

卫星定位误差的最优星座选择剖析

吴青娥, 王拓, 黄永宣, 李济生

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 在分析定位误差的基础上,研究了星座最佳几何配置,以及几何位置相对较好、星的个数较少的4颗卫星的定位问题,并给出了星座的最佳几何分布与定位误差的关系仿真。结果表明,在卫星星座中,星的高度与分布的均匀性是决定星座几何精度的衰减因子,顶座星、底座星的仰角与方位角之差则是几何精度衰减因子的影响因素。通过计算和实验发现,在GPS系统的定位过程中,有一组最优的、由4颗卫星组成的几何配置星座,此时对应的几何精度衰减因子最小,为1.5812。

关键词: 星座配置;仰角;方位角;几何精度衰减

中图分类号: TN967.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)10-1206-04

Analysis of Optimal Constellation Selection Based on Satellite Positioning Error

Wu Qing'e, Wang Tuo, Huang Yongxuan, Li Jisheng

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to improve the positioning precision of satellites and minimize their positioning error, the optimal geometric configuration of the constellation and 4 satellites positioning problem which has relatively better geometric position and lesser number of satellites are studied on the basis of analysis on the positioning error of satellites. The relationship of the optimal geometric distribution of the constellation and the positioning error is given. Simulation results indicate that in the satellite constellation, the geometrical dilution of precision (GDOP) of the constellation is determined by the height and uniformity of the distribution of the satellites. The difference between the elevation and azimuth angle of topmost and lower satellites also are influence factors of GDOP. By the calculation and experiments, it is shown that in course of GPS systems positioning, there exists a set of optimal geometric configuration constellation consisted of four satellites, and the corresponding GDOP is minimum, i. e. 1.5812.

Keywords: constellation collocation; elevation; azimuth; geometrical dilution of precision

定位系统针对不同空间位置的目标,其定位精度是不同的^[1-5],这就意味着目标位置的定位误差与目标相对于定位站或卫星的几何关系密切相关。从GPS观测到的卫星中,当测距误差一定时,若适当选择确定数目的卫星,可使得定位误差最小,有关研究包括4颗GPS卫星参与定位研究及星的分布角度研究^[1],实用的GPS星座选择方法^[5]等,但它们均未讨论为什么只选择4颗GPS卫星参与定位,也

没有计算定位误差与星的仰角、方位角的关系。

针对上述问题,本文通过计算位置误差协方差,找到了卫星几何分布与位置误差协方差之间的关系,从理论上给出了星的个数较少的4颗卫星的最优星座几何配置。仿真结果表明,在星座中,星的仰角大小和方位角的均匀性与定位精度密切相关,由此提出了星的个数较少的4颗卫星的最优星座选择算法。

1 几何精度指标

为了描述定位误差与星的几何分布间的关系,需定义一个衡量几何精度的尺度,即几何精度衰减因子(GDOP)^[1,5].

飞行器在利用卫星进行测距、定位时,它的位置精度可以用空间中3个正交方向上的定位误差方差和 σ_X^2 来表示,由于该参数与卫星之间的相对几何关系有关,因此可将其作为GDOP.

定义1 几何精度衰减因子即为定位误差协方差阵的迹的算术平方根.

如果定位误差只是3个正交方向上的位置误差,则GDOP就是位置精度衰减因子(PDOP),即 $\sigma_X = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)^{1/2}$, $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ 是3个正交方向上的定位误差的方差.由于GDOP可以反映卫星几何关系的伪距测量误差与用户定位误差间的协方差关系(比例系数),且与所选坐标系无关,所以可以将其作为用户选星的主要依据.

2 定位误差的三维几何分布

为了实现最优星座几何分布,应先从简单情形入手.假设用户时钟与卫星时钟之间不存在时钟差 Δt_u ,那么用户针对第*i*颗卫星测得的伪距就是卫星与用户间的距离 r_i .

