

# 多输入多输出系统中基于多级维纳滤波的均衡算法

任品毅, 权良辉

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

**摘要:** 基于多级维纳滤波器, 提出了一种多输入多输出系统中的降秩自适应均衡算法. 该算法利用多级维纳滤波器得到一组子空间基向量, 通过子空间投影, 把均衡器输出限定在低维子空间内, 从而降低了自适应均衡的迭代复杂度, 加快了收敛速度. 理论分析和仿真表明, 降秩均衡算法有效地提高了均衡器的收敛速度, 降低了计算复杂度, 并在多级维纳滤波器的级数不超过 10 的情况下, 能达到近似满秩均方误差性能.

**关键词:** 多输入多输出系统; 自适应均衡; 降秩

**中图分类号:** TN911 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)02-0218-04

## Adaptive Reduced-Rank Linear Equalization of Multiple Input Multiple Output Frequency Selective Channels Based on Multistage Wiener Filter

REN Pinyi QUAN Lianghui

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** Based on multistage Wiener filter, an reduced-rank adaptive equalizer for multiple input multiple output systems was proposed. The proposed algorithm uses the multistage Wiener filter to compute the base vectors of a subspace, and the output of the equalizer is then restricted in the lower-dimensional subspace by projecting input vectors into the subspace. Thus, the computational complexity is reduced and the convergence rate is increased. Theoretical analysis and simulation results show that the convergence rate of the proposed method is significantly faster and the computational complexity is much lower than existing adaptive algorithms. The proposed algorithm can achieve near full-rank mean square error performance with filter rank no more than 10.

**Keywords:** multiple input multiple output system; adaptive equalization; reduced rank

在多输入多输出(MIMO)均衡算法中, 计算复杂度和收敛速度是衡量算法性能的两个重要因素. 所以, 均衡器的设计目标就是以最少的抽头数, 达到快速和稳定的收敛.

降秩滤波算法的本质是把接收信号矢量向低维子空间投影, 使得滤波器系数最优化在子空间内进行, 这样大大降低了接收机的复杂度, 加快了算法的

收敛速度. 常用的降秩算法包括主分量分析法<sup>[1]</sup>、互谱测度法<sup>[1]</sup>和多级维纳滤波器<sup>[2]</sup>. 主分量分析法与互谱测度法都是基于特征值分解的降秩算法, 计算复杂度很高. 多级维纳滤波器通过一系列更新过程得到降秩子空间的基向量, 计算复杂度低, 且收敛速度快, 可以应用在小样本支撑环境中. 多级维纳滤波器的优点使其获得广泛的应用, Hoing 等人<sup>[3-4]</sup>把多

级维纳滤波器应用在异步 CDMA 系统中<sup>[3-4]</sup>,有效地抑制了多址干扰,文献[5-6]介绍了基于多级维纳滤波器(MSWF)的降秩均衡算法,但研究仅限于平坦衰落信道.文献[7]研究了频率选择性信道中单输入单输出(SISO)与 MIMO 系统中降秩均衡算法的性能,但没有对 MSWF 的具体应用进行探讨.

本文研究了基于多级维纳滤波器的降秩最小递归二乘(RLS)均衡算法,分析了降秩均衡算法的计算复杂度,并证明了最大输出信干噪比与最小均方误差的等价关系.降秩均衡算法的收敛速度与输出信干噪比通过仿真分析给出.

## 1 系统模型

对于发射天线数为  $M$ 、接收天线数为  $N$  的频率选择性 MIMO 系统, $k$  时刻发送信号矢量为  $s(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_M(k)]^T$ ,信道脉冲响应<sup>[8]</sup>

$$\mathbf{H}(z^{-1}) = \sum_{l=0}^L \mathbf{H}_l z^{-l} \quad (1)$$

式中: $L+1$  是信道的有效抽头数; $\{\mathbf{H}_l\}$  是对应于时延  $l=0, \dots, L$  的  $N \times M$  维 MIMO 信道矩阵. $k$  时刻  $N$  维接收信号矢量  $\mathbf{y}(k) = [y_1(k) \ y_2(k) \ \dots \ y_N(k)]^T$  为

$$\mathbf{y}(k) = \sum_{l=0}^L \mathbf{H}_l \mathbf{s}(k-l) + \mathbf{n}(k) \quad (2)$$

式中: $\mathbf{n}(k) = [n_1(k) \ n_2(k) \ \dots \ n_N(k)]^T$  为  $N$  维独立同分布的加性复高斯白噪声过程.

