

求解对流换热反问题的低阶模型

丁鹏, 陶文铨

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 在低阶模型的基础上开发了一种求解对流换热反问题的算法, 并采用最佳正交分解方法分别建立了直接问题、敏感度问题和伴随问题的低阶模型, 反问题求解采用了共轭梯度法. 算例为一圆管内流动充分发展、换热初始段时, 反求圆管壁面外未知热流密度的反问题, 分别研究了测量位置、测量误差对算法性能的影响, 结果表明通过将测量位置移向未知热流可以显著地提高解的精度和算法的稳定性, 同时共轭梯度法可以显著地减小测量误差对结果的影响. 所开发的算法可以在非常短的时间内得到较准确的解, 基于 CFD 模型的反问题算法迭代一步需要 6.5 s, 而文中算法迭代一步仅需要 0.078 s, 与基于 CFD 模型的反问题算法相比, 速度提高了 80 倍.

关键词: 最佳正交分解; 低阶模型; 对流换热反问题

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)03-0014-03

Reduced Order Model Based Algorithm for Inverse Convection Heat Transfer Problem

DING Peng, TAO Wenquan

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In this study, a reduced order model based algorithm was developed for inverse convection heat transfer. The reduced order models were established for the direct problem, the sensitivity problem and the adjoint problem respectively with the proper orthogonal technique(POD). The performance of the present algorithm was examined by an inverse forced convection problem to determine the unknown space-dependent heat flux at the outer boundary of a circular pipe. The inverse problem was resolved in a function optimization way by the conjugate gradient method. The results show that the present POD based inverse algorithm can significantly reduce the influence of measurement error on the computational results and obtain accurate solution in very short time. The computational speed of the present inverse algorithm is 80 times higher than that of the CFD based inverse algorithm.

Keywords: proper orthogonal decomposition; reduced order model; inverse convection heat transfer problem

反问题是指通过测量物理场内部信息反求边界条件、初始条件, 或者导热系数的问题. 反问题在实际工业生产中有非常重要的应用, 特别是应用在由于条件限制而不能直接对想知道的物理量进行测量的时候, 比如预测飞行器再入时外表面的热流密度分布, 预测未知材料的物性, 结构工程中的损坏探测

以及在浮法玻璃工业中预测玻璃的表面温度等. 同时, 反问题在核能工程、冶金铸造、化工领域、机械制造、冷冻储藏等工程中也有着重要的应用.

在求解反问题的算法中, 以 Alifanov^[1] 的共轭梯度法应用较为广泛. 由于共轭梯度法在求解反问题时需要反复求解控制方程, 求解过程非常费时, 从

而使得它在那些需要实时预测未知变量的领域中的应用受到了极大限制。

本文开发了以低阶模型为基础的共轭梯度法,使得求解反问题的时间大大减少。

1 物理问题

如图1所示,本文考虑一圆管内流动充分发展时,换热发展初始段的对流换热问题。圆管边界外为待求解的热流密度,其控制方程为

$$\rho C_p u(r) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

边界条件和初始条件为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \eta \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_o} = q(x); T(0, x) = T_0 \quad (2)$$

式中: $\rho=1\,000\text{ kg/m}^3$ 为密度; $C_p=4.183\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ 为比热容; $\eta=0.599\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ 为导热系数; $r_o=0.01\text{ m}$ 为圆管的半径; $T_0=300\text{ K}$ 为入口流体的温度。

入口的流速分布为

$$u(r) = 2u_{\text{avg}}(1 - r^2/r_o^2) \quad (3)$$

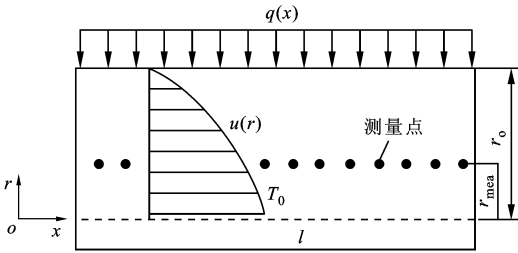


图1 物理问题示意图

本文采用有限容积法^[2]离散上述物理问题,网格数为 $2\,000 \times 100$ 。

2 最佳正交分解的理论基础

本文采用最佳正交分解(POD)^[3-5]方法建立物理问题的低阶模型。POD是一种高效的基于统计学的数据处理技术,利用POD可以将高维(N 维)的复杂数据变换到另外一个低维(n 维, $n \ll N$)坐标空间中。在这个 n 维空间内,原来高维的复杂数据可以准确地用 n 个坐标描述出来。

