]^T \Big|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k}}$$

(3)量测预测为

$$\hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} \quad (9)$$

(4)卡尔曼增益为

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_{k+1/k}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (10)$$

(5)在给定直到 $k+1$ 时刻的所有量测时,对应 $k+1$ 时刻的状态估计及其估计误差协方差阵为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} &= \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{Z}_{k+1} - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k}) \\ \mathbf{P}_{k+1/k+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})\mathbf{P}_{k+1/k} \end{aligned} \quad (11)$$

2.2 Unscented 卡尔曼滤波算法

Unscented 卡尔曼滤波(UKF)算法是基于无味变换(UT)方法^[4-5]发展起来的. UKF 使用真实的非线性状态模型或量测等式来近似状态向量的概率密度函数. 这个密度仍旧是高斯的,是通过一套确定性抽样的粒子点(Sigma 点)给定的. Sigma 点完全捕获了高斯密度的均值和协方差,当这些 Sigma 点通过非线性系统传播时,捕获到后验的均值和协方差,对任何非线性,此准确度可达到二阶. UKF 的单步实现流程如下:

(1)滤波初始化方法同 EKF;

(2) 计算 $2n_X+1$ 个 Sigma 点 χ_i 和相应的标量权重 W_i ,其中 n_X 为状态维数

$$W_0 = \frac{\alpha}{(n_X + \alpha)} \quad (12)$$

$$W_i = \frac{1}{[2(n_X + 1)]} \quad i = 1, \dots, 2n_X \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \chi_k &= [\hat{\mathbf{X}}_{k/k}, \hat{\mathbf{X}}_{k/k} + (((n_X + \tau)\mathbf{P}_{k/k})^{1/2})_i, \\ &\quad \hat{\mathbf{X}}_{k/k} - (((n_X + \tau)\mathbf{P}_{k/k})^{1/2})_i] \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $((n_X + \tau)\mathbf{P}_{k/k})^{1/2}$ 是平方根矩阵 $((n_X + \tau)\mathbf{P}_{k/k})^{1/2}$ 的第 i 行或列, α 是一个标量参数;

(3)使用非线性状态等式(1)传播这些 sigma 点

$$\chi_{k+1/k} = \Psi(\chi_k) \quad (15)$$

(4)通过对 sigma 点 $\chi_{k+1/k}$ 和权重 W_i 的加权求和,得到预测状态的均值和协方差阵

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} &= \sum_{i=0}^{2n_X} W_i \chi_{k+1/k}(i) \\ \mathbf{P}_{k+1/k} &= \mathbf{Q} + \sum_{i=0}^{2n_X} W_i (\chi_{k+1/k}(i) - \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}) \cdot \\ &\quad (\chi_{k+1/k}(i) - \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k})^T \end{aligned} \quad (16)$$

(5)预测量测 sigma 点为

$$\xi_{k+1/k} = \mathbf{H}\chi_{k+1/k} \quad (17)$$

(6)预测量测及其协方差阵为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k} &= \sum_{i=0}^{2n_X} W_i \xi_{k+1/k}(i) \\ \mathbf{P}_{ZZ} &= \mathbf{R} + \sum_{i=0}^{2n_X} W_i (\xi_{k+1/k}(i) - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k}) \cdot \\ &\quad (\xi_{k+1/k}(i) - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k})^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{XZ} &= \sum_{i=0}^{2n_X} W_i (\chi_{k+1/k}(i) - \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}) \cdot \\ &\quad (\xi_{k+1/k}(i) - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k})^T \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\mathbf{P}_{ZZ}$ 和 $\mathbf{P}_{XZ}$ 分别是预测量测的误差协方差矩阵和量测与状态变量的互协方差矩阵.

(7)UKF 增益矩阵及 $k+1$ 时刻的估计值及其估计误差协方差阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{XZ}\mathbf{P}_{ZZ}^{-1} \\ \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} &= \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{Z}_{k+1} - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k}) \\ \mathbf{P}_{k+1/k+1} &= \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{P}_{ZZ}^{-1}\mathbf{K}_{k+1}^T \end{aligned} \quad (19)$$

2.3 有限差分扩展卡尔曼滤波算法

有限差分的思想最早由 Schei^[7]提出,该算法的理论基础是,采用多项式近似技术和一阶中心差分法计算非线性函数的偏导数,它具有二阶非线性近似的能力. 设非线性函数 $y=f(x)$,则其在 $x=\bar{x}$ 处的二阶有限中心差分展开为

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'_{DD}(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''_{DD}(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} f'_{DD}(\bar{x}) &= \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} \\ f''_{DD}(\bar{x}) &= \frac{f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}-h) - 2f(\bar{x})}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中 h 是区间长度参数; $f(\bar{x})$ 为 $f(x)$ 在 $x=\bar{x}$ 处的取值; $f'_{DD}(\bar{x})$ 为展开式一阶项的导数; $\frac{f''_{DD}(\bar{x})}{2!}$ 为二阶项的系数;下标 DD 代表用差分的方法求解得到的系数.

