

分数阶阻尼 Duffing 系统的非线性动力学特性

曹军义, 谢航, 蒋庄德

(西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 采用4阶龙格库塔法和10阶连分式欧拉法, 数值计算、分析了分数阶阻尼 Duffing 系统的动力学特性. 利用相图、Poincare 截面映射图和分岔图等非线性动力学分析方法研究了阻尼的分数阶微积分阶数对 Duffing 系统动力学性能的影响, 采用分岔图法研究了外部激励的幅值和频率变化时分数阶阻尼 Duffing 系统的动力学行为. 分析表明, 分数阶阻尼的阶数在 0.1~2.0 发生变化时, 系统依次进入周期运动、混沌运动、周期运动、混沌运动和周期运动, 并且在混沌运动区间中存在着周期运动窗口, 由周期运动进入混沌运动的倍周期过程比较明显, 结果证实了阻尼的分数阶微积分阶数对系统的动力学特性影响比较大, 因此在系统动力学设计和分析中应该重视.

关键词: 分数阶微积分; 混沌; 非线性动力学; Duffing 系统

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)03-0050-05

Nonlinear Dynamics of Duffing System with Fractional Order Damping

CAO Junyi, XIE Hang, JIANG Zhuangde

(State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Nonlinear dynamics of Duffing system with fractional order damping is investigated. The equations of fractional order damped Duffing system are established. The four-order Runge-Kutta method and ten-order CFE-Euler methods are performed to solve the fractional order Duffing equations. The effects of fractional order on the system dynamics are proposed with phase diagrams, bifurcation diagrams and Poincare map. The bifurcation diagram is utilized to analyze the effect of excitation amplitude and frequency on Duffing system with fractional order damping. The analysis shows that the fractional order damped Duffing system exhibits period motion, chaos, period motion, chaos, period motion one by one when the fractional order change from 0.1 to 2.0. A period doubling route to chaos is appeared clearly. The numerical results verify the significant effect of fractional order on system dynamics. It is necessary to consider the fractional order of damping in the design and analysis of system dynamics.

Keywords: fractional calculus; chaos; nonlinear dynamics; Duffing system

最近十几年, 分数阶微积分在众多领域的成功应用引起了深远的影响, 这些领域包括黏弹性和流变、电气工程、电化学、生物工程学、信号与图像处理、力学、物理学、机电工程和控制工程等^[1-2], 因此分数阶微积分理论的应用基础研究已成为国际工程科学研究的热点和前沿. 最近几年, 分数阶微积分在机械工程领域方面的应用研究逐渐增加, 主要是由

于许多物理对象具有分数阶特性, 像黏弹性材料、阻尼、齿隙动态、机械摩擦和冲击等^[3-5]. 葡萄牙学者 Machado^[6]的研究表明, 即使系统的所有个体具有整数阶动态特性, 系统的整体动力学特性也可能是分数阶的. 因此, 基于分数阶微积分的动力学特性研究已成为系统动力学分析的重要基础之一.

Duffing 方程是在机械振动学、物理学、生物学

和神经学等领域广泛应用的数学模型,其丰富的非线性动力学行为吸引了许多研究者的兴趣.王林鸿^[7]提出液压缸的非线性弹簧力作用可以用有阻尼的 Duffing 系统方程来描述. Xu^[8]对复数 Duffing 系统方程的复杂动力学研究在物理和工程领域发挥了重要的作用,例如转子动力学等,而传统的整数阶阻尼模型利用分数阶微积分可以描述的更准确^[9-10],如高分子材料阻尼等.本文研究了具有分数阶阻尼的 Duffing 系统的动力学特性,采用相图、分岔图以及 Poincare 截面映射等方法,分析了阻尼的分数阶微积分阶次对系统动力学特性的影响,从而为机械系统的非线性动力学分析提供了理论依据.

