

求积分卡尔曼粒子滤波算法

巫春玲, 韩崇昭

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对非线性/非高斯系统的状态估计问题, 提出一种采用求积分卡尔曼滤波(QKF)算法来产生重要性密度函数的粒子滤波新算法——PF-QKF 算法. 新算法使用统计线性回归的方法, 通过一套高斯-厄米特积分点来线性化非线性函数, 不需要计算雅可比矩阵, 易于实现, 而且所产生的重要性密度函数在系统状态转移概率密度的基础上, 融入最新的观测数据, 提高了对系统状态后验概率的逼近程度. 理论分析和实验结果表明, PF-QKF 算法的估计精度比无味粒子滤波(PF-UF)算法提高了约18%, 其计算复杂度比PF-UF 算法稍有降低, 表明PF-QKF 算法是一种很有效的非线性滤波算法.

关键词: 粒子滤波; 统计线性回归; 求积分卡尔曼滤波; 重要性密度函数

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)02-0025-04

Quadrature Kalman Particle Filter

WU Chunling, HAN Chongzhao

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A new kind of quadrature Kalman particle filter is proposed for the state estimation of nonlinear/non-Gaussian systems. The new algorithm uses the quadrature Kalman filter (QKF) to generate the importance density function, and linearizes the nonlinear functions using the statistical linear regression method through a set of Gaussian-Hermite quadrature points. The algorithm does not evaluate the Jacobian matrix, and is easy to implement. Moreover, the importance density function integrates the latest observations into the system state transition density, so that the approximation to the system posterior density is improved. Theoretical analysis and experimental results show that, compared with the unscented particle filter (PF-UF), the estimation accuracy of the new particle filter is improved by almost 18%, and its calculation cost is slightly reduced, which indicates the PF-QKF to be an effective nonlinear filtering algorithm.

Keywords: particle filter; statistical linear regression; quadrature Kalman filter; importance density function.

非线性/非高斯系统的状态估计问题在现代信号处理、图像处理、雷达跟踪以及自动控制等领域有着广泛的应用. 解决一般非线性状态估计问题最著名的算法就是扩展卡尔曼滤波(EKF)算法^[1], 但在非线性/非高斯条件下, 这种基于模型线性化和高斯假设的滤波方法在估计系统状态及方差时误差较大, 并有可能发散.

近来, 粒子滤波(PF)算法^[2]已被广泛用于解决非线性/非高斯滤波问题. 粒子滤波算法是利用一些随机样本来表示系统随机变量的后验概率分布, 并能应用于任意非线性随机系统. 对于一般的非线性系统, 一种常用的抽样方法是选取一个重要性密度函数来得到后验概率分布的带权子样(即重要性抽样方法), 因此重要性密度函数的选择就成为粒

子滤波方法的一个关键问题。

标准的粒子滤波算法^[2]选取系统状态的转移概率作为重要性密度函数,但用转移概率分布来产生预测样本时未考虑系统状态的最新观测,因此产生的样本同真实的后验概率产生的样本偏差较大。文献[3]提出用EKF来产生重要性密度函数,尽管基于EKF的粒子滤波方法在估计性能上有所改善,但由于EKF在模型线性化和高斯假设中引入过多误差,其改进效果不是很明显。后来,文献[4]在无味滤波(UF)算法^[5]的基础上提出了无味粒子滤波(PF-UF)算法,其状态估计性能要好于以往的粒子滤波算法。

本文使用求积分卡尔曼滤波(QKF)算法^[6]来产生重要性密度函数,并由此提出一种新的求积分卡尔曼粒子滤波算法——PF-QKF。由于QKF比EKF和UF均具有更高的估计精度,所以PF-QKF的性能得到了很大改进。

1 问题描述和粒子滤波算法

1.1 问题描述

考虑下面的非线性/非高斯随机状态空间模型

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k \quad (2)$$

式中: $\mathbf{x}_k$ 和 $\mathbf{z}_k$ 分别是 k 时刻的系统状态和量测;映射 $\mathbf{f}(\cdot)$ 和 $\mathbf{h}(\cdot)$ 分别代表系统状态转移模型函数和量测模型函数; $\mathbf{v}_{k-1}$ 和 $\mathbf{u}_k$ 分别是过程噪声和观测噪声。

本文算法的最终目的是以观测序列为基础,递归地估计后验概率分布函数 $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{z}_{1:k})$,尤其是边缘概率分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$,即滤波概率分布,其中 $\mathbf{x}_{0:k} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$, $\mathbf{z}_{1:k} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k\}$ 。

