

谱元方法求解波动方程及其数值精度的相关因素

朱昌允, 秦国良, 徐忠

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为探讨波动方程的高精度数值模拟, 采用 Chebyshev 谱元方法结合隐式 Newmark 时间积分方法求解波动方程. 求解一个具体算例验证了数值方法的可行性, 讨论了时间步长、Newmark 因子以及计算区域的网格剖分方式对数值精度的影响. 结果表明: 和差分法相比, 谱元方法求解波动方程具有所用网格节点少, 数值精度高的特点; 数值误差随时间步长减小而减小; 在满足稳定性要求的前提下, 数值误差随着 Newmark 因子的减小而减小; 当总网格节点数相同时, 不同的网格剖分方式所得数值误差不同. 所述方法和结论可用于模拟声波在空气中的传播.

关键词: 波动方程; 谱元方法; 时间积分方法; 气动声学

中图分类号: O353 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)01-0056-04

Implicit Spectral Element Method for Wave Equation and Some Factors Influencing Numerical Accuracy

ZHU Changyun, QIN Guoliang, XU Zhong

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To investigate the numerical scheme with high order of accuracy for the simulation of wave equations, Chebyshev spectral element method combined with implicit Newmark time integral method is adopted for simulating wave equations. Then some factors affecting the numerical accuracy are discussed in detail, such as time step h , Newmark factor and the subdivision style for computational domain. The conclusions indicate that the spectral element method has higher order numerical accuracy than difference method for simulation of wave equations, small time step induces less numerical error, smaller Newmark factor induces smaller numerical error, and different mesh style induces different numerical error while the general grid member gets equal to each other. The proposed method enables to simulate acoustic wave propagation in air.

Keywords: wave equation; spectral element method; time integral method; aeroacoustics

谱元方法是结合谱方法和有限元法各自特点的一种数值方法, 它既具有谱方法的高精度和收敛特性, 又具有较好的几何区域适应性. 20 世纪 80 年代初由 Patera^[1] 提出, 其后主要应用于计算流体力学和计算传热学^[2]. 随着对其研究的深入和工程实际问题的需要, 该方法近来被应用于更多领域, 如气动声学、地球物理学等领域.

计算气动声学是一门新兴的交叉学科, 主要通过数值计算研究气动噪声的产生机理和传播特性、

流体和声的相互作用等. 目前面临的主要问题^[3]之一一是传统数值方法的精度不能完全满足计算气动声学的需要, 如差分方法^[4]和有限元方法. 声学量是流动中脉动量相互抵消的结果, 其值较平均流场量小 3~5 个量级, 故需较高的数值精度, 针对这一要求, 谱元方法在这一领域的应用受到关注. 谱元方法^[5]求解时间相关问题时, 常牵涉求解形如下式的常微分方程组

$$Mu_t + Cu_t + Ku_t = Q_t \quad (1)$$

求解此方程组常采用 Runge-Kutta 法,但当求解类似于波动方程的动力学问题时,则通常采用直接积分法和振型叠加法,本文采用隐式 Newmark 积分方法^[6].

1 控制方程

空气介质中的波动方程可以通过线化欧拉方程得到^[7]. 对于声波在二维静止介质中的传播,控制方程为

$$\partial^2 u / \partial t^2 - c_0^2 \nabla^2 u = f \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (2)$$

为简单起见,这里采用第一类边界条件

$$u(x, y, t) \Big|_{\Gamma} = g(x, y, t) \quad \text{on } \Gamma \times [0, T] \quad (3)$$

初始条件为

$$u(x, y, 0) = u_0; \quad \dot{u}(x, y, 0) = \dot{u}_0 \quad (4)$$

式中:计算区域为 $\Omega, \Omega \in R^2; \Gamma$ 为边界;时间区间为 $[0, T]; c_0$ 是当地声速; f 是源项; $g(x, y, t)$ 为边界条件; u_0 和 $\dot{u}_0$ 为初始条件; u 为待求的未知量.