假设 $f(\mathbf{x}, t_n)$ 为已知物理场, $f(\mathbf{x}, t_n)$ 可以通过数值计算方法或者实验得到,称之为一个样本。POD的最终目的是得到一组最佳正交基(POM),从而将 $f(\mathbf{x}, t_n)$ 表示为以下的级数形式

$$f(\mathbf{x}, t_n) = \sum_{k=1}^M \alpha_k(t_n) \phi^k(\mathbf{x}) \quad M \ll \infty, n = 1, \dots, N \quad (4)$$

求解POM的过程等同于求解下面的积分特征值问题^[1-2]

$$\int_{\Omega} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}, t_n) f(\mathbf{x}', t_n) \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \phi(\mathbf{x}') \quad (5)$$

在实际计算中, Hermit 核 $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}, t_n) f(\mathbf{x}', t_n)$ 的维数与数值求解的离散网格数相同,所以运用 Hilbert-Schmidt^[3]方法直接求解式(2)在一般计算资源下很难完成。本文采用了 Sirovich^[6]的方法来求解,该方法的优势在于它将 Hermit 核的维数转变为与样本个数相等,从而大大节省了计算资源。式(4)中的系数 $\alpha_k(t_n)$ 是未知的,本文将求解未知系数 $\alpha_k(t_n)$ 的方程称为低阶模型。实施POD的基本过程包括:构建系统矩阵,构建自相关矩阵,最后求解特征值问题以获得最佳基函数。在一常数热流边界条件下求解上述物理问题,并将径向的温度分布作为一个样本,这样共获得2000个样本。对这2000个样本实施POD分解,求得其相应的基函数 $\phi(\mathbf{x})$ 。

3 低阶模型的建立

将控制方程的残量表示为

$$R = \rho C_p u(r) \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (6)$$

采用 Galerkin 投影^[7]的方法将残量投影到最佳基函数所代表的空间中,并要求其为0,即

$$\int_0^{r_o} R \phi^i(r) r dr = 0 \quad (7)$$

最后得到关于谱系数 $\alpha(x)$ 的低阶模型

$$\sum_{j=1}^M M_{ij} \frac{d\alpha_j(x_i)}{dx} = q(x) \phi^i(1) - \sum_{j=1}^M H_{ij} \alpha_j(x_i) \quad (8)$$

其初始条件为

$$\alpha_i(x_1 = 0) = \frac{\int_0^{r_o} \phi^i(r) T_{\text{in}} r dr}{\int_0^{r_o} \phi^i(r) \phi^i(r) r dr} \quad i = 1, \dots, M \quad (9)$$

式(8)中

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \int_0^1 \rho C_p u(r) \phi^i(r) \phi^j(r) r dr \\ H_{ij} &= \int_0^{r_o} \eta \frac{\partial \phi^i(r)}{\partial r} \frac{\partial \phi^j(r)}{\partial r} r dr \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

方程(8)可以使用求解常微分方程的常规方法求解。

4 反问题算法

采用共轭梯度法^[1]求解未知的边界热流可以转化为下面这个最优化问题,定义目标函数为

$$J = \sum_{n=1}^N \left[\sum_{k=1}^M \alpha_k(x_n) \phi^k(r_n) - T^*(x_n, r_n) \right]^2 \quad (11)$$

式中: N 代表热电偶的个数。为了求得目标函数关于未知热流的梯度,必须求解另外两个辅助问题,即敏感度和伴随问题,其相应的低阶模型如下。

敏感度问题的低阶模型

$$\sum_{j=1}^M M_{ij} \frac{d\hat{\alpha}_j(x_i)}{dx} = \Delta q(x) \phi^i(r_o) - \sum_{j=1}^M H_{ij} \hat{\alpha}_j(x_i) \quad (12)$$

边界条件

$$\hat{\alpha}_i(x_1 = 0) = 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (13)$$

伴随问题的低阶模型

$$\sum_{j=1}^M M_{kj} \frac{d\tilde{\alpha}_j(x_k)}{dx} = \sum_{j=1}^M H_{kj} \tilde{\alpha}_j(x_k) - 2 \left(\sum_{k=1}^M \alpha_k(x_{\text{mea}}) \phi^k(r_{\text{mea}}) - T^*(x_{\text{mea}}, r_{\text{mea}}) \right) \phi^k(r_{\text{mea}}) \quad (14)$$

初始条件

$$\tilde{\alpha}_i(l) = 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (15)$$

同时,可得到目标函数 J 对热流密度 q 的梯度为

$$\nabla J_q = \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k(x) \phi^k(1) \quad (16)$$

搜索步长 β 、共轭系数 γ 分别由下面两式得到

$$\beta^n = \int_0^L \left[\sum_{k=1}^M \alpha_k(x_{\text{mea}}) \phi^k(r_{\text{mea}}) - T^*(x_{\text{mea}}, r_{\text{mea}}) \right] \cdot \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k(x_{\text{mea}}) \phi^k(r_{\text{mea}}) dx / \int_0^L \left[\sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k(x_{\text{mea}}) \phi^k(r_{\text{mea}}) \right]^2 dx \quad (17)$$

$$\gamma^n = \int_0^L (\nabla J_q^n)^2 dx / \int_0^L (\nabla J_q^{n-1})^2 dx \quad (18)$$