1.2 粒子滤波算法

粒子滤波算法^[2]是一种基于蒙特卡罗和递归贝叶斯估计的滤波算法,其基本思想就是通过寻找一组在状态空间中传播的随机样本对后验概率分布进行近似,以样本均值代替积分运算,从而获得状态的最小方差估计的过程,这些样本即称为粒子。

假定能够独立从滤波概率分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ 中抽取 N 个样本 $\{\mathbf{x}_k^{(i)}, i=1, \dots, N\}$,则可以用如下经验概率分布来近似滤波概率分布

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (3)$$

式中: $\delta(\cdot)$ 是狄拉克delta函数。此时基于最小均方误差准则意义下的状态最优估计及其协方差为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= E(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{(i)} \\ \mathbf{P}_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}) (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^{(i)})^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2 求积分卡尔曼滤波

求积分卡尔曼滤波算法^[6]是从统计线性回归的角度^[7]发展而来的,它使用高斯-厄米特求积分规则来计算所有条件密度的均值和协方差。已经证明QKF比EKF和UF具有更高的估计精度^[6]。QKF算法的详细流程如下。

(1)假定在 k 时刻,已知后验密度函数 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})$ 服从 $N(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})$ 分布,做如下因式分解

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \mathbf{S}_{k-1|k-1}^T \quad (5)$$

(2)计算积分点 $\{\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}\}_{i=1}^m$

$$\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (6)$$

(3)传播积分点,得到 $\{\mathbf{X}'_{i,k|k-1}\}_{i=1}^m$

$$\mathbf{X}'_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}) \quad i=1, \dots, m \quad (7)$$

(4)估计预测状态和相应的误差协方差

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{X}'_{i,k|k-1} \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{Q}_k + \sum_{i=1}^m \omega_i (\mathbf{X}'_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \cdot (\mathbf{X}'_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \quad (9)$$

式中: $\mathbf{Q}_k$ 是过程噪声协方差。

(5)做如下因式分解

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^T \quad (10)$$

(6)计算积分点 $\{\mathbf{X}_{i,k|k-1}\}_{i=1}^m$

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (11)$$

(7)传播积分点,得到 $\{\mathbf{Z}_{i,k|k-1}\}_{i=1}^m$

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k|k-1}) \quad i=1, \dots, m \quad (12)$$

(8)估计预测量测

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{Z}_{i,k|k-1} \quad (13)$$

(9)估计新息协方差矩阵

$$\mathbf{P}_{xx,k|k-1} = \mathbf{R}_k + \sum_{i=1}^m \omega_i (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \cdot (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \quad (14)$$

式中: $\mathbf{R}_k$ 是量测噪声协方差。

(10)估计互协方差矩阵

$$\mathbf{P}_{xx,k|k-1} = \sum_{i=1}^m \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \quad (15)$$

(11)卡尔曼增益计算

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xx,k|k-1} \mathbf{P}_{zz,k|k-1}^{-1} \quad (16)$$

(12)估计更新状态和相应的估计误差协方差阵

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{zz,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (18)$$

(13)对 $\mathbf{P}_{k|k}$ 进行平方根分解 $\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{S}_{k|k} \mathbf{S}_{k|k}^T$

上述流程中,式(5)~式(9)是时间更新,最后得到预测密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = N(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})$, 式(10)~式(18)为量测更新,最终得到后验密度 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = N(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$.

关于积分点 ξ_i 和相应的权 ω_i ,文献[6]给出如下的计算方法:考虑一个标量随机变量 x ,它具有高斯概率密度 $N(0,1)$,那么函数 $g(x)$ 的期望值可以近似为

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) N(0,1) dx \approx \sum_{i=1}^m \omega_i g(\xi_i) \quad (19)$$

对于寻找积分点,可以使用根查找法,然而这个方法可能在数值上不稳定.文献[8]提出一种计算上更加有效的方法,来找出积分点和相应的权.这个方法运用了正交多项式和三对角矩阵之间的关系.假定 $\mathbf{J}$ 是一个对称三对角矩阵,具有 0 对角元素,则有

$$J_{i,i+1} = (i/2)^{1/2} \quad 1 \leq i \leq (m-1) \quad (20)$$

式中: m 是积分点数,本文选用 3 点积分点,则 $m=3^{n_x}$, n_x 是状态维数.积分点 ξ_i 取为 $\xi_i = 2^{1/2} \lambda_i$,这里的 λ_i 是 $\mathbf{J}$ 的第 i 个特征值,且相应的权为 $\omega_i = ((\eta_i)_1)^2$,这里的 $(\eta_i)_1$ 是 $\mathbf{J}$ 的第 i 个标准化特征向量的第 1 个元素.