将式(2)描述的接收信号向量写成矩阵相乘的形式.令

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \dots & \mathbf{H}_L & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \dots & \mathbf{H}_L & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \dots & \mathbf{H}_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \dots & \mathbf{H}_L & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3)$$

并且

$$\bar{\mathbf{s}}(k) = [\mathbf{s}^T(k) \ \dots \ \mathbf{s}^T(k - N_f - L)]^T \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = [\mathbf{y}^T(k) \ \mathbf{y}^T(k-1) \ \dots \ \mathbf{y}^T(k - N_f)]^T \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{n}}(k) = [\mathbf{n}^T(k) \ \dots \ \mathbf{n}^T(k - N_f)]^T \quad (6)$$

于是得到

$$\mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{H}}(k) \bar{\mathbf{s}}(k) + \bar{\mathbf{n}}(k) \quad (7)$$

式中: $N_f$  为均衡器处理数据的长度.

## 2 多级维纳滤波器

多级维纳滤波器是由 Goldstein 等人<sup>[2]</sup>提出的,其结构如图 1 所示.图中  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_N$  称为标准化互相关矢量,是期望信号与观测信号矢量的互相关向量方向上的归一化矢量. $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_N$  称为阻塞矩阵,满足  $\mathbf{B}_i \mathbf{h}_i = \mathbf{0}$ ,  $i=1, \dots, N$ .阻塞矩阵的选取不是惟一的,但在某些情况下, $\mathbf{B}_i$  选择不当会造成数值的不稳定性.文献[3]指出,阻塞矩阵的最佳选择是  $\mathbf{h}_i$  的正交投影矩阵  $\mathbf{B}_i = \mathbf{I} - \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H$ ,此时每一步分解  $\mathbf{h}_i$  都是  $N$  维的向量, $\mathbf{B}_i$  为  $N \times N$  维矩阵,但  $\mathbf{B}_i$  的秩为  $N-i$ .

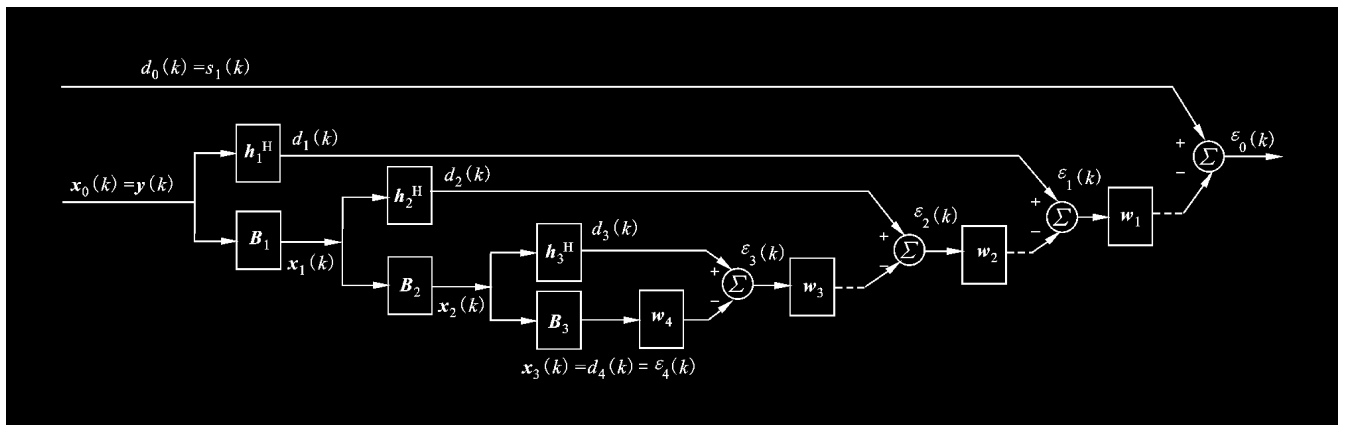
多级维纳滤波器可以用前向、后向递归方程描述.递归方程由一系列前向正交分解与后向标量维纳滤波过程组成.前向递归方程每一步把相应的输入矢量分解成为标量期望信号与降秩观测矢量,后向递归方程求解一组标量维纳方程.在多级滤波器第  $D(D \leq N)$  级截断,即得到降秩的多级维纳滤波器,若  $D=N$ ,多级维纳滤波器等价于满秩的维纳滤波器.