1 分数阶微积分

根据 Grunwald-Letnikov 微积分定义,对连续可导函数 $f(t)$ 的 α 阶 Grunwald-Letnikov 分数微分如下

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \right\} \quad (1)$$

式中: α 为微积分的阶数; h 为步长; j 为二项式系数. 统一的微积分算子包括分数阶和整数阶,可以表示为

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} d^\alpha / dt^\alpha & \mathbf{R}(\alpha) > 0 \\ 1 & \mathbf{R}(\alpha) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \mathbf{R}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: a, t 为算子的积分上下界. 根据 Riemann-Liouville 分数微积分定义,分数阶微分的拉普拉斯变换为

$$L\{{}_0 D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - [{}_0 D_t^{\alpha-1} f(t)]_{t=0} \quad (3)$$

分数阶积分的拉普拉斯变换为

$$L\{{}_0 D_t^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (4)$$

对于分数阶微积分算子 s^α ,从复频域算子 s 到离散域 z 的变换方法有多种,不同的变换方法对应不同的变化函数,这些方法有后向差分法和双线性变换法等.其中,向后差分法又叫欧拉法,学者 Al-Alaoui 将向后差分法和双线性变换法通过线性组合,得到了新的离散变换函数 Al-Alaoui 算子^[11]. 如果将上述离散方法应用于分数阶系统,得到的离散系统是关于变量 z 的无理方程,需要对其进行有理近似化处理.目前,采用的有理化近似的方法主要有幂级数展开式法和连分数展开式法(Continued Fractional Expansion, CFE),并用 C_{FE} 表示 CFE 的运算符.

文献[12]的研究表明,由连分式复合算子法得

到的 10 阶离散近似模型,可以较好地近似于分数阶微积分算子.

连分式欧拉法的离散模型为

$$Z(s^\alpha) \approx \left(\frac{1}{T}\right)^\alpha C_{FE} \{(1 - z^{-1})^\alpha\} \quad (5)$$

连分式复合算子法的离散模型为

$$Z(s^\alpha) \approx \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha C_{FE} \left\{ \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}/7} \right)^\alpha \right\} \quad (6)$$

2 分数阶阻尼 Duffing 系统

Duffing 系统的方程为

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + c \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) + \lambda x^3(t) = f \sin(\omega t) \quad (7)$$

式中: m, c, k, λ 分别表示系统的质量、阻尼系数、线性刚度和非线性刚度系数; f, ω 分别为系统的外部激励力的幅值和频率. 从式(7)中可以看出,系统的阻尼为线性的,刚度为非线性的,而且 λ 的不同取值可以体现弹簧的软硬特性. 当 $k = -1$ 时,方程就成为著名的 Holmes 型 Duffing 系统.

外国学者 Maia^[9] 和 Hartley^[10] 都分别研究了用分数阶微积分来描述阻尼的物理模型,表明比用传统的整数阶微积分描述地更为精确. Shokooch^[4] 的研究表明,系统阻尼力与分数阶位移的导数成正比,并在分数阶导数为 0.5 时,针对单自由度和二自由度的系统进行了数值仿真分析. Silvio^[13] 提供了一种具有分数阶黏弹性阻尼的振动系统有限元分析方法,同时也证明了用分数阶黏弹性阻尼模型分析系统振动更接近于实际系统. 对于 Duffing 系统以往研究的阻尼项多是基于整数阶微积分的,即阻尼力与位移的一阶导数成正比,而众多的研究表明,采用分数阶阻尼描述的振动系统更能精确地体现机械系统的动力学特性. 采用分数阶微积分描述的系统阻尼力为

$$F_d = c D^\alpha x(t) ; 0 < \alpha < 1 \quad (8)$$

将式(8)代入到式(7)中,可以获得具有分数阶阻尼的 Duffing 系统方程

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + c D^\alpha x(t) + kx(t) + \lambda x^3(t) = f \sin(\omega t) \quad (9)$$

根据序列分数阶微积分的性质

$$\left. \begin{aligned} D^\alpha x(t) &= D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \cdots D^{\alpha_{n-1}} D^{\alpha_n} x(t) \\ \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

可以将式(9)转换为含有分数阶微分的方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^a x}{dt^a} &= y; & \frac{d^{(1-a)} y}{dt^{(1-a)}} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{m}(f \sin \omega t - \lambda x^3(t) - kx - cy) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)中的前 2 个分数阶方程可以先通过拉普拉斯变换,然后按照连分式离散法对其进行数字离散化处理,得到近似离散化方程. 方程组中最后 1 个方程可以通过常用的 4 阶龙格库塔数值解方法求解.