3 求积分卡尔曼粒子滤波算法

粒子滤波算法中,重要性密度函数的选择是其中的关键问题之一.本文采用比 EKF 和 UF 性能更好的滤波算法 QKF 来产生重要性密度函数,得到基于 QKF 的粒子滤波算法——PF-QKF.

(1)对 $k-1$ 时刻的样本集 $\{\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \omega_{k-1}^{(i)}, i=1, \dots, N\}$ 进行求积分卡尔曼滤波,得到 k 时刻每一个粒子及其协方差的估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(i)}$. 其中 $\omega_{k-1}^{(i)}$ 为各粒子的权值.

(2)重要性密度函数用以 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}$ 为均值、 $\mathbf{P}_{k|k}^{(i)}$ 为方差的一簇高斯分布构成,即

$$q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k}) = N(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(i)}) \quad (21)$$

用式(21)定义的重要性密度函数来产生预测样

本,预测样本集为

$$\{\mathbf{x}_k^{(i)}, i=1, \dots, N\}; \quad \mathbf{x}_k^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k})$$

(3)计算每一个粒子的权值

$$\omega_k^{(i)} = \omega_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_k)} \quad (22)$$

式中: $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{(i)})$ 是量测 $\mathbf{z}_k$ 的似然函数.归一化权值为

$$\bar{\omega}_k^{(i)} = \frac{\omega_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \omega_k^{(j)}} \quad (23)$$

(4)重抽样(粒子的选择):根据每个粒子的归一化权值对样本重新抽样.计算粒子容量值 $N_{\text{eff}} = 1 / \sum_{i=1}^N (\bar{\omega}_k^{(i)})^2$,若 $N_{\text{eff}} < N_{\text{th}}$ (N_{th} 为某一给定的阈值),执行重抽样,即保留或复制权值较大的粒子,删除权值较小的粒子,得到等权值样本集 $\{\mathbf{x}_k^{(i)}, N^{-1}, i=1, \dots, N\}$.

(5)输出:滤波分布的经验概率分布及系统状态估计和方差为

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{(i)} \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}) (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^{(i)})^T \quad (26)$$

4 实验和分析

4.1 实验场景

将本文 PF-QKF 算法与标准粒子滤波 PF 算法及采用 EKF、UF 算法作为重要性密度函数的粒子滤波 PF-EKF、PF-UF 算法进行了实验比较.实验所用的系统状态模型和量测模型^[4]如下

$$\mathbf{x}_k = 1 + \sin(0.04\pi k) + 0.5\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} \quad (27)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{cases} 0.2\mathbf{x}_k^2 + \omega_k & k \leq 30 \\ 0.5\mathbf{x}_k - 2 + \omega_k & k > 30 \end{cases} \quad (28)$$

式中:过程噪声 $\mathbf{v}_{k-1}$ 是服从 $\Gamma(3,2)$ 分布的随机变量;观测噪声 ω_k 是服从 $N(0,0.0001)$ 分布的高斯随机变量.系统状态的观测使用 2 个不同阶的观测模型.实验中,粒子数 N 均为 200,在每个时间步长都采用残差重采样方法,时间步长 $T=60$ s. QKF 的积分点数 $m=3$.系统状态估计采用均值估计器,即

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_k^j \quad (29)$$

每一次独立仿真实验的均方根误差定义为

$$E_{\text{RMS}} = \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (\hat{x}_i - x_i)^2 \right)^{1/2} \quad (30)$$

实验将 PF-QKF 算法与 PF、PF-EKF 和 PF-UF 算法进行了比较. 在一次独立实验中,不同粒子滤波算法的系统状态估计如图 1 所示. 图 2 为进行了 100 次独立实验后,4 种粒子滤波算法状态估计的均方根误差曲线. 各滤波算法的均方根误差的均值和方差如表 1 所示.

