

基于几何位移计算理论的索杆结构成形分析

苏波, 钱若军, 林智斌

(同济大学土木工程学院, 200092, 上海)

摘要: 为求解索杆体系在成形过程中存在的几何位移, 系统地研究了几何位移计算理论. 分别根据余能原理和虚功原理, 导出了发生几何位移时系统的变形协调方程和等价不平衡方程, 构成了几何位移求解的理论基础; 归纳了求解几何位移的 3 类约束条件: 松弛条件, 定量约束条件, 定向约束条件. 几何位移的求解可归结为根据系统等价不平衡方程不断修正几何位移模态、使之满足系统变形协调条件和约束条件的迭代过程. 算例分析表明, 所研究的理论可准确计算出系统形态变化中的几何位移, 实现对索杆体系的成形分析.

关键词: 几何位移; 索杆结构; 成形; 余能原理; 虚功原理

中图分类号: TU31; O242.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)11-1335-03

Shape-Forming Analysis for Cable-Member Structures Based on Geometric-Displacement Computation Theory

Su Bo, Qian Ruojun, Lin Zhibin

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In order to analyze geometric displacement during shape-forming process of cable-member structures, the theory of geometric-displacement computation is studied. The system-displacement harmonic term and equivalent unbalanced equation are deduced based on the complementary energy principle and virtual work principle, respectively. Three types of constraint terms for computation of geometric displacement are concluded, including slack term, fixing-quantity term and fixing-direction term. The solution of geometric displacement can be summarized as an iterative computation of geometric-displacement modes based on the equivalent unbalanced equation obeying the system deformable harmonic term and constraint terms. The examples show the theory is able to correctly evaluate geometric displacement for morphologically varying systems, and to successfully simulate the shape-forming process of cable-member structures.

Keywords: geometric displacement; cable-member structure; shape forming; complementary energy principle; virtual-work principle

长期以来, 传统的结构分析、设计都遵守 Maxwell 准则, 即几何不变^[1], 因而难以用传统的结构理论对索杆体系的成形过程进行分析. 近 20 年来, 随着航天技术研究的需要, 可展结构的研究促进和带动了机构理论、结构形态理论的发展. 在国外, 英国剑桥大学的 Pellegrino 等人结合可展结构的研究, 对机构运动理论提出了一些重要的概念和方法^[2-4],

美国的 Kuznetsov 教授也从多体动力学方面对建立系统变形协调方程进行了研究^[5-6]. 在国内, 聂润兔等人对可变桁架运动学作了研究^[7]; 林智斌等人将机构理论引入张力结构分析, 实现了对大型索结构的监控分析^[8-9]. 在此基础上, 本文系统研究了几何位移计算理论, 并将之应用于索杆体系的成形分析.

1 系统的变形协调条件及约束条件

几何位移并不是节点间的任意运动,它必须满足变形协调条件和各种约束条件.

1.1 系统的变形协调条件

根据系统余能的定义,系统余能 Π_c 可写为

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, dx dy dz - \int_{S_u} \mathbf{p}_b^T \mathbf{u}_b \, ds \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为系统内部应力; $\mathbf{D}$ 为弹性矩阵; $\mathbf{u}_b$ 为边界的给定位移; $\mathbf{p}_b$ 为边界反力.

根据最小余能原理

$$\delta \Pi_c = 0 \quad (2)$$

可得到体系的平衡方程

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{P} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{A}$ 为平衡方程未知数的系数矩阵,称为平衡矩阵; $\bar{\mathbf{f}}$ 为内力系数列向量; $\mathbf{P}$ 为节点荷载列向量.

根据式(3),可给出体系的变形协调方程

$$\mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{\Delta} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ 为协调方程未知数的系数矩阵,称为协调矩阵,对于杆系结构,协调矩阵 $\mathbf{B}$ 是 $b \times (3J - k)$ 维长方阵; $\bar{\mathbf{u}}$ 为 $3J - k$ 维的节点位移系数列向量; $\mathbf{\Delta}$ 为体系的 b 维变形列向量.

当系统发生几何位移时不存在变形,即 $\mathbf{\Delta} = \mathbf{0}$,因此系统的变形协调方程可根据式(4)写为

$$\mathbf{B} \Delta \mathbf{U}_g = \mathbf{0} \quad (5)$$

式中: $\Delta \mathbf{U}_g$ 为几何位移列向量.