3 Duffing 系统的动力学特性

现代非线性动力学分析方法包括相图、Poincare 截面映射图和分岔图法等,可以很好地分析系统的非线性力学行为. 仿真分析采用了常用的动力学分析方法,Duffing 系统的动力学仿真研究在 matlab 环境中进行,分数阶微分的数值近似采用 10 阶的连分式离散模型. 其中,Duffing 方程的 $\lambda=1, k=-1, \omega=1, m=1, f=0.6, c=0.9$. 初始状态 $x(0)=y(0)=z(0)=0$. 为了得到系统响应的稳态值,仿真共计算了 150 个激励周期的数值解,而后 100 个周期的数值解采用相图、Poincare 截面映射图和分岔图法绘制. 由于数值计算的采样频率为激励频率的 100 倍,因此得到用于动力学分析的数据点为 10 000 个.

为了分析分数阶阻尼的阶数对 Duffing 系统的影响,实验中分数阶微积分的阶数 α 从 0.1 变化到 2.0,变化步长为 0.009. 以 α 为控制参数得到的系统分岔图如图 1 所示,从图中可以看出 α 对系统的动力学行为影响比较大,在 α 从 0.1 变化到 2.0 的过程中,有 2 个混沌运动区和 2 个周期运动区. 当 $\alpha \leq 0.38$ 时,系统响应表现为稳定的周期 1 运动,其相图和 Poincare 截面映射图如图 2 所示. 在 Poincare 截面映射图中, α 为一个稳定的离散点,随着 α 的增大,当 $\alpha=0.39$ 时,系统进入第 1 个混沌运动区,即在 $0.39 \leq \alpha < 0.73$ 的变化区间. 当 $\alpha=0.48$ 时,

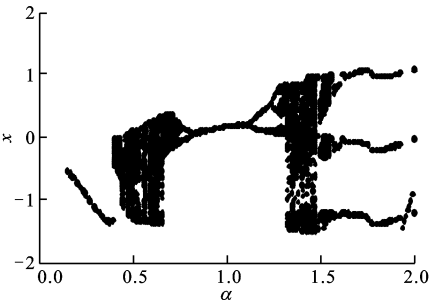


图 1 分数阶微积分阶数的分岔图

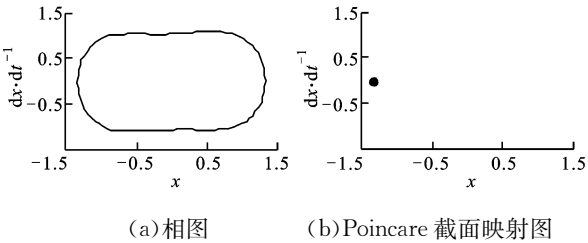


图 2 系统的相图和 Poincare 截面映射图($\alpha=0.38$)

Duffing 系统的相图和 Poincare 截面映射图在 Doincare 截面映射图上为一片分散的点(见图 3),而在第 1 个混沌区间中,存在着周期运动窗口,如 $\alpha=0.5$ 时为周期 4 运动. 随着 α 的进一步增大,系统由混沌运动进入到周期运动,从图 1 中很明显地看出,当 $0.81 \leq \alpha < 1.1$ 时,系统又进入到稳定的周期 1 运动. 在周期 1 运动和第 1 个混沌运动区之间出现一个倍周期分岔,随着 α 由 0.75~0.73 的逐渐减小,分数阶 Duffing 系统由周期运动经倍周期分岔进入混沌运动. 图 4 为 $\alpha=0.74$ 时,系统的相图和 Poincare 截面映射图,在 Poincare 截面映射图上表现为孤立的 4 个离散点(系统为稳定的周期 4 运动). 当 $\alpha=1$ 时,分数阶 Duffing 系统变成整数阶 Duffing 系统,采用 4 阶龙格库塔数值解法求得的系统相图和 Poincare 截面映射图如图 5 所示,它与用分数阶离散近似方程求得的结果非常接近. 当 $\alpha > 1.1$ 时,随着 α 的增加,系统由周期 1 运动经倍周期

