

考虑不确定性因素的时变可靠度计算方法

闫永业, 石博强

(北京科技大学土木与环境工程学院, 100083, 北京)

摘要: 针对机械设备在使用过程中受到的时变不确定性因素(如荷载、环境及材料自身等因素)影响,建立了基于随机微分方程的时变可靠性预测模型,提出了考虑不确定性因素的时变可靠度计算方法.该方法考虑了机械零件强度和工作应力的演化过程,能够计算出机械零件在任意时刻的可靠度,解决了用概率设计方法设计的机械零件仅知道其设计可靠度而不知道零件在使用期间任意时刻可靠度的问题,可以对复杂不确定性因素作用下的设备进行时变可靠性评估,进而对使用期的可靠性指标变化趋势进行预测,为设备的维修和维护提供参考.

关键词: 时变;可靠度;不确定性;机械设备

中图分类号: TB114.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)11-1303-04

Time-Dependent Reliability Analysis under Uncertainty

Yan Yongye, Shi Boqiang

(School of Civil and Environmental Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Uncertainties inherent in loads, environment and material properties always exist during machine lifetime. A time-dependent model incorporating such uncertainties based on stochastic differential equation theory is presented, which provides a coherent framework for calculating time-dependent reliability under such external uncertainties leading to uncertainties in stress and strength. Therefore, the reliability for all time horizons can be gained via this model to predict the uncertain evolution and movement or the trend of machine reliability. This research can also provide a basis for maintenance of machine.

Keywords: time-dependent; reliability; uncertainty; machine

机械设备在使用过程中难免会受到随时间变化的不确定性因素(如荷载、环境及材料自身等因素)的影响,对于一些重要的设备,如飞机、汽车和核电机组,如果对不确定性因素估计不足,可能引起灾难性事故^[1].目前,国内外的专家、学者已对产品在使用过程中受到的不确定性因素的影响进行了大量研究^[2-4].然而,当前人们采用的考虑不确定性因素影响的概率设计方法通常认为机械零件的强度和工作应力分别服从某种概率分布函数^[5-9],但却不能给出强度和应力随时间变化的资料.实际上,机械零件的强度和工作应力状态在使用寿命期间是一个时变的演化过程,因而机械零件的可靠度是一个随时间变

化的动态可靠度,不确定性因素发生的时间顺序对于可靠度会产生很大的影响.对于像核电机组、航空发动机这样的大型能源动力装备,由于其运行环境的复杂,有必要建立关键部件的寿命与可靠性模型,来进行不确定性因素作用下的时变可靠度评估,提高部件和装备的寿命与可靠性.

我国科学院院士高镇同认为:由于作用在结构上的不确定性因素的存在,使得同一类型结构在同一工况下体现出不同的效能,结构疲劳寿命可相差数倍之多,存在很大分散性^[10].这样,采取定值方法显然不能确定批量产品的使用寿命,因此有必要根据设备在使用中自身的强度和应力变化来计算未来

某一时刻的可靠度指标.为此,本文建立了基于随机微分方程的时变可靠度计算模型,提出了考虑不确定性因素的时变可靠度计算方法,从而解决了机械零件在未来任一时刻的可靠度求解问题.

1 数学模型

设 (Ω, F, P) 是一个概率空间, F 为 Ω 上的 σ 代数, P 为 Ω 上的一个概率测度, $\{W(t), t \geq 0\}$ 为一维标准布朗运动.假如随机变量 X 满足

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \delta X(t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

即

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \lambda dt + \delta dW(t) \quad (2)$$

令 $Y(t) = \ln X(t)$,根据Ito定理有

$$\ln X(t) - \ln X(0) = \int_0^t \frac{dX_u}{X_u} + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{-1}{X_u^2} \delta^2 X_u^2 du \quad (3)$$

把式(2)代入式(3)中,简化得

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t (\lambda - \delta^2/2) du + \int_0^t \delta dW_u \quad (4)$$

因为

$$\int_0^t du = t; \quad \int_0^t dW_u = W_t - W_0; \quad W_0 = 0$$

所以有

$$Y(t) = \ln X(0) + (\lambda - \delta^2/2)t + \delta W(t) \quad (5)$$

对 $Y(t)$ 作指数运算,得到方程(1)的解

$$X(t) = X(0) \exp[(\lambda - \delta^2/2)t + \delta W(t)] \quad (6)$$

由于 $\ln X(t)$ 的数学期望

$$E(\ln X(t)) = E(\ln X(0) + (\lambda - \delta^2/2)t + \delta W(t)) = \ln X(0) + (\lambda - \delta^2/2)t \quad (7)$$