$N$  维观测信号  $\mathbf{x}_0(k)$  经过  $D$  级前向递归方程后变成  $D$  维期望信号

$$\tilde{\mathbf{d}}(k) = \mathbf{T}^{(D),H} \mathbf{x}_0(k) =$$

$$[d_1(k) \ d_2(k) \ \dots \ d_D(k)]^T \quad (8)$$

$$\min_{\mathbf{w} \in \text{span}(\mathbf{T}^{(D)})} E \{ |\mathbf{d}_0(k) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}_0(k)|^2 \} \quad (9)$$



式中

$$\mathbf{T}^{(D)} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{D-1} \prod_{i=D-2}^1 \mathbf{B}_i & \mathbf{h}_D \prod_{i=D-1}^1 \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\text{span}\{\mathbf{T}^{(D)}\}$ 表示由 $\mathbf{T}^{(D)}$ 各列向量张成的子空间.于是,后向递归方程相当于在该子空间内极小化代价函数.

### 3 基于多级维纳滤波器的降秩自适应MIMO线性均衡

基于多级维纳滤波器的降秩RLS均衡算法与RLS<sup>[9]</sup>算法类似.在降秩RLS算法中,所要解决的问题是归一化互相关矢量与阻塞矩阵的更新.以 $s_1$ 为参考信号,遗忘因子为 $\lambda$ ,在时刻 $k$ ,令多级维纳滤波器输入 $\mathbf{x}_0(k) = \mathbf{y}(k)$ ,对 $i=1, \dots, D$ 应用前向递推方程,有

$$\mathbf{h}_1(k) = \bar{\mathbf{y}}(k) s_1^*(k) + \lambda \mathbf{h}_1(k-1) \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_1(k) = \mathbf{I} - \mathbf{h}_1(k) \mathbf{h}_1^H(k) \quad (12)$$

$$d_i(k) = \mathbf{h}_i^H(k) \mathbf{x}_{i-1}(k) \quad (13)$$

$$\mathbf{x}_i(k) = \mathbf{B}_i(k) \mathbf{x}_{i-1}(k) \quad (14)$$

$$\mathbf{h}_{i+1}(k) = \mathbf{x}_i(k) d_i^*(k) + \lambda \mathbf{h}_{i+1}(k-1) \quad (15)$$

$$\mathbf{B}_{i+1}(k) = \mathbf{I} - \mathbf{h}_{i+1}(k) \mathbf{h}_{i+1}^H(k) \quad (16)$$

式中:上标 $*$ 表示共轭.

对 $i=D, \dots, 1$ 应用后向递推方程,有

$$d_D(k) = \varepsilon_D(k) \quad (17)$$

$$w_i(k) = \frac{\varepsilon_i(k) d_{i-1}^*(k)}{|\varepsilon_i(k)|^2} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{i-1}(k) = d_{i-1}(k) - w_i^* \varepsilon_i(k) \quad (19)$$

均衡器输出为

$$s_1(k) = w_1^*(k) \varepsilon_1(k) \quad (20)$$

## 4 算法性能分析

### 4.1 输出信干噪比分析

输出信干噪比(信干噪比)是接收机性能的一项重要指标,对应于维纳滤波器,线性加权向量 $\mathbf{w}_1$ 对应的输出信干噪比定义为

$$R_{\text{SIN}} = \frac{|\mathbf{w}_1^H \mathbf{h}_1|^2}{\mathbf{w}_1^H \mathbf{R}_1 \mathbf{w}_1} \quad (21)$$

式中: $\mathbf{h}_1 = E[\bar{\mathbf{y}} s_1]$ 是收发信号之间的互相关向量;

$\mathbf{R}_1 = \sum_{i=2}^M \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + \sigma^2 \mathbf{I}$ 是干扰加噪声的协方差矩阵.令

$\mathbf{A} = \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_1^H$ ,并定义

$$R(\mathbf{w}_1) = \frac{\mathbf{w}_1^H \mathbf{A} \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1^H \mathbf{R}_1 \mathbf{w}_1} \quad (22)$$

则 $\max\{R_{\text{SIN}}\}$ 可以看成关于矩阵束 $(\mathbf{A}, \mathbf{R}_1)$ 的广义Rayleigh熵 $R(\mathbf{w}_1)$ 最大化问题.