2.1 定位误差协方差和PDOP计算

设 (x, y, z) 和 $(x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i})$ 分别为用户和第*i*颗GPS卫星在地球坐标系中的位置,则用户与第*i*颗卫星之间的距离

$$r_i = ((x - x_{s_i})^2 + (y - y_{s_i})^2 + (z - z_{s_i})^2)^{1/2} \quad (1)$$

式(1)中包含了3个未知数 x, y, z ,要对其定位求解,需要同时观测3个GPS卫星.

设3个卫星的位置为 $s_i = [x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i}]^T, i=1, 2, 3$,用户的状态矢量为 $X_u = [x, y, z]^T$,如图1所示.定义用户到第*i*颗卫星的单位矢量 $e_i = [e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}]^T, i=1, 2, 3$,其中 e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} 是矢量 e_i 的方向余弦,那么根据矢量的加减运算法则得 $e_i^T X_u = e_i^T s_i - r_i$.

假如GPS卫星的空间位置有一个偏差 δs_i ,而测距也有误差 δr_i ,这样必定会引起用户的位置误差 δX_u ,则三者的关系式为

$$e_i^T \delta X_u = e_i^T \delta s_i - \delta r_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

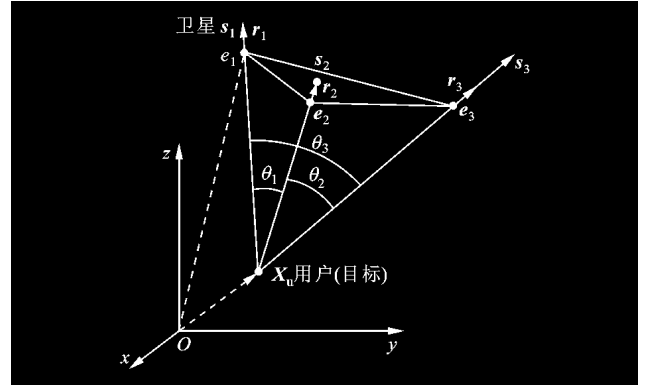


图1 3个卫星定位的几何分布

$$P = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} e_1^T & 0 & 0 \\ 0 & e_2^T & 0 \\ 0 & 0 & e_3^T \end{bmatrix}$$

令 $\delta r = [\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3]^T$ 为量测误差, $\delta S = [\delta s_1, \delta s_2, \delta s_3]^T$ 为参与定位的3颗卫星的状态矢量误差,那么式(2)可进一步改写为矢量矩阵运算的形式,即

$$P \delta X_u = Q \delta S - \delta r = \delta z \quad (3)$$

一般情况下, P 的逆是存在的,则式(3)又可简化为 $\delta X_u = (P^T P)^{-1} P^T (Q \delta S - \delta r)$ 或 $\delta X_u = P^{-1} \delta z$.因此,定位误差协方差

$$P_{\delta X_u} = \text{cov } \delta X_u = P^{-1} P_{\delta z} P^{-T} \quad (4)$$

假设每个卫星的位置误差之间、各个测距误差之间以及卫星与测距误差之间是相对独立的,且卫星的位置误差和测距误差对应的方差分别为 $\sigma_{x_{s_i}}^2, \sigma_{y_{s_i}}^2, \sigma_{z_{s_i}}^2$ 和 $\sigma_{r_1}^2, \sigma_{r_2}^2, \sigma_{r_3}^2$,则

$$P_{\delta z} = E[\delta z \delta z^T] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

其中 $a_i = e_{i1}^2 \sigma_{x_{s_i}}^2 + e_{i2}^2 \sigma_{y_{s_i}}^2 + e_{i3}^2 \sigma_{z_{s_i}}^2 + \sigma_{r_i}^2, i=1, 2, 3$.所以,表达用户位置几何精度的指标

$$\sigma_{X_u} = [\text{tr}(P_{\delta X_u})]^{1/2} = [\text{tr}(P^{-1} P_{\delta z} P^{-T})]^{1/2}$$