采用谱元方法求解上述问题即为寻找 $u: [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$, 使得在时间区间 $[0, T]$ 上, 满足

$$\begin{aligned} d^2 \int_{\Omega} w u dx dy / dt^2 + c_0^2 a(u, w) &= (f, w) \\ \forall w \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (5)$$

在边界上满足 $u(t) = g(t)$, 其中

$$a(u, w) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla u dx dy; \quad (f, w) = \int_{\Omega} f w dx dy$$

2 控制方程的空间离散

使用谱元方法求解式(5), 首先将求解区域 Ω 分解成 N_G 个互不重叠的子区域 Ω_e , 称为单元, $\Omega = \bigcup \Omega_e$. 然后将各单元转化成标准单元, 在一个标准单元内, 使用 N 阶 Chebyshev 正交多项式对试函数、右端项和解本身分别进行逼近. 于是, 变分方程的解可以写成如下形式

$$u = \tilde{u}(x, y, t) = \bigcup_{e=1}^{N_G} \tilde{u}^e(x, y, t) \quad (6)$$

其中

$$\tilde{u}^e(x, y, t) = \sum_{j=0}^{N_x} \sum_{k=0}^{N_y} u_{jk}^e(t) h_j^e(x) h_k^e(y) \quad (7)$$

式中: $h_i^e(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 且 $h_i^e(\zeta_l) = \delta_{il}$, $\zeta_l = \cos(\pi l / N)$ 为 N 阶 Chebyshev 多项式的极值点(称 Chebyshev-Gauss-Lobatto 点), $l = 0, 1, \dots, N$, 插值基函数为 N 阶 Chebyshev 正交多项式. 式(7)右端项可以写成

$$f^e = \sum_{j=0}^{N_x} \sum_{k=0}^{N_y} f_{jk}^e(t) h_j^e(\xi) h_k^e(\eta) \quad (8)$$

在标准单元内, 计算 $d^2 \int_{\Omega} w u dx dy / dt^2, a(u, w)$

和 (f, w) , 可得以下二阶线性偏微分方程组

$$\mathbf{M}^e \ddot{u}(t) + \mathbf{K}^e u(t) = \mathbf{Q}_i^e \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_{y_e}^{y_e+1} \int_{x_e}^{x_e+1} c^2 (\partial [h_j^e(\xi) h_k^e(\eta)] / \partial x) dx dy \cdot \\ &\quad \int_{y_e}^{y_e+1} \int_{x_e}^{x_e+1} c^2 (\partial [h_p^e(\xi) h_q^e(\eta)] / \partial x) dx dy + \\ &\quad \int_{y_e}^{y_e+1} \int_{x_e}^{x_e+1} c^2 (\partial [h_j^e(\xi) h_k^e(\eta)] / \partial y) dx dy \cdot \\ &\quad \int_{y_e}^{y_e+1} \int_{x_e}^{x_e+1} c^2 (\partial [h_p^e(\xi) h_q^e(\eta)] / \partial y) dx dy \\ \mathbf{M}^e &= \int_{y_e}^{y_e+1} \int_{x_e}^{x_e+1} h_j^e(\xi) h_k^e(\eta) h_p^e(\xi) h_q^e(\eta) dx dy \\ \mathbf{Q}_i^e &= \iint_{\Omega_e} f^e w dx dy \end{aligned}$$

通过总刚度矩阵的合成, 可得以下常微分方程组

$$\mathbf{M} \ddot{u}(t) + \mathbf{K} u(t) = \mathbf{Q}_i \quad (10)$$

初始条件为

$$u(x, y, 0) = u_0; \quad \dot{u}(x, y, 0) = \dot{u}_0$$

3 时间积分

欲用 Newmark 积分方法求解式(10), 在 $t \sim t + \Delta t$ 时间区域内采用下列假设, 即

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1-\delta)u_t + \delta u_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (11)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \Delta t + [((1/2) - \alpha)u_t + \alpha u_{t+\Delta t}] \Delta t^2 \quad (12)$$