而

$$\ln E(X(t)) =$$

$$\begin{aligned} & \ln[E(X(0) \exp((\lambda - \delta^2/2)t + \delta W(t)))] = \\ & \ln[X(0) \exp((\lambda - \delta^2/2)t) E(\exp(\delta W(t)))] = \\ & \ln X(0) + (\lambda - \delta^2/2)t + \ln \exp(\delta^2 t/2) \end{aligned} \quad (8)$$

根据期望的对数和期望值之间的关系,有

$$\ln E(X(t)) = E(\ln X(t)) + D(\ln X(t))/2 \quad (9)$$

将式(7)和式(8)代入式(9),得 $\ln X(t)$ 的标准差为

$$D(\ln X(t)) = \delta^2 t$$

故 $\ln X(t)$ 是一个均值为 $\ln X(0) + (\lambda - \delta^2/2)t$ 、标准差为 $\delta t^{1/2}$ 的正态分布函数,即

$$\ln X(t) \sim N(\ln X(0) + (\lambda - \delta^2/2)t, \delta t^{1/2}) \quad (10)$$

假设强度和应力的对数 $\ln S(t)$ 和 $\ln \sigma(t)$ 是相互独立的随机变量,均值和标准差分别为

$$(\hat{\mu}_{\ln S(t)}, \hat{\sigma}_{\ln S(t)}) \text{ 和 } (\hat{\mu}_{\ln \sigma(t)}, \hat{\sigma}_{\ln \sigma(t)})$$

由于实际中的应力(强度)受到确定性因素和不确定性因素的共同作用,确定性因素反映了应力(强度)的变化趋势,不确定性因素反映了应力(强度)的随机差异,二者的耦合行为对应力(强度)产生的效应以概率演化出现,因此本文假设应力和强度服从方程(1),即 $\sigma(t)$ 和 $S(t)$ 满足

$$d\sigma(t) = \lambda_\sigma \sigma(t)dt + \delta_\sigma \sigma(t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (11)$$

$$dS(t) = \lambda_S S(t)dt + \delta_S S(t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (12)$$

式中: λ 是漂移率; δ 是波动率(见第3节).当波动率 $\delta=0$ 时,方程退化为 $dX(t)=\lambda X(t)dt$,表明应力(强度)的变化率仅受到确定性因素的影响;当漂移率 $\lambda=0$ 时,方程退化为 $dX(t)=\delta X(t)dW(t)$,表明应力(强度)的变化率仅受到不确定性因素的影响.

由式(6)知

$$\sigma(t) = \sigma(0) \exp[(\lambda_\sigma - \delta_\sigma^2/2)t + \delta_\sigma W(t)] \quad (13)$$

$$S(t) = S(0) \exp[(\lambda_S - \delta_S^2/2)t + \delta_S W(t)] \quad (14)$$

因此 $\ln S(t)$ 是一个正态分布

$$\ln S(t) \sim N(\ln S(0) + (\lambda_S - \delta_S^2/2)t, \delta_S^2 t^{1/2}) \quad (15)$$

$\ln S(t)$ 的均值和方差分别为

$$\hat{\mu}_{\ln S(t)} = \ln S(0) + (\lambda_S - \delta_S^2/2)t; \quad \hat{\sigma}_{\ln S(t)} = \delta_S t^{1/2}$$

$\ln \sigma(t)$ 也是一个正态分布

$$\ln \sigma(t) \sim N(\ln \sigma(0) + (\lambda_\sigma - \delta_\sigma^2/2)t, \delta_\sigma^2 t^{1/2}) \quad (16)$$

$\ln \sigma(t)$ 的均值和方差分别是

$$\hat{\mu}_{\ln \sigma(t)} = \ln \sigma(0) + (\lambda_\sigma - \delta_\sigma^2/2)t; \quad \hat{\sigma}_{\ln \sigma(t)} = \delta_\sigma t^{1/2}$$