再由矩阵迹的性质可得

$$\sigma_{X_u}^2 = \text{tr}(P_{\delta X_u}) = \text{tr}[(P P^T)^{-1} P_{\delta z}]$$

要使得定位精度更高,必须使 σ_{X_u} 尽可能小.定义 e_1 与 e_2, e_2 与 e_3, e_1 与 e_3 之间的夹角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$,如图1所示,令 $c_i = \cos \theta_i, i=1, 2, 3$,令 $A =$

PP^T , 可得

$$\sigma_{X_u}^2 = \text{tr}(A^{-1}P_{\delta z}) = \frac{a_1(1-c_2^2) + a_2(1-c_3^2) + a_3(1-c_1^2)}{1 + 2c_1c_2c_3 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2} \quad (5)$$

2.2 定位误差参数之间的关系

当3个卫星的几何位置或目标位置满足下述关系时, $\sigma_{X_u}^2$ 可达到最小值。

(1) 对式(5)作关于 c_i 的偏导, 并令其为0, 且当 $c_1=c_2=c_3=0$ 时, 得 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=90^\circ$, 此时的 σ_{X_u} 为最小。假如 θ_1 是定值, 那么 σ_{X_u} 最小的条件是 $\theta_2=\theta_3=90^\circ$ 。此时, 一种情况是, 选星应保持用户到3个卫星的矢量夹角为 90° , 则 σ_{X_u} 为最小; 另一种情况是, 保持用户到2个卫星的矢量夹角为定值, 而选择第3个卫星时应保持用户到该卫星的矢量与用户到其他2个卫星的矢量的夹角为 90° , 则 σ_{X_u} 为最小。

(2) 令 $\partial\sigma_{X_u}^2/\partial e_{ij}=0$, $i, j=1, 2, 3$, 则 $e_{ij}=0$ 。根据实际情况, e_{ij} 不可能全为0, 当 i 固定时, e_{ij} 也不可能同时为0, 即仅有1个或2个 e_{ij} 为0, 那么 PDOP 只能得到次优解, 也就是用户到卫星的矢量 r_i 与1个或2个坐标轴的夹角为 90° , 若是矢量 r_i 与2个坐标轴的夹角均为 90° 或接近 90° , 则卫星的 s_i 在目标顶。结合关系(1), 在选取剩下2颗卫星时应使用户到这2颗卫星的2个矢量与矢量 r_i 的夹角成 90° 或接近 90° , 那么这2颗卫星的位置接近水平面, 由此 PDOP 可获得次优解。

2.3 PDOP 与仰角、方位角的关系

由于 PDOP 与坐标系的变化无关, 所以可将地球坐标系的原点平移到用户的位置, 二者坐标轴平行且同向, 如图2所示。

当3个仰角 $E_i, i=1, 2, 3$ 都不为 90° 、 -90° (见图2), 则有

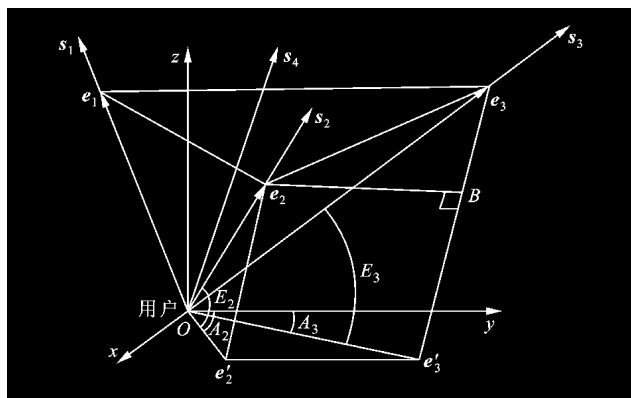


图2 用户到卫星的矢量仰角 E_i 与方位角 A_i 之差的关系

$$\cos(A_2 - A_3) = \frac{-2\sin E_2 \sin E_3}{2\cos E_2 \cos E_3} = \frac{\cos(E_2 + E_3) - \cos(E_2 - E_3)}{\cos(E_2 + E_3) + \cos(E_2 - E_3)} \quad (6)$$