式(20)用 Taylor 级数展开后为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + \\ &\quad \left(\frac{f^{(3)}(\bar{x})}{3!}h^2 + \frac{f^{(5)}(\bar{x})}{5!}h^4 + \dots \right)(x - \bar{x}) + \\ &\quad \left(\frac{f^{(4)}(\bar{x})}{4!}h^2 + \frac{f^{(6)}(\bar{x})}{6!}h^4 + \dots \right)(x - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (22)$$

比较式(21)、式(22)可以看出,式(22)右边的前3项与二阶 Taylor 展开式相同,后2项对应高阶项,其精度由 h 控制. 显然,用中心差分代替一阶、二阶导数得到展开式的精度高于一般二阶 Taylor 级数的精度,而且适用于不同非线性函数. 有限差分扩展卡尔曼滤波的单步实现流程如下.

(1)滤波初始化方法同 EKF,引进如下4个矩阵的 Cholesky 分解

$$\mathbf{P}_{k/k} = \hat{\mathbf{S}}_X \hat{\mathbf{S}}_X^T; \quad \mathbf{P}_{k+1/k} = \bar{\mathbf{S}}_X \bar{\mathbf{S}}_X^T$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}_W \mathbf{S}_W^T; \quad \mathbf{R} = \mathbf{S}_V \mathbf{S}_V^T$$

(2) 状态一步预测

$$\mathbf{X}_{k+1/k} = \boldsymbol{\Psi}(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}) = \mathbf{M}\hat{\mathbf{X}}_{k/k} + \mathbf{G}f_k(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}) + \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (23)$$

(3) 预测误差协方差矩阵

首先运用一阶中心差分法近似计算预测误差协方差矩阵的 Cholesky 分解为

$$\bar{\mathbf{S}}_X(i, j) = \left\{ \frac{\boldsymbol{\Psi}_i(\hat{\mathbf{X}}_{k/k} + h\hat{\mathbf{S}}_{X,j}) - \boldsymbol{\Psi}_i(\hat{\mathbf{X}}_{k/k} - h\hat{\mathbf{S}}_{X,j})}{2h} \right\} \\ j = 1, 2, \dots, n_X \\ \mathbf{P}_{k+1/k} = \bar{\mathbf{S}}_X \bar{\mathbf{S}}_X^T + \mathbf{Q} \quad (24)$$

式中: h 是步长的调节系数, 近似设定 $h = 3^{\frac{1}{2}}$ (对高斯分布, 它是最优的).

(4) 量测预测为

$$\hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} \quad (25)$$

(5) 滤波增益为

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (26)$$

(6) 滤波估计和估计误差协方差阵

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} + \mathbf{K}(\mathbf{Z}_{k+1} - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1/k}) \\ \mathbf{P}_{k+1/k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}_{k+1/k} \quad (27)$$

(7) 估计误差的 Cholesky 分解为

$$\hat{\mathbf{S}}_X(k+1/k+1) = \{\text{chol}(\mathbf{P}_{k+1/k+1})\}^T \quad (28)$$

3 仿真实验

设定扫描周期 $T=2$ s, 雷达量测的伪距误差标准离差 $\sigma_r=100$ m, 俯仰角误差标准离差 $\sigma_e=0.05$ rad, 目标弹道系数 $\beta=40\,000$ kg/(m·s²). 初始状态 $\mathbf{X}_0$ 是高斯随机向量, 其均值 $\mathbf{m}_0 = [232\,000, 2\,290\cos(190^\circ), 88\,000, 2\,290\sin(190^\circ)]$, 位置的单位为 m, 速度单位为 m/s; 方差 $\mathbf{C}_{X_0} = \text{diag}([1\,000^2, 20^2, 1\,000^2, 20^2])$, 仿真目标跟踪步长为 120, 运行 100 次蒙特卡罗仿真. 假定目标检测概率为 1, 雷达虚警概率为 0.