式中: α 和 δ 是由数值精度和稳定性要求决定的参数, 称 δ 为 Newmark 因子, α 和 δ 取不同数值, 代表不同差分方案^[6]; $u_{t+\Delta t}$ 通过求解 $t + \Delta t$ 的控制方程得到

$$\mathbf{M} \ddot{u}_{t+\Delta t} + \mathbf{K} u_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \quad (13)$$

从式(12)得

$$\begin{aligned} u_{t+\Delta t} &= (u_{t+\Delta t} - u_t) / \alpha \Delta t^2 - \dot{u}_t / \alpha \Delta t - \\ &\quad (1/2\alpha - 1)u_t \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)带入式(11), 然后再一并代入式(13), 得

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} + \mathbf{M} / (\alpha \Delta t^2)) u_{t+\Delta t} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \\ \mathbf{M} [\ddot{u}_t / (\alpha \Delta t^2) + \dot{u}_t / (\alpha \Delta t) + (1/(2\alpha) - 1)\ddot{u}_t] \end{aligned} \quad (15)$$

当 $C=0$ 时, 从式(1)得

$$\mathbf{M} \ddot{u}_t + \mathbf{K} u_t = \mathbf{Q}_i \quad (16)$$

当 $t=0$ 时, 从(16)得

$$u_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{K}u_0) \quad (17)$$

至此,可用 Newmark 积分方法求解线性方程组,具体算法步骤和稳定性证明见参考文献[6].

4 算例及分析

下式为二维无量纲波动方程

$$\partial^2 u / \partial t^2 - a^2 (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2) = 0 \quad (18)$$

初始条件为

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x / l) \sin(\pi y / l) + 1$$

$$\dot{u}(x, y, 0) = 0$$

边界条件为

$$u(0, y, t) = 1; \quad u(l, y, t) = 1$$

$$u(x, 0, t) = 1; \quad u(x, l, t) = 1$$

解析解为

$$u = \cos(2^{1/2} \pi a / l) t \sin(\pi x / l) \sin(\pi y / l) + 1$$

式中: $a=1$, $l=2^{1/2}$. x 和 y 方向的单元数分别为 $N_m=N_n=6$, $N_x=N_y=6$; x 方向和 y 方向的网格数分别为 $N_x=6$, $N_y=6$; 步长 $h=0.001$ s, 步数 $N=10\ 000$, 相应时间 $t=hN=10$ s.

为讨论数值计算方法的可行性和分析误差,定义绝对误差为 e_a , 相对误差为 e_r , 按下式计算

$$e_a = u - \bar{u}; \quad e_r = (u - \bar{u}) / u$$

式中: u 为解析解; $\bar{u}$ 为数值解.

表 1 列出部分节点的计算结果,可证明本文数值方法求解波动方程(18)的可行性. 最大相对误差数量级约是 10^{-3} .

表 1 $t=10$ s 时部分节点上的绝对误差及相对误差

x	y	e_a	e_r
0.000 000 0.707 107	0.000 000 000 000	0.000 000 000 000	0.000 000 000 000
0.006 346 0.707 107	0.000 069 393 151	0.000 068 428 528	
0.023 684 0.707 107	0.000 258 867 925	0.000 245 934 843	
0.047 367 0.707 107	0.000 517 019 661	0.000 467 878 674	
0.071 051 0.707 107	0.000 773 740 734	0.000 668 643 029	
0.088 388 0.707 107	0.000 960 356 163	0.000 803 584 587	
0.094 734 0.707 107	0.001 028 320 629	0.000 850 627 260	
0.112 072 0.707 107	0.001 212 921 446	0.000 973 141 861	
0.159 439 0.707 107	0.001 707 294 108	0.001 267 642 922	

4.1 时间步长 h 对计算精度的影响

为探讨步长 h 对数值精度的影响,对式(18)分别采用 $h=0.2, 0.1, 0.01, 0.001$ s 进行求解. 网格剖分均为 $N_m=4, N_n=4, N_x=4, N_y=4$. 响应时间均为 $t=2$ s. 图 1 和图 2 分别给出不同步长对应的各网格点上的绝对误差. 对比可得,误差随步长减小

而减小.