最后,热流密度可以通过以下迭代公式求得

$$q^{n+1}(x) = q^n(x) + \beta^n P^n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

5 结果与讨论

为了模拟实际测量过程中产生的误差,本文对数值模拟值加上一个随机误差

$$T^* = T + \tilde{\omega}\sigma \quad (20)$$

式中: $\tilde{\omega}$ 为 $-2.567 \sim 2.567$ 内的一个随机数; σ 为标准偏差,本文取0和0.15。为了检测算法的准确度,定义相对误差为

$$E = \sum_{\Omega} \frac{|q' - q|}{|q|} / L \times 100 \quad (21)$$

式中: q' 代表本文预测得到的热流值; q 代表真实热流值; L 表示在 x 方向使用的网格数。下面给出利用本算法预测未知边界热流时的性能表现。

图2给出了 $\sigma=0$ 、测量位置在 $0.8r_o$ 处时算法预测的边界热流,此时 E 仅为0.93%。图3给出了 $\sigma=0.15$ 时的预测热流,测量位置在 $0.7r_o$ 处时, E 为4.38%,测量位置在 $0.8r_o$ 处时, E 为2.16%。

本文引用POD方法建立了对流换热问题的低阶模型,开发了基于低阶模型的求解对流换热反问题的共轭梯度算法。计算结果表明,基于CFD的反

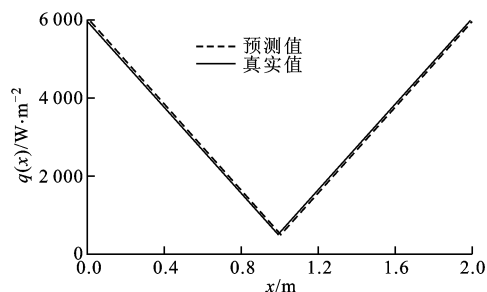
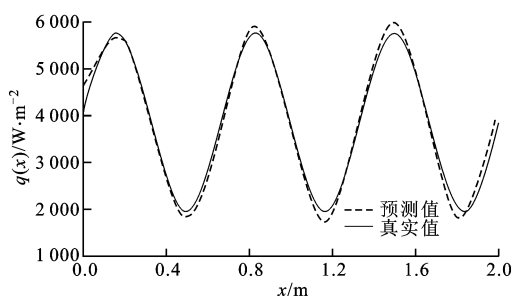
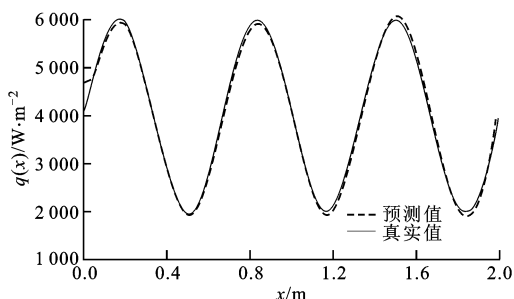


图2 $\sigma=0$ 时算法预测的边界热流(迭代步数为12)



(a)测量位置在 $0.7r_o$ 处,迭代步数为8



(b)测量位置在 $0.8r_o$ 处,迭代步数为9

图3 $\sigma=0.15$ 时算法预测的边界热流

问题算法迭代一步需要 6.5 s,而基于本文低阶模型的反问题算法迭代一步仅需要 0.078 s,且可以给出相当准确的解.

参考文献:

[1] ALIFANOV O M. Inverse heat transfer problems [M]. Berlin,Germany: Springer-Verlag, 1994.

[2] PANTANKAR S V. Numerical fluid flow and heat transfer [M]. New York, USA: Academic Press, 1981.

[3] 丁鹏, 陶文铨. 一种预测流动和传热问题的快速算法 [J]. 西安交通大学学报, 2007,41(3):271-273.
DING Peng, TAO Wenquan. Fast algorithm for prediction of fluid flow and heat transfer[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007,41(3):271-273.

[4] BERKOOZ G, HOLMES P, LUMLEY J L. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows [J]. Annual Review Fluid Mech, 1993, 25:539-575.

[5] HOLMES P, LUMLEY J L, BERKOOZ G. Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry [M]. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1996.

[6] SIROVICH L. Turbulence and the dynamics of coherent structure [J]. Q Appl Math, 1987(3):561-571.

[7] DING Peng, WU Xuehong, HE Yaling, et al. A fast and efficient method for predicting fluid flow and heat transfer problems[J]. ASME Journal of Heat Transfer, 2008,130(3):032502. 1-17.

(编辑 荆树蓉)