机构的可靠度可以用以下概率表示

$$\begin{aligned} p &= P(\ln S(t) > \ln \sigma(t)) = \\ & P(\ln S(t) - \ln \sigma(t) > 0) \end{aligned}$$

令 $Z = \ln S(t) - \ln \sigma(t)$,于是上式可以写为

$$p = P(Z > 0)$$

由于 $\ln S(t)$ 和 $\ln \sigma(t)$ 相互独立,且分别服从正态分布,故 $Z = \ln S(t) - \ln \sigma(t)$ 也服从正态分布, Z 仍然是一个正态变量,其均值为

$$\hat{\mu}_Z = \hat{\mu}_{\ln S(t)} - \hat{\mu}_{\ln \sigma(t)} \quad (17)$$

标准差为

$$\hat{\sigma}_Z = (\hat{\sigma}_{\ln S(t)}^2 + \hat{\sigma}_{\ln \sigma(t)}^2)^{1/2} \quad (18)$$

Z 的概率密度函数是

$$\phi(Z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \hat{\sigma}_Z} \exp\left(-\frac{(Z - \hat{\mu}_Z)^2}{2\hat{\sigma}_Z^2}\right) \quad (19)$$

令

$$v = (Z - \hat{\mu}_Z)/\hat{\sigma}_Z \quad (20)$$

则 Z 的概率分布函数是

$$\Phi(Z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^Z \exp(-v^2/2) dv \quad (21)$$

当 $Z \rightarrow \infty$ 时, $v = Z - \hat{\mu}_Z / \hat{\sigma}_Z = \infty - \hat{\mu}_Z / \hat{\sigma}_Z \rightarrow \infty$

当 $Z=0$ 时, $v = Z - \hat{\mu}_Z / \hat{\sigma}_Z = 0 - \hat{\mu}_Z / \hat{\sigma}_Z = -\hat{\mu}_Z / \hat{\sigma}_Z$

由于

$$R(t) = P(Z > 0) = P(\ln S(t) - \ln \sigma(t) > 0) =$$

$$\int_0^\infty \phi(Z) dZ = (2\pi)^{-1/2} \int_{Z_{R(t)}}^\infty \exp(-v^2/2) dv =$$

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{-Z_{R(t)}} \exp(-v^2/2) dv \quad (22)$$

故可靠度

$$R(t) = \Phi(-Z_{R(t)})$$

将式(18)和式(17)代入式(19)得

$$Z_{R(t)} = - \frac{\hat{\mu}_{\ln S(t)} - \hat{\mu}_{\ln \sigma(t)}}{(\hat{\sigma}_{\ln S(t)}^2 + \hat{\sigma}_{\ln \sigma(t)}^2)^{1/2}} \quad (23)$$

$Z_{R(t)}$ 可由正态分布表查得。

2 计算方法

假定应力和强度相互独立,随机变量服从式(11)和式(12),根据在使用过程中所测得的应力和强度数据,可以得到应力、强度的漂移率和波动率($\lambda_\sigma, \delta_\sigma, \lambda_S, \delta_S$),进而可以求出 t 时刻的可靠度 $R(t)$ 。

由式(23)得

$$\hat{\mu}_{\ln S(t)} - \hat{\mu}_{\ln \sigma(t)} = -Z_{R(t)} (\hat{\sigma}_{\ln S(t)}^2 + \hat{\sigma}_{\ln \sigma(t)}^2)^{1/2}$$