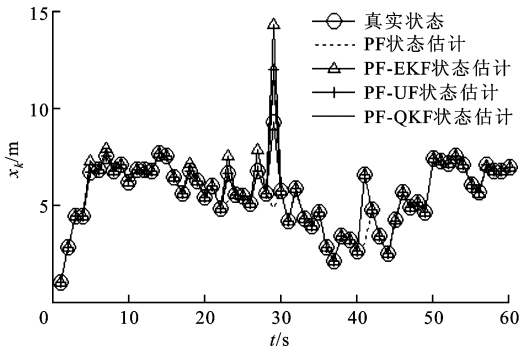


图1 不同算法产生的估计

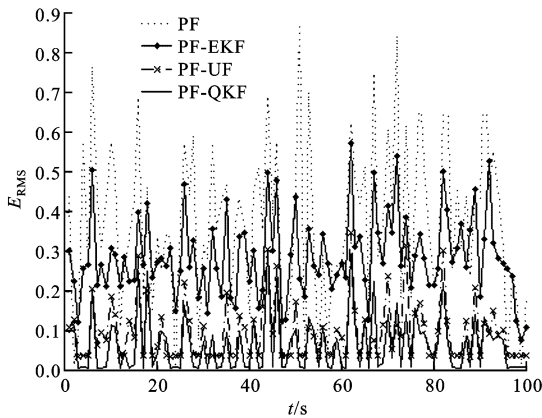


图2 不同算法的均方根误差

表1 100次独立运行的均方根误差的均值和方差

滤波算法	E_{RMS} 均值/m	E_{RMS} 方差/ m^2
PF	0.377 04	0.041 753
PF-EKF	0.287 13	0.010 891
PF-UF	0.095 59	0.005 600
PF-QKF	0.062 81	0.003 410

4.2 实验结果分析

从图 1 可以看出,标准的粒子滤波算法的状态估计有时会严重偏离真实状态,而 PF-UF 与 PF-QKF 粒子滤波算法所估计的状态能较好地吻合真实状态. 另外,几种粒子滤波算法单次独立实验的运算时间分别为:PF,2.827 2 s;PF-EKF,5.767 1

s;PF-UF,16.207 3 s;PF-QKF,11.443 8 s. 可以看出 PF-QKF 的运算时间比 PF-UF 稍有减少.

由图 2 及表 1 可以看出,PF-UF 与 PF-QKF 粒子滤波算法由于在产生预测粒子时利用了最新的观测数据,因此对状态的估计精度要明显高于标准的粒子滤波算法的精度,并且由于 PF-QKF 算法采用了 QKF 来产生预测粒子,因此其估计精度比 PF-UF 粒子滤波算法提高了约 18%,而且计算复杂度有所降低.

此外,对于 QKF 算法,积分点数选择得越高,其估计精度就越高,但计算复杂度也要增加. 本文选用的是 3 点的 QKF,如果选用积分点数是 5 的话,其计算精度就更高了,当然计算量也会相应增加,相应的 PF-QKF 算法的计算复杂度就有可能高于 PF-UF 算法.

5 结 论

本文介绍了一种新的求积分卡尔曼粒子滤波算法——PF-QKF,采用 QKF 算法来产生粒子滤波中的重要性密度函数. 仿真结果表明,PF-QKF 算法要明显优于标准的粒子滤波算法及扩展卡尔曼粒子滤波算法,并且由于 QKF 算法的代数精度要高于无味滤波算法,因此 PF-QKF 算法的估计精度比 PF-UF 算法高,而且其计算复杂度比 PF-UF 算法有所减小. 对于估计精度要求比较高的场合,可以增加 QKF 的积分点数,当然,相应的计算量也会增加. 总之,PF-QKF 算法是一种很有效的非线性滤波算法.

参考文献:

- [1] COSTA P. Adaptive model architecture and extended Kalman-Bucy filters [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1994, 30(2): 525-533.
- [2] GORDON N J, SALMOND D J, SMITH A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. IEE Proceedings on Radar and Signal Processing, 1993, 140(2): 107-113.
- [3] Doucet A. On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering, CUED/F-INFENG/TR. 310 [R]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998: 1-26.
- [4] VAN DER MERWE R, DOUCET A, DE FREITAS N, et al. The unscented particle filter, CUED/F-INFENG/TR, 380 [R]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000:1-45.

[5]

JULIER S J, UHLMANN J K. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401-422.

[6]

ARASARATNAM I, HAYKIN S, ELLIOTT R J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 953-977.

[7]

ITO K, XIONG K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.

[8]

GOLUB G H, WELSCH J H. Calculation of Gauss Quadrature rules [J]. Math Comput, 1969, 23(106): 221-230.

(编辑 刘杨)