令 $\mathbf{R} = E[\bar{\mathbf{y}} \mathbf{y}^H]$ ,并且令 $\gamma = \mathbf{h}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}_1$ ,于是可以得到

$$\mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}_1 = \frac{\gamma}{1-\gamma} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}_1 \quad (23)$$

根据广义Rayleigh熵取最大值的条件<sup>[9]</sup>,联合式(23)可得 $\max\{R_{\text{SIN}}\}$ 与 $\min\{E_{\text{MSE}}\}$ 是等价的

$$\max\{R_{\text{SIN}}\} = \mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{h}_1 = E_{\text{MSE}}^{-1} - 1 \quad (24)$$

有了满秩维纳滤波器输出信干噪比的表达式,很容易得出 $D$ 级多级维纳滤波器输出信干噪比的表达式,如下所示

$$R_{\text{SIN}}^{(D)} = \mathbf{h}_1^H \mathbf{T}^{(D),H} (\mathbf{T}^{(D)} \mathbf{R}_1 \mathbf{T}^{(D),H})^{-1} \mathbf{T}^{(D)} \mathbf{h}_1 \quad (25)$$

### 4.2 计算复杂度分析

多级维纳滤波器所有运算均是矢量相乘运算,运算量小,在单发射天线的情况下,每一级匹配滤波器所需要的运算量是 $O(N[N_f+1])$ ,所以降秩RLS算法每一次更新的计算复杂度是 $O(MDN[N_f+1])$ ,其中 $D$ 表示多级维纳滤波器的级数.常规的RLS均衡算法每一次更新的计算复杂度是 $O([NN_f+N]^2)$ .

## 5 仿真结果及分析

仿真参数:发射天线 $M=4$ ,接收天线 $N=8$ ;调制方式为BPSK;信道为多径瑞利衰落信道,多径个数 $L=3$ ;均衡器处理数据的长度 $N_f=3$ ;固定接收端平均信噪比 $R_{\text{SN}}=10$  dB,遗忘因子 $\lambda=0.996$ .

### 5.1 降秩RLS算法收敛速度分析

本仿真主要比较降秩RLS算法与满秩RLS自适应算法的收敛速度,两种算法的均方误差随迭代次数的变化曲线如图2所示.

算法的收敛速度是由算法搜索空间的维数决定的,满秩RLS算法在整个接收信号空间内搜索最优解,当接收天线比较多时,收敛速度比较慢,而降秩RLS算法通过子空间投影,大大降低了搜索的范围,加快了算法的收敛速度,投影子空间维数越低,收敛速度越快.然而,降秩RLS算法只能在低维子空间内寻找局部最优点,所以其MSE性能比满秩RLS算法的MSE性能要差,这从图2可以看出.

### 5.2 降秩均衡算法输出信干噪比分析

本文仿真主要考察收发天线数分别取不同值时,降秩算法的输出信干噪比随多级维纳滤波器级数变化的关系,仿真结果如图3、图4所示.

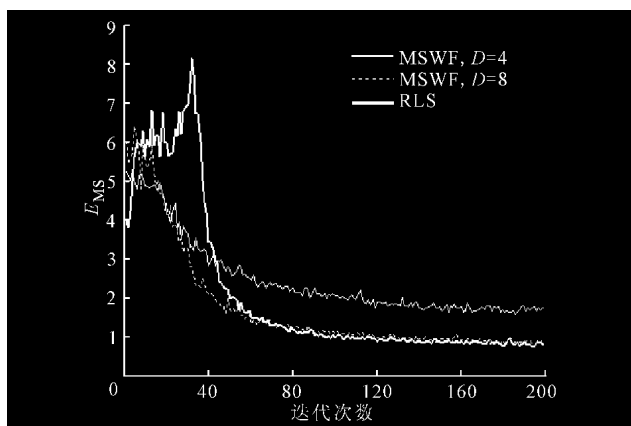
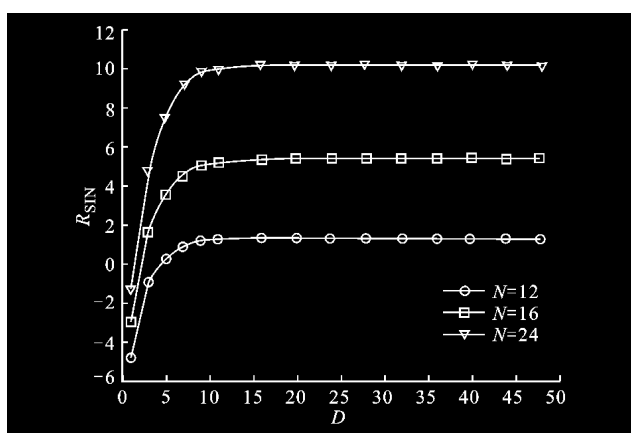
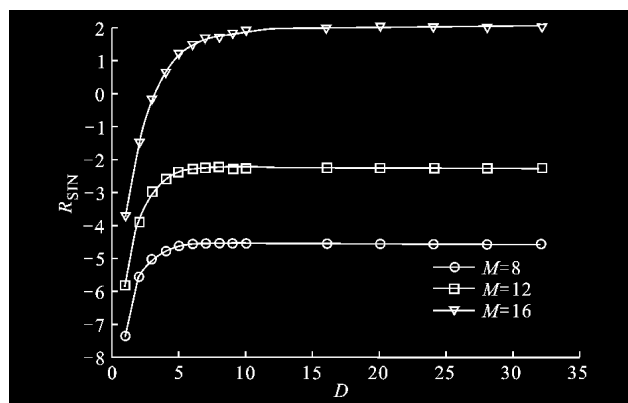