将本文的 FDEKF 算法分别与 EKF 和 UKF 算法相比较, 它们的位置和速度的均方根误差 (分别表示为 E_P 和 E_V) 如图 1、图 2 所示. 位置与速度的均方根误差的平均值 (分别表示为 $\bar{E}_P$ 和 $\bar{E}_V$) 及计算时间的平均值 (表示为 $\bar{t}$) 如表 1 所示. 由图 1 和图 2 可以看出, FDEKF 算法的位置均方根误差和速度均方根误差均与 UKF 算法相当, 比 EKF 算法的小, 表明 FDEKF 算法的跟踪精度接近于 UKF 算法, 比 EKF 算法的跟踪精度高. 从表 1 也可以看

出, 在位置和速度的均方根误差上, FDEKF 算法比 EKF 算法约有 25% 的减小, 而 100 次蒙特卡罗仿真的平均计算时间两者则比较接近.

表 1 3 种算法的平均跟踪误差及平均计算时间比较

滤波算法	$\bar{E}_P/\text{m}$	$\bar{E}_V/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\bar{t}/\text{s}$
EKF	51.331 7	5.194 7	0.030 7
UKF	40.443 1	3.863 0	0.070 2
FDEKF	41.167 5	3.989 9	0.038 7

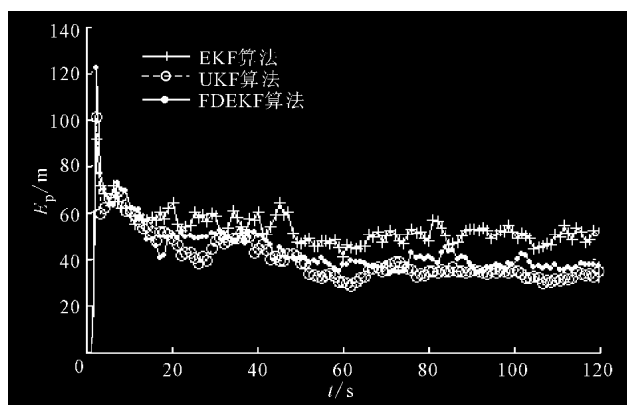


图 1 3 种算法的位置均方根误差比较

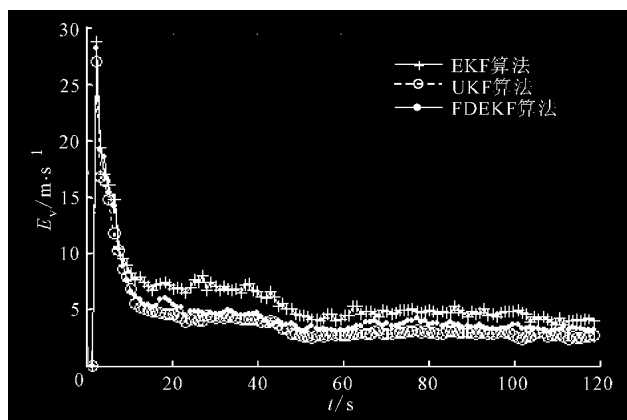


图 2 3 种算法的速度均方根误差比较

4 结束语

研究了二维再入阶段的弹道目标跟踪问题, 比较了 EKF、UKF 和 FDEKF 3 种次优非线性滤波算法. 针对本文的非线性估计问题, 从跟踪准确性、计算复杂度等方面比较了它们的性能. 仿真结果表明: FDEKF 算法在跟踪准确性上接近于 UKF 算法, 比 EKF 算法约提高约 25%; 在计算复杂性上 FDEKF 算法比 EKF 算法稍大, 几乎接近, 比 UKF 约低 39%, 表明 FDEKF 算法是研究再入阶段弹道目标状态估计的有效算法.

参考文献:

- [1] LI Xiaorong, JILKOV V P. A survey of maneuvering target tracking: Part II: ballistic target models [C]// Proc 2001 SPIE Conf on Signal and Data Processing of Small Targets. San Diego, USA: The International Society for Optical Engineering, 2001: 559-581.
- [2] COSTA P. Adaptive model architecture and extended Kalman-Bucy filters [J]. IEEE Trans Aerospace and Electronic Systems, 1994, 30(2): 525-533.
- [3] FARINA A, BENVENUTI D, RISTIC B. Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters [J]. IEEE Trans Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(3): 854-867.
- [4] JULIER S J, UHLMANN J, DURRANT-WHYTE H F. A new method for nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators [J]. IEEE Trans Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [5] JULIER S, UHLMANN J. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401-422.
- [6] BRUNO M G S, PAVLOV A. A density-assisted particle filter algorithm for target tracking with unknown ballistic coefficient [C]// Proc ICASSP-05, Piscataway, USA: IEEE, 2005: 5-8.
- [7] SCHEI T S. A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithm [J]. Automatica, 1997, 33(11): 2053-2058.
- [8] ITO K, XIONG K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [J]. Automatica, 2000, 45(5): 910-927.
- [9] FARINA A, STUDER F A. Radar data processing [M]// Introduction and Tracking: I. New York: Researches Studies Press, 1985.

(编辑 刘杨)