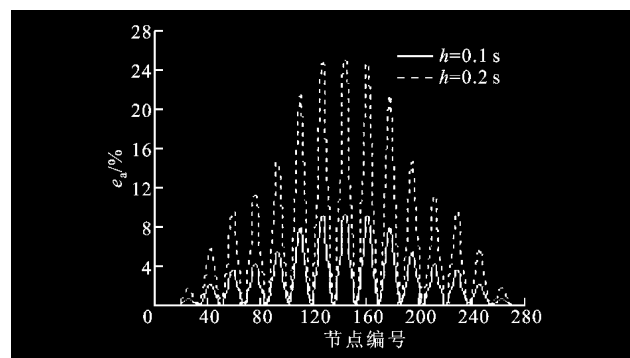


图 1 $h=0.1, 0.2$ s 时各网格节点上的绝对误差比较

4.2 δ 因子对计算精度的影响

为探讨 δ 对数值精度的影响, δ 分别取 0.6、0.7、0.8、0.9, 对式(18)进行求解, 网格剖分方式同 4.1 节, $h=0.01$ s, 响应时间均为 $t=2$ s. 图 3 和图 4 分别给出不同 δ 值对应的各网格点上的绝对误差. 对比可得误差随 δ 的减小而减小.

4.3 区域剖分方式对计算精度的影响

为探讨当总节点数相同, 但单元数和网格数不同时, 区域剖分方式对于计算精度的影响, 分别采用不同剖分方式求解式(21). 剖分方式分别为: $N_m=N_n=4, N_x=N_y=6$ (称 4×6 剖分格式, 反之亦然); $N_m=N_n=3, N_x=N_y=8$ (3×8 剖分格式); $N_m=N_n=2, N_x=N_y=12$ (2×12 剖分格式). 网格总数 $N_G = (N_m N_x + 1)(N_n N_y + 1) = 625$. $h=0.01$ s, $\delta=0.5, t=2$ s.

定义 $\epsilon = (N_x N_y) / (N_m N_n)$. 当 $\epsilon > 1$ 时, 表明单元内网格较密而单元较疏, 当 $\epsilon < 1$ 时, 表明单元数目较多而单元内网格较疏.

图 5~图 7 给出 $\epsilon > 1$ 时的绝对误差分布. 比较可得, 尽管以上几种剖分方式对应的最大误差几乎相等, 且产生在相同的总体节点处, 但在其他节点上, ϵ 越小则误差越小. 图 8~图 10 给出 $\epsilon < 1$ 时的绝对误差分布. 比较可得当 $\epsilon < 1$ 时, 计算区域采用不同的剖分格式时各节点的误差均相差不大.

5 结 论

(1) 采用 Chebyshev 谱元方法结合 Newmark 方法求解波动方程是可行的, 尽管 Newmark 方法牵涉到矩阵求逆, 但计算结果仍然具有较高的数值精度.

(2) 数值误差随着时间步长的减小而减小, 受时间步长的影响很大. 当 $h=0.2$ s 时, 最大绝对误差 $e_a=0.272\ 190\ 257\ 025$; 当 $h=0.001$ s 时, 最大绝