1.2 系统的约束方程

发生几何位移的系统除满足上述的协调条件外,还必须满足各种约束条件,归纳为如下3类.

第一类条件为松弛条件,在计算过程中除记录始终不参与计算的松弛结构外,还要记录在工作过程中可能进入松弛状态、也可能从松弛状态重新再参与工作的动态松弛.

第二类条件为定量约束条件,包括给定的边界位移量、系统的自重作用等.

第三类条件为定向约束条件,决定了系统几何位移的发展方向,包括定向边界条件、定向作用条件和定向变形条件^[9].

2 系统的等价不平衡方程

当系统处于临界平衡状态时,根据虚功原理有

$$\int_V \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{e,g}^T \boldsymbol{\sigma}_{e,g} \, dv = \delta \Delta \mathbf{u}_{e,g}^T \Delta \mathbf{p}_{e,g} \quad (6)$$

式中: $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{e,g}$ 为单元几何应变的增量; $\boldsymbol{\sigma}_{e,g}$ 为单元几何

应力; $\Delta \mathbf{u}_{e,g}$ 为单元节点几何位移向量的增量; $\Delta \mathbf{p}_{e,g}$ 为单元节点广义荷载向量的增量.

若系统满足式(5),则方程(6)的左端变为0,可得到求解几何位移的基本方程——等价不平衡方程

$$\Delta \mathbf{U}_g^T \Delta \mathbf{P}_g = 0 \quad (7)$$

式(7)的物理意义很明确,表示系统在不平衡状态时,任何作用对几何位移都不做功.

3 几何位移的构造及算法

3.1 几何位移的构造

几何位移并不能直接求解,需要构造一个试函数作为几何位移的近似,在迭代中逼近正确解.现采用基函数的线性组合来构造几何位移的试函数

$$\Delta \mathbf{U}_g = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\beta} \quad i = 1, \dots, q \quad (8)$$

式中: $\boldsymbol{\beta}$ 为待定系数构成的向量; $\boldsymbol{\phi}_i$ 为基函数; q 为维数,且 $q \leq N$, N 为系统自由度.

取系统的几何位移模态向量作为几何位移的基函数时,有

$$\boldsymbol{\phi} = [\mathbf{u}_{r+1} \quad \dots \quad \mathbf{u}_{r+q}] \quad (9)$$

式中: $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{r+q}$ 为几何位移模态向量的分量; 下标 r 为系统平衡矩阵的秩.

将式(8)代入式(7),则等价不平衡方程为

$$\boldsymbol{\beta}^T \Delta \mathbf{P} = 0 \quad (10)$$

式中: $\Delta \mathbf{P} = \boldsymbol{\phi}_i^T \Delta \mathbf{P}_g$. 对几何位移的求解变为对待定系数 $\boldsymbol{\beta}$ 的求解.

3.2 算法

几何位移求解的主要计算步骤如下.

(1) 求解待定系数 $\boldsymbol{\beta}$. 从初始状态 $t=0$ 开始,根据约束条件计算系统的几何位移模态向量 $\boldsymbol{\phi}_i$. 在 $t+\Delta t$ 时刻,有残差

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\beta}^T {}^t \boldsymbol{\phi}_i^T \Delta \mathbf{P}_g = {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}_g \quad (11)$$

当残差的模小于指定的小数,即 $\| {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}_g \| \leq \epsilon_g$ 时,得待定系数 $\boldsymbol{\beta}$ 的近似.

(2) 求解几何位移,修正系统节点坐标. 由式(8)可求得几何位移为

$$\Delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}_g = {}^t \boldsymbol{\phi}_i {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\beta} \quad (12)$$

根据得到的几何位移来修正系统的坐标

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{X} = {}^t \mathbf{X} + \Delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}_g \quad (13)$$

(3) 分析结构系统协调性,进一步修正系统节点坐标. 根据式(5)对叠加几何位移后的结构系统进行变形协调性分析,如果由式(5)得

$${}^t \mathbf{B} \Delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}_g = {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}_b \quad (14)$$