由式(15)和式(16)得

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\ln S(t)} - \hat{\mu}_{\ln \sigma(t)} &= (\ln S(0) - \ln \sigma(0)) - \\ &((\lambda_S - \delta_S^2/2) - (\lambda_\sigma - \delta_\sigma^2/2))t \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \ln S(0) - \ln \sigma(0) &= (\mu_{\ln S(t)} - \mu_{\ln \sigma(t)}) + \\ &((\lambda_S - \delta_S^2/2) - (\lambda_\sigma - \delta_\sigma^2/2))t = \\ &-Z_{R(t)} (\hat{\sigma}_{\ln S(t)}^2 + \hat{\sigma}_{\ln \sigma(t)}^2)^{1/2} + \\ &((\lambda_S - \delta_S^2/2) - (\lambda_\sigma - \delta_\sigma^2/2))t \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \ln \frac{S(0)}{\sigma(0)} &= -Z_{R(t)} (\hat{\sigma}_{\ln S(t)}^2 + \hat{\sigma}_{\ln \sigma(t)}^2)^{1/2} + \\ &((\lambda_S - \delta_S^2/2) - (\lambda_\sigma - \delta_\sigma^2/2))t \\ Z_{R(t)} &= \left[\ln \frac{S(0)}{\sigma(0)} - ((\lambda_S - \delta_S^2/2) - (\lambda_\sigma - \delta_\sigma^2/2))t \right] / \\ &[-(\hat{\sigma}_{\ln S(t)}^2 + \hat{\sigma}_{\ln \sigma(t)}^2)^{1/2}] = \\ &\left[\ln \frac{S(0)}{\sigma(0)} - ((\lambda_S - \delta_S^2/2) - (\lambda_\sigma - \delta_\sigma^2/2))t \right] / \\ &[-(\delta_S^2 t + \delta_\sigma^2 t)^{1/2}] \quad (24) \end{aligned}$$

求出 $Z_{R(t)}$ 后,查正态分布表可得 t 时刻的可靠度 $R(t)$ 。

3 确定参数

漂移率 λ 反映确定性因素对应力(强度)变化率的影响权重,波动率 δ 反映不确定性因素对应力(强度)变化率的影响权重。

3.1 漂移率 λ 的计算

X 为在相同的时间间隔点(例如天、周或年)所得到的观测值,漂移率

$$\lambda = \bar{q} = \frac{1}{n} \sum \ln \frac{X_j}{X_{j-1}} \quad (25)$$

式中: X_j 为第 j 个观测时间点的值($j=1, \dots, n, n+1$; $n+1$ 为观测次数)。

3.2 波动率 δ 的计算

令 $q_i = \ln \frac{X_j}{X_{j-1}}, i=1, 2, \dots, n$; $\bar{q}$ 是 q_i 的平均值,有

$$\delta = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 \right]^{1/2}$$

即

$$\delta = \left[\sum_{i=1}^n \frac{(q_i - \lambda)^2}{n-1} \right]^{1/2} \quad (26)$$

4 算例

考虑一受拉圆轴,假设应力在轴的横截面上均匀分布,轴线为直线,随机载荷作用在截面中心,破坏定为断裂。强度和应力的 200 个历史观测数据(由软件 Labview 随机产生)如图 1 和图 2 所示,观测的时间间隔以 d (天)为单位。第 1 个观测时间点的应力和强度值为 $S(0)=207.438$ MPa, $\sigma(0)=508.760$ MPa,第 200 个观测时间点的数据是最近一次的数据。分别估计从最近一个观测时间点开始的 1、2、3 a(年)后的可靠度 $R(365)$ 、 $R(730)$ 和 $R(1\ 095)$ (1 a 按 365 d 计)。

解 将图 1 和图 2 的数据代入式(25)和式(26)得

$$\lambda_S = -0.000\ 210\ 422\ 656\ 15$$

$$\delta_S = 0.008\ 338\ 983\ 708$$

$$\lambda_\sigma = 0.000\ 189\ 214\ 035\ 84$$

$$\delta_\sigma = 0.017\ 688\ 311\ 331$$

当 $t=365$ d 时,将 $\lambda_\sigma, \delta_\sigma, \lambda_S, \delta_S, \sigma(0), S(0)$ 和 t 代入式(24)得