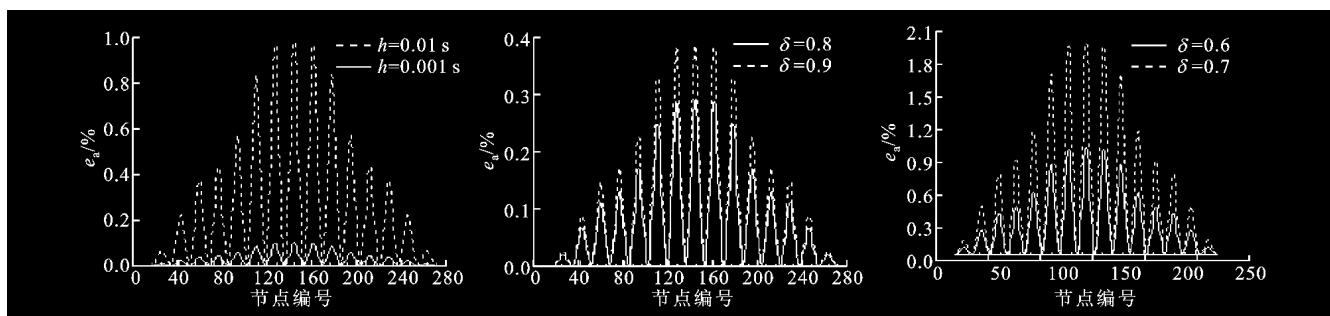


图2 $h=0.01, 0.001$ s时各网格节点上的绝对误差比较

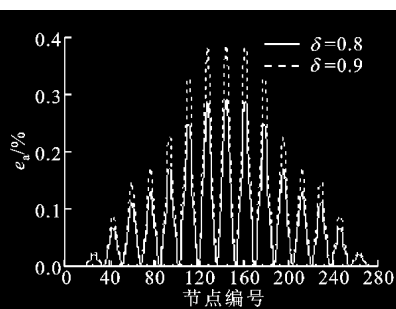


图3 $\delta=0.8, 0.9$ 时各网格节点上的绝对误差比较

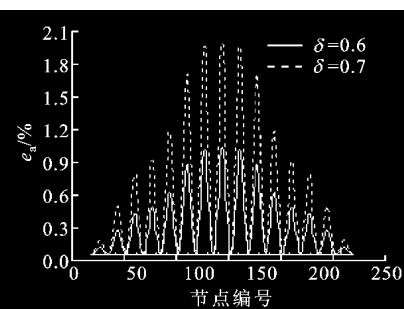


图4 $\delta=0.6, 0.7$ 时各网格节点上的绝对误差比较

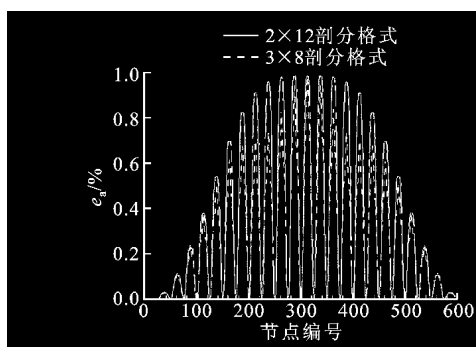


图5 $2 \times 12, 3 \times 8$ 剖分格式时各网格节点上的绝对误差比较

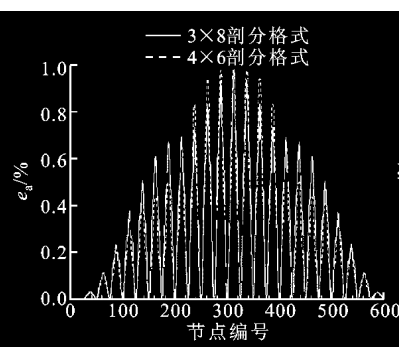


图6 $3 \times 8, 4 \times 6$ 剖分格式时各网格节点上的绝对误差比较

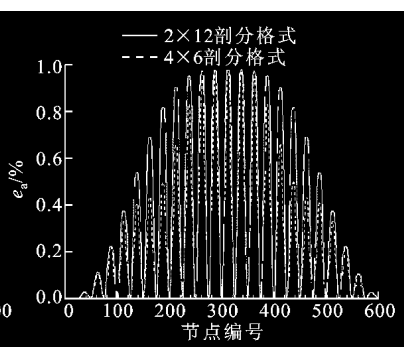


图7 $2 \times 12, 4 \times 6$ 剖分格式时各网格节点上的绝对误差比较

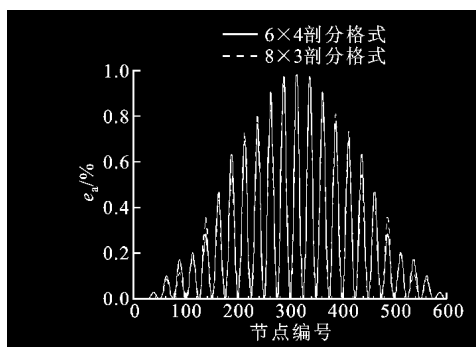


图8 $6 \times 4, 8 \times 3$ 剖分格式时各网格节点上的绝对误差比较

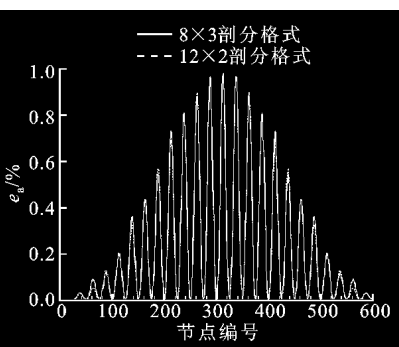


图9 $8 \times 3, 12 \times 2$ 剖分格式时各网格节点上的绝对误差比较

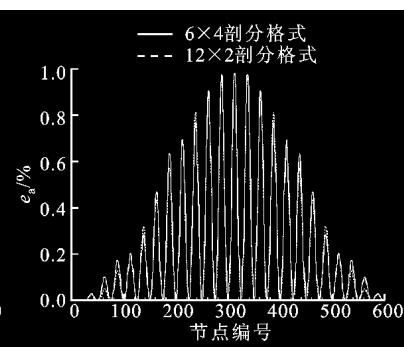


图10 $6 \times 4, 12 \times 2$ 剖分格式时各网格节点上的绝对误差比较

对误差 $e_a=0.000\ 986\ 182\ 775$, 两者相差约 276 倍。

(3) 在满足稳定性要求的前提下, 数值误差随着 δ 的减小而减小。可以推断, 当 $\delta=0.5$ 时, 即中心加速度法, 可得最小数值误差。

(4) 当总网格数相同而单元数不同且 $\epsilon > 1$ 时, 最大数值误差几乎相同, 但在其他网格节点上, ϵ 越小则计算精度越高; 当 $\epsilon < 1$ 时, 计算精度几乎不受 ϵ 影响。可以通过谱元方法的误差分析得出其中原因。

参考文献:

- [1] PETERA A T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion[J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54(3): 468-488.
- [2] 陈雪江, 秦国良, 徐忠. 谱元法和高阶时间分裂法求解方腔顶盖驱动流[J]. 计算力学学报, 2002, 19(3): 281-285.
CHEN Xuejiang, QIN Guoliang, XU Zhong. Spectral element method and high order time splitting method

- for Navier-Stokes equation[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(3):281-285.
- [3] 居鸿宾,沈孟育. 计算气动声学的问题、方法与进展[J]. 力学与实践, 1995, 17(5): 1-10.
JU Hongbin, SHEN Mengyu. The problem, method and progress of computational aeroacoustics [J]. Mechanics and Practice, 1995, 17(5): 1-10.
- [4] TAM C K W, WEBB J C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics [J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107(2):262-281.
- [5] GEZA S. An iterative time-stepping method for solving first-order time dependent problems and its application to the wave equation [J]. Journal of Computational Acoustics, 2000, 8(1): 241-255.
- [6] 王勘成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003:468-522.
- [7] 朱昌允. 谱元方法在求解气动声学问题中的应用[D]. 西安:西安交通大学能源与动力工程学院, 2006.

(编辑 王焕雪)