要使式(6)成立, $|E_2|$ 、 $|E_3|$ 的取值要小, 同理 $|E_1|$ 、 $|E_2|$ 也要小。在 $|E_1|$ 、 $|E_2|$ 、 $|E_3|$ 取值不大的情况下, 存在一种情况, 即

$$|A_1 - A_2| \approx |A_2 - A_3| \approx |A_3 - A_1| \quad (7)$$

也就是说, 3颗卫星之间的方位角之差均接近于 120° 。可以推断, 对于3颗卫星, 其仰角越小, 彼此间的方位角之差越均匀 (即方位角差值接近于 120°), 则 PDOP 就越小, 定位精度也就越高。由2.2节可知, 若有一颗卫星的仰角比较大, 其他2颗卫星的仰角比较小, 则定位精度也比较高。

3 定位误差的四维几何分布与选星

3.1 定位误差及其 GDOP

假设 GPS 卫星的位置和时钟误差均为0, 各个测距过程相对独立, 且对应方差为 σ^2 , 则有定位误差的协方差矩阵为 $L = \sigma^2(G^T G)^{-1}$, 其中

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & 1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & 1 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & 1 \\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 & \cos\gamma_4 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\sigma_X = \left(\sum_{i=1}^4 l_{ii} \right)^{1/2} = \frac{\sigma \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 G_{ki}^2 \right)^{1/2}}{\det G} \quad (8)$$

式中: G_{ki} 为 G 元素的代数余子式; l_{ii} 为 L 的主对角线元素。 $\cos\alpha_i$ 、 $\cos\beta_i$ 和 $\cos\gamma_i$ 分别为第 i 颗卫星的斜距矢量在 WGS84 坐标系中的方向余弦。

3.2 星座仰角和方位角对定位精度的影响

从2.3节可知, 星座的仰角及方位角的均匀性决定了星座的 GDOP, 所以可以用 GPS 卫星星座的仰角 E_i 和方位角 A_i 来描述定位精度。同样, 从图2可以获得用户到卫星矢量的方向余弦与其仰角 E_i 和方位角 A_i 的关系, 进而可求得系数矩阵 G 。由式(8)知, 当 A_i 和3个 E_i 固定 ($i=1, 2, 3, 4$), 而另一个 E_j ($j \neq i$) 增大时, GDOP 的值减小。 E_j 的值越大, GDOP 的值越小, 此时可把 E_j 对应的那颗卫星称作顶座星。

由2.2节、2.3节及式(8)知, 当顶座星的仰角固定时, 要使得 GDOP 的值比较小, 必须使其余3颗卫星的仰角均比较小, 且彼此的方位角之差要均

匀.如果把仰角较小的这3颗卫星称作底座星,方位角和顶座星的仰角固定,那么底座星的仰角越小,GDOP也越小,且彼此的仰角之差越小,GDOP也就越小.如果仰角固定,若3个底座星的方位角之差均接近于 120° ,则GDOP最小,定位精度也就最高.

从上面的计算和分析知,GPS系统在定位过程中有一组最优的几何配置星座:顶座星在目标顶,即它的仰角为 90° ,3个底座星的仰角应比较小,均接近 20° ,底座星之间的方位角相差 120° ,此时 $\sigma_x = 1.5812$,即对应的GDOP为最小.

4 仿真和讨论

当顶座星的仰角 E_1 取值不同时,底座星的仰角、方位角之差对GDOP的影响如图3、图4所示.从图3、图4知,顶座星仰角越大,GDOP越小.若顶座星的仰角为定值,3颗底座星的仰角及方位角的均匀性决定了该星座的GDOP.