则为消除这部分单元的几何变形 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{r}_b$, 假定这部分单元的几何变形为 $-{}^{t+\Delta t} \mathbf{r}_b$, 解

$${}^{t+\Delta}B\Delta{}^{t+\Delta}U_C = -{}^{t+\Delta}r_b \quad (15)$$

得

$$\Delta{}^{t+\Delta}U_C = -U_r \Sigma^{-1} V_r^T {}^{t+\Delta}r_b \quad (16)$$

式中: Σ 为协调矩阵 B 的奇异值; U_r 为矩阵 B 的左奇异向量; V_r 为矩阵 B 的右奇异向量。

根据结构系统的协调性分析结果,修正系统坐标为

$${}^{t+\Delta}X' = {}^{t+\Delta}X - U_r \Sigma^{-1} V_r^T {}^{t+\Delta}r_b \quad (17)$$

然后重复式(14)至式(17)的过程,直至 $\|{}^{t+\Delta}r_b\| \leq \epsilon_b$ 时,停止修正系统坐标,进入下一步。

(4)修正结构系统的几何位移模态,再次迭代。根据新的结构系统坐标,修正松弛条件、定量约束条件和定向约束条件,再计算系统的几何位移模态向量 ${}^{t+\Delta}\phi_i$,然后再进行迭代,直到满足正交的收敛条件或目标条件为止。

4 算 例

算例 1 文献[10]给出了图 1 所示的索杆体系。当杆件 1 缩短 10 mm 后,计算其节点位移。

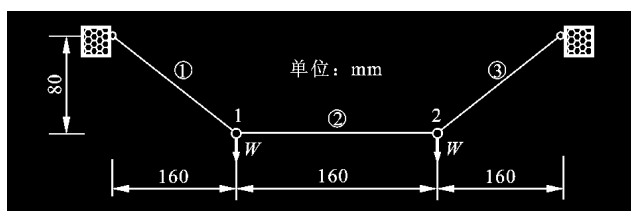


图 1 三铰接索杆系

根据上述几何位移计算理论,计算得到系统节点位移,见表 1,计算结果与文献[10]吻合。

表 1 节点位移数据比较 mm

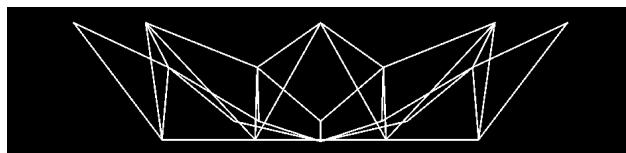
位移	试验结果 ^[10]	计算结果 ^[10]	本文计算结果
d_{1x}	-5.0	-5.2	-5.16
d_{2x}	-12.5	-12.0	-12.04
d_{1y}	-5.5	-5.2	-5.16
d_{2y}	-11.0	-10.3	-10.32

算例 2 如图 2 所示索穹顶体系,为了模拟其成形过程,采用缩短斜索来顶升桅杆、从而达到提升整个索穹顶的目的。

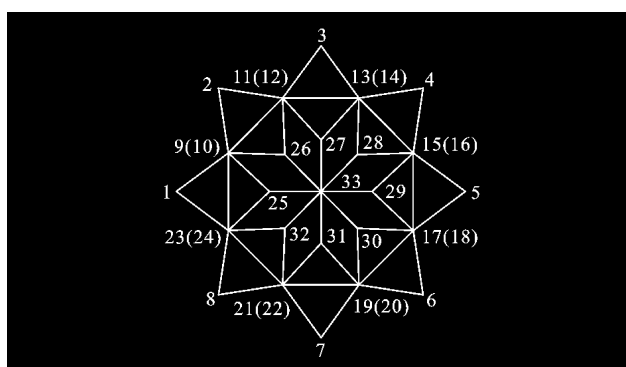
采用几何位移理论和方法,计算出每一个子步的系统几何位移,并修正节点坐标,可以实现模拟索穹顶体系的成形过程,如图 3 所示。

图 2 为成形前的索穹顶,有 2 层桅杆。现通过收

缩斜索来顶升桅杆,使索穹顶成形。图 3a 表示开始收缩最外圈斜索时的结构形态,对比图 2 中的立面图可以看出,桅杆开始顶升,脊索位置也发生了相应改变。图 3b 到图 3c 是顶升桅杆的中间过程,可以看出桅杆逐步提升,脊索已开始起拱,对应的节点位置也发生了相应的改变。图 3d 是结构的最终成形形态,此时竖向桅杆已经就位,外圈的脊索已经起拱。