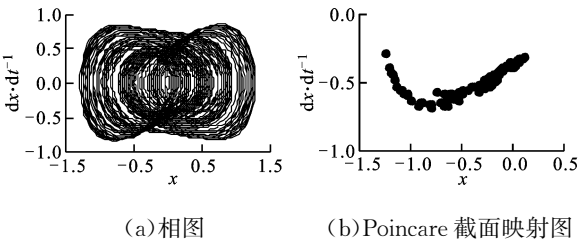


图 3 系统的相图和 Poincare 截面映射图($\alpha=0.48$)

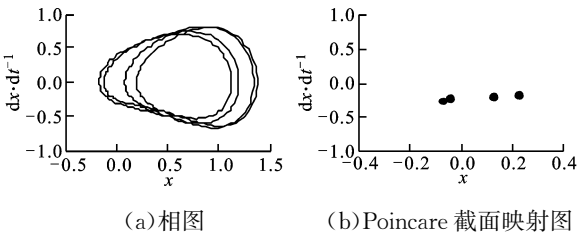


图 4 系统的相图和 Poincare 截面映射图($\alpha=0.74$)

分岔进入第 2 个混沌运动区($1.28 \leq \alpha \leq 1.58$). 如图 6 所示,在 $\alpha=1.38$ 时的 Poincare 截面映射图上,分

布着多片离散点,随着 α 的进一步增加,系统由混沌运动进入了稳定的周期 3 运动. 在 $\alpha=1.78$ 时的 Poincare 截面映射图上,分布着 3 个离散点(见图 7),此时系统为稳定的周期 3 运动.

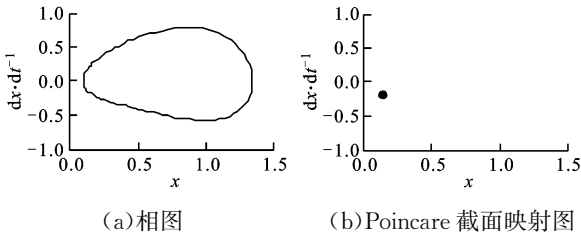


图 5 系统的相图和 Poincare 截面映射图($\alpha=1$)

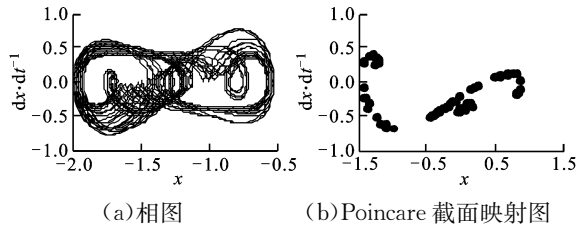


图 6 系统的相图和 Poincare 截面映射图($\alpha=1.38$)

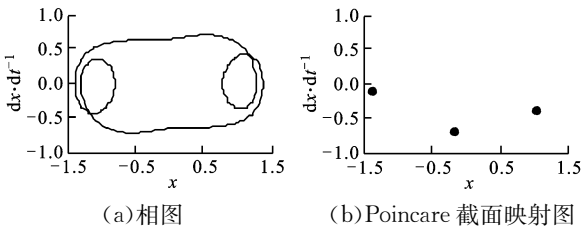


图 7 系统的相图和 Poincare 截面映射图($\alpha=1.78$)

以上分析主要针对以分数阶微积分阶数 α 为控制参数的 Duffing 系统分岔图,可以看出分数阶阻尼的阶数对系统动力学的影响比较大. 对于分数阶 Duffing 系统,当阶数一定时,其动力学特性随外界激励变化的数值分析结果与传统的整数阶系统的分析结果相同. 当 $\alpha=0.5$ 、 $f=0.6$ 、 $c=0.9$ 时,系统以 ω 为控制参数的系统分岔图见图 8. 当 $\alpha=0.5$ 、 $c=0.9$ 、 $\omega=1.0$ 时,以 f 为控制参数的系统分岔图如图 9 所示.

分数阶 Duffing 系统的动力学分析结果表明: 阻尼项的分数阶微积分阶数对系统的动力学特性影响非常大,当 α 在 $0.1\sim2.0$ 发生变化时,系统先由周期运动进入到混沌运动,然后又通过倍周期运动进入到稳定的周期 1 运动,随着 α 进一步增大,系统又通过倍周期运动进入到混沌运动状态,最终系统进入稳定的周期 3 运动状态.