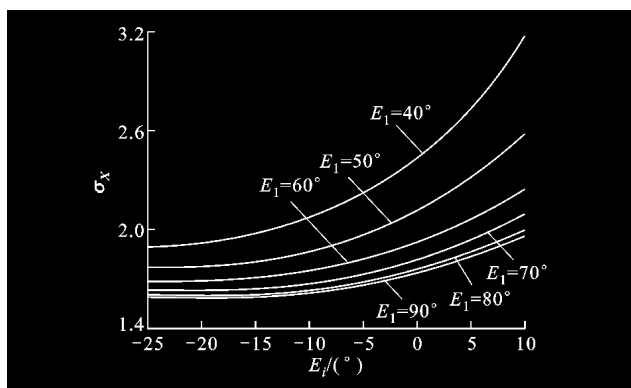


图3 GDOP与底座星仰角间的关系

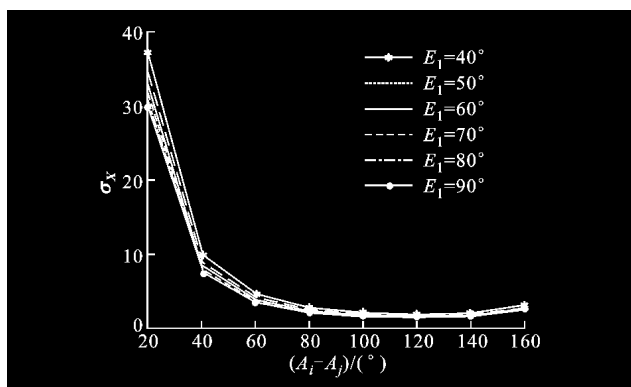


图4 GDOP与底座星方位角之差的关系

由卫星对地球或地面目标的覆盖特性^[6]可知,当3个底座卫星的面积固定或面积增大时,顶座星越高,定位精度也就越高,此时4颗卫星所构成的四面体的体积也越大.从上述分析和仿真结果可得到用星个数较少的GPS卫星最优星座选择算法步骤是:①选择仰角最大的卫星作为第1颗星;②选取与第1颗卫星的斜距矢量夹角接近于 90° 的卫星作为第2颗星;③选取与第2颗星仰角大小接近、方位角(水平方向)相差 120° 的卫星作为第3颗星;④从剩余的可见星中选择第4颗星,并计算这4颗星的四面体体积,再从体积较大的几个卫星组中选择具有最小GDOP的卫星参与导航定位.

5 结束语

本文先从简单的三维位置分布入手,计算了位置误差协方差,找到了卫星几何分布与位置误差协方差之间的关系,由此提出了星的个数较少的4颗卫星的最优星座选择算法,并通过仿真进一步验证了星的仰角大小和方位角的均匀性与定位精度密切相关的这一特性.

参考文献:

- [1] 袁建平,罗建军,岳晓奎,等. 卫星导航原理与应用[M]. 北京:中国宇航出版社,2004.
- [2] 孙仲康,周一宇,何黎星. 单多基地有源无源定位技术[M]. 北京:国防工业出版社,1996.
- [3] 干国强,邱致和. 导航与定位——现代战争的北斗星[M]. 北京:国防工业出版社,2000.
- [4] Grewal M S, Weill L R, Andrews A P. Global positioning systems, inertial navigation, and it's integration [M]. New York, USA: Wiley Press, 2000.
- [5] 宗振铎. 一种简易而实用的GPS星座选择方法[J]. 导航,1987(1):168-173.
Zong Zhenduo. A simple and practical choice method on GPS constellation [J]. Navigation, 1987(1):168-173.
- [6] 袁孝康. 星载合成孔径雷达导论[M]. 北京:国防工业出版社,2003.

(编辑 苗凌)