图2 降秩RLS算法与满秩RLS算法收敛速度比较

图3  $M=8$  时 MSWF 的输出信干噪比随  $D$  的变化曲线

从图3可以看出,达到满秩的输出信干噪比性能所需的必要级数  $D$  基本不随着接收天线的增加而变化, $D=10$  时即达到了满秩的输出信干噪比性能。究其原因,当接收天线数目很多时,接收信号矢量存在很大的冗余,多级维纳滤波器通过一系列的正交分解,找到一个低维子空间,使得该子空间包含了大部分信号能量,从而使子空间内的解能很好地近似满秩维纳解。Honig 在文献[3]中通过仿真的方法给出了类似的结论,指出 CDMA 系统中为取得满秩输出信干噪比性能,多级维纳滤波器所需的级数不随着用户数  $K$  和扩频序列长度  $N$  变化, $D=8$  时就可近似达到满秩输出信干噪比性能。

图4给出了发射天线数目  $M$  取不同值时,多级维纳滤波器输出信干噪比随级数  $D$  的变化曲线。从图中可以看出, $D=8$  时也近似达到了满秩信干噪比性能,当  $D>8$  时输出信干噪比曲线已近似平缓,这验证了文献[3]中的结论同样适用于 MIMO 系统,即  $D=8$  时,多级维纳滤波器能近似达到了满秩的

图4  $N=12$  时 MSWF 的输出信干噪比随  $D$  的变化曲线

输出信干噪比性能,并为取得满秩输出信干噪比性能所需的必要级数不随收发天线数增大而变化。

## 6 结 论

针对现有自适应线性均衡算法收敛速度慢、复杂度高等问题,本文研究了基于多级维纳滤波器的降秩自适应均衡算法,并分析了算法的性能,得出如下主要结论:

(1)与现有的 MIMO 自适应均衡算法相比,基于多级维纳滤波器的自适应均衡算法有效地提高了均衡器的收敛速度,降低了计算复杂度;

(2)降秩均衡算法可以在降秩子空间的维数非常低的情况下达到近似满秩的输出信干噪比性能,且收敛速度不受收发天线数目的影响。

## 参考文献:

- [1] GOLDSTEIN J S, REED I S. Reduced rank adaptive filtering [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1997, 45(2): 429-496.
- [2] GOLDSTEIN J S, REED I S, SCHARF L L. A multistage representation of the Wiener filter based on orthogonal projections [J]. IEEE Transaction on Information Theory, 1998, 44(7): 2943-2959.
- [3] HONIG M L, XIAO Weimin. Performance of reduced-rank linear interference suppression [J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2001, 47(5): 1928-1946.
- [4] HONIG M L, GOLDSTEIN J S. Adaptive reduced-rank interference suppression based on the multistage wiener filter [J]. IEEE Transaction on Communications, 2002, 50(6): 986-994.
- [5] CHOWDHURY S, ZOLTOWSKI M D, GOLDSTEIN J S. Reduced-rank adaptive MMSE equalization for the

- forward link in high-speed CDMA[C] // Conference Record of the 43rd Midwest Circuits and Systems Conference, Piscataway, USA: IEEE, 2000: 6-9
- [6] DLETL G, MENSING C, UTSCHICK W, et al. Multi-stage MMSE decision feedback equalization for Edge [C] // Proceedings of. 2003 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Piscataway, USA: IEEE, 2003: 509-512.
- [7] SUN Y, HONIG M L. Performance of reduced-rank equalization [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(10): 4548-4562.
- [8] LARSSON E G, STOICA P. 无线通信中的空时分组编码 [M]. 任品毅, 译. 西安: 西安交通大学出版社, 2006: 13.
- [9] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 317-541.

(编辑 刘杨)