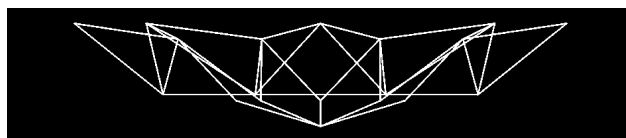


(a) 立面图

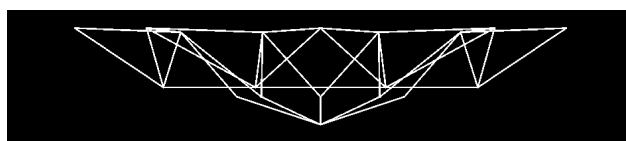


(b) 顶视图

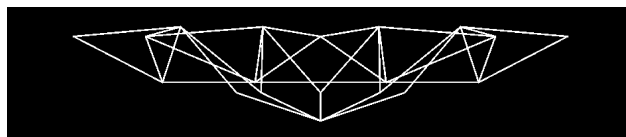
图 2 顶升前索穹顶体系模型图



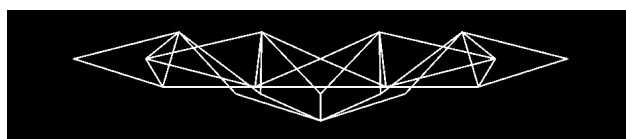
(a) 阶段 1



(b) 阶段 2



(c) 阶段 3



(d) 阶段 4

图 3 索穹顶成形过程模拟图

5 结 论

(1)从余能原理和虚功原理出发,分别得到了发生几何位移时系统的变形协调方程和等价不平衡方程,这构成了几何位移求解的理论基础,再结合所归纳的3类约束条件,从而能对几何位移进行求解。

(2)几何位移的求解归结为根据等价不平衡方程求待定系数 β 的迭代过程,但在迭代过程中必须考虑结构系统的约束条件,进行系统协调性分析,不断修正结构系统的几何位移模态。

(3)算例分析表明,所研究的几何位移计算理论可有效地模拟索杆结构成形过程,可望成为索杆结构设计分析的一种新途径。

参考文献:

- [1] 钱若军,杨联萍. 张力结构的分析·设计·施工[M]. 南京:东南大学出版社,2003.
- [2] Calladine C R, Pellegrino S. First-order infinitesimal mechanisms [J]. *Int J Solids Structures*, 1991,27(4): 505-515.
- [3] Kumar P, Pellegrino S. Structural computation of kinematics paths and bifurcation points [J]. *Int J Solids Structures*, 2000,37(46): 7003-7027.
- [4] Seffen K, You Z, Pellegrino S. Folding and deployment of curved tape springs [J]. *Int J Mech Sci*, 2000,42(10): 2055-2073.
- [5] Kuznetsov E N. Underconstrained structural systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [6] Kuznetsov E N. Orthogonal load resolution and static-kinematic stiffness matrix [J]. *Int J Solids Structures*, 1997, 34(28): 3657-3672.
- [7] 聂润兔,王学孝,邹振祝,等. 可变几何桁架展开运动学和动力学分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1997, 29(1): 33-36.
Nie Runtu, Wang Xuexiao, Zou Zhenzhu, et al. Deployment kinematics and dynamics of variable geometry truss [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 1997,29(1): 33-36.
- [8] 林智斌,杨联萍,钱若军. 佛山世纪莲体育场索结构监控分析(1) [J]. 工业建筑, 2006(增刊):119-127.
Lin Zhibin, Yang Lianping, Qian Ruojun. Monitor and control on structure of Fuoshan Century Lotus Gymnasium (1) [J]. *Industrial Construction*, 2006 (Sup): 119-127.
- [9] 林智斌. 基于几何位移分析的结构理论研究[D]. 上海:同济大学土木工程学院,2006.
- [10] Pellegrino S, Calladine C R. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks [J]. *Int J Solids Structures*, 1986,22(4):409-428.

(编辑 葛赵青)