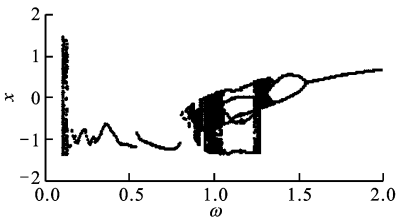


图 8 激励频率的系统分岔图

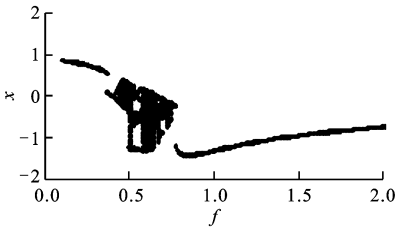


图 9 激励幅值的系统分岔图

4 结 论

本文引入分数阶微积分阻尼来研究分数阶 Duffing 系统的动力学特性,建立了分数阶阻尼 Duffing 系统的微分方程组. 利用相图、Poincare 截面映射图和分岔图等非线性动力学分析方法,研究了阻尼的分数阶微积分阶数对 Duffing 系统动力学性能的影响.

分数阶阻尼 Duffing 微分方程组的求解采用了 4 阶龙格库塔法和连分式欧拉法,首先用欧拉法离散分数阶微积分拉普拉斯算子,然后采用连分展开式在时域做有理化近似. 仿真计算采用连分式欧拉法的 10 阶近似模型,当 $\alpha=1$ 时,分数阶 Duffing 方程变成了整数阶 Duffing 方程,仿真对比表明连分式欧拉法可以很好地求解分数阶微分方程. 分数阶阻尼 Duffing 系统的参数对系统的动力学性能影响较大,通过相图、Poincare 截面映射图和分岔图等非线性动力学分析方法的分析表明,分数阶阻尼 Duffing 系统存在混沌运动,由周期运动进入混沌运动的倍周期过程比较明显,分析结果也表明可以通过调整分数阶阻尼项的微积分阶数来控制系统的动力学性能. 由于分数阶阻尼在众多机电系统中广泛存在,因此本文的分析方法可以在众多机械系统运动的力学分析中得到推广应用.

参考文献:

[1] DEBNATH L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003,

- 2003(54):3413-3442.
- [2] SABATIER J, AGRAWAL O P, MACHADO J A T. Advances in fractional calculus-theoretical developments and applications in physics and engineering [M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2007: 1-10.
- [3] JIA Jiahong, SHEN Xiaoyao, HUA Hongxing. Viscoelastic behavior analysis and application of the fractional derivative maxwell model [J]. Journal of Vibration and Control, 2007, 13(4): 385-401.
- [4] SHOKOOH A, SUAREZ L. A comparison of numerical methods applied to a fractional model of damping materials [J]. Journal of Vibration and Control, 1999, 5(3): 331-354.
- [5] BARBOSA R S, MACHADO J A T. Describing function analysis of systems with impacts and backlash [J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1/4): 235-250.
- [6] MACHADO J A T, GAIHANO A. Fractional dynamics: a statistical perspective [J]. ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2008, 3(2): 1-5.
- [7] 王林鸿, 吴波, 杜润生, 等. 液压缸运动的非线性动态特征 [J]. 机械工程学报, 2007, 43(12): 12-19.
WANG Linhong, WU Bo, DU Runsheng, et al. Nonlinear dynamic characteristics of moving hydraulic cylinder [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(12): 12-19.
- [8] XU Yong, MAHMOUD G M, XU Wei, et al. Suppressing chaos of a complex Duffing's system using a random phase [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2005, 23(1): 265-273.
- [9] MAIA N M M, SILVA J M M, RIBEIRO A M R. On a general model for damping [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 218(5): 749-767.
- [10] HARTLEY T T, LORENZO C F. A frequency-domain approach to optimal fractional-order damping [J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 38(1/2): 69-84.
- [11] AL-ALAOUI M A. Novel digital integrator and differentiator [J]. Electronics Letters, 1993, 29(4): 376-378.
- [12] 曹军义, 曹秉刚. 分数阶控制器离散方法的评估策略研究 [J]. 西安交通大学学报, 2007, 41(7): 842-846.
CAO Junyi, CAO Binggang. Evaluation strategies of fractional order controllers discretization methods [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, 41(7): 842-846.
- [13] SORRENTINO S, FASANA A. Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 299(4/5): 839-853.

(编辑 管咏梅)