$$Z_{R(t)} = Z_{R(365)} = -2.126\ 9$$

由式(21),查正态分布表得 1 a 后的可靠度为

$$R(t) = R(365) = 0.983$$

同理可计算得 2 a 后有

$$Z_{R(t)} = Z_{R(730)} = -1.695\ 9$$

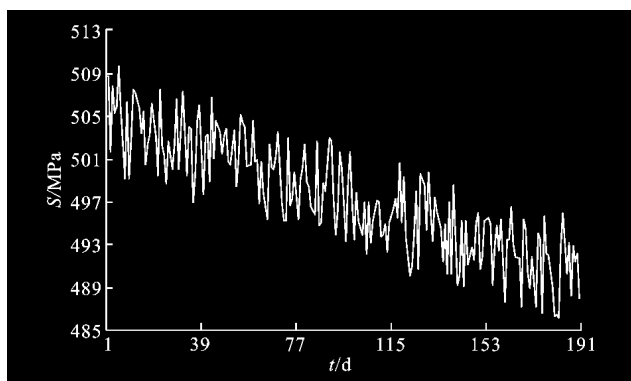


图1 强度的历史数据

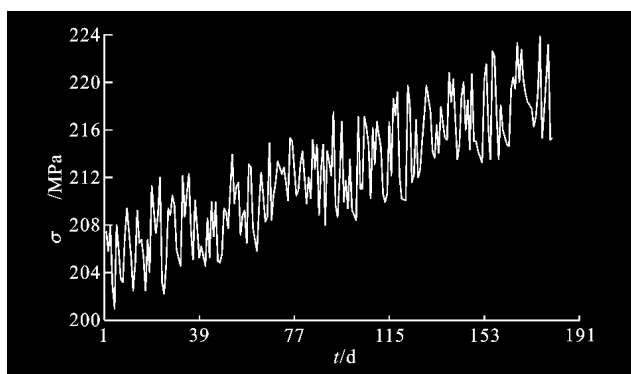


图2 应力的历史数据

可查得 2 a 后的可靠度为

$$R(t) = R(730) = 0.959$$

3 a 后有

$$Z_{R(t)} = Z_{R(1095)} = -1.5415$$

可查得 3 a 后的可靠度为

$$R(t) = R(1095) = 0.938$$

5 结 论

本文建立了一种时变可靠度计算模型,提出了新的时变可靠度计算方法. 该方法的特色在于:①考虑了不确定因素的影响;②在计算可靠度时考虑了强度和应力随时间的演化过程. 这是一种动态可靠度计算方法,通过模型能够获得机械零件在任意时刻的可靠度. 这种方法可以为机械设备在不确定环境下的可靠性评估和可靠度指标在使用期间变化趋势的预测提供理论依据,并且可以为机械设备的维修和维护提供参考依据.

由于在实际情况下应力和强度可能存在其他的时变特性,因此时变可靠度的计算方法还需要根据不同的实际情况进行进一步的研究.

参考文献:

[1] 刘德顺,岳文辉,杜小平. 不确定性分析与稳健设计的

研究进展[J]. 中国机械工程, 2006, 17(17): 1834-1841.

Liu Deshun, Yue Wenhui, Du Xiaoping. Study on uncertainty analysis and robust design: a review [J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(17): 1834-1841.

[2] Mocko G M, Paasch R. Incorporating uncertainty in diagnostic analysis of mechanical systems [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 127(2): 315-325.

[3] Marti K, Kaymaz I. Reliability analysis for elasto-plastic mechanical structures under stochastic uncertainty [J]. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 2006, 86(5): 358-384.

[4] Tonon F. Using random set theory to propagate epistemic uncertainty through a mechanical system [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2004, 85(1/3): 169-181.

[5] Wehenkel L, Lebrevelec C, Trotignon M, et al. Probabilistic design of power-system special stability controls [J]. Control Engineering Practice, 1999, 7(2): 183-194.

[6] Yasumasa F, Fabrizio D, Roberto T. Probabilistic design of LPV control systems [J]. Automatica, 2003, 39(8): 1323-1337.

[7] 史进渊. 概率设计法在汽轮机直叶片级热力设计中的应用[J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(2): 20-25.

Shi Jinyuan. Application of probabilistic design method to thermal performance design for straight blade stages of steam turbines[J]. Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering, 1999, 19(2): 20-25.

[8] Wen Y K. Reliability-based design under multiple loads [J]. Structural Safety, 1993, 13(1/2): 3-19.

[9] Ravindra M K, Walser A. Probabilistic design of nuclear structures: a summary of state of the art and research needs [J]. Nuclear Engineering and Design, 1978, 50(1): 115-122.

[10] 高镇同, 阎楚良. 结构全寿命主动可靠性设计与失效智能在线预示——未来机械设计领域的发展趋势[J]. 中国机械工程, 2000, 11(1): 53-55.

Gao Zhentong, Yan Chuliang. Whole-life initiative reliability design and intelligent online failure prediction of structural components: development trend of machine design in the future China mechanical engineering [J]. China Mechanical Engineering, 2000, 11(1): 53-55.

(编辑 葛赵青)