

基于小波变换的扩散滤波模型数值解的收敛性

曹毅, 刘峰
(西安交通大学理学院, 710049, 西安)

摘要: 证明了基于小波变换的扩散滤波模型数值解的收敛性. 结果表明, 如果假定该模型的弱解存在惟一并满足一些正则性假设, 则用半隐迭代格式得到的数值解收敛到原方程的弱解. 考虑到图像边缘的多尺度效应, 该模型用小波变换模代替以往模型中的梯度模, 在去噪的同时较好地保持了图像的边缘信息, 并克服了经典去噪模型不能有效地除去图像边缘处噪声的弱点. 该模型在医学图像处理中展现了良好的性能.

关键词: 扩散滤波模型; 小波变换; 弱解

中图分类号: O241.84 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)04-0121-04

Convergence of Numerical Solution for Diffusion Filtering Model Based on Wavelet Transform

CAO Yi, LIU Feng
(School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Nonlinear diffusion filtering is conducted based on partial differential equations (PDEs), and the convergence in a class of diffusion model based on wavelets is proved. If the model has an uniquely regular weak solution, the semi-scheme of the model is thus convergent. The magnitude of the gradient is replaced by the magnitude of the wavelet transform in the model for image denoising while edges are preserved, especially, for medical image processing.

Keywords: diffusion filtering model; wavelet transform; weak solution

非线性扩散是一种基于偏微分方程(PDE)的信号与图像处理方法, 基本思想是建立一个适当的关于时间和空间变量的 PDE 模型, 把解作为恢复的信号或图像. 该方法可以在滤除噪声的同时, 较好地保持图形的边缘, 因而受到了广泛的关注与研究. 目前, 非线性扩散方法已被成功地应用于图像的平滑、分割, 特别是在医学图像处理中展现了良好的性能.

如何确定不同点处的扩散量是非线性扩散的一个基本问题. 文献[1]给出了一类基于小波变换的扩散滤波模型. 在该模型中, 扩散量可以通过单一尺度或几个尺度上的小波系数来计算, 很好地反映了不同尺度下的图像信息.

本文假定该模型的弱解存在惟一, 并满足一些正则性假设, 使用单一尺度小波系数计算模型中的扩散量, 结果表明, 采用半隐迭代格式的数值解收敛到该模型的严格解.

1 非线性扩散模型

假设观察图像为 $u_0(x, y) = u(x, y) + n(x, y)$, 其中 $u(x, y)$ 为原图像, $n(x, y)$ 是噪声. 为了恢复原图像, 人们已经发展了多种扩散模型. 文献[2]引入了如下的非线性各向异性扩散模型^[2], 在扩散滤波的同时能够较好地保持图像边缘

$$u_t = \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2) \cdot \nabla u); \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

通常取 $g(s)$ 为非负的光滑单调下降函数, 且使 $g(0) = 1, \lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$, 例如取函数 $g(s^2) = 1/(1+s^2)$. 该选择意味着在图像变化平缓的区域做较多的平滑,

而在边缘上作较少平滑,甚至不作平滑处理,从而达到在去噪的同时保持图像边缘的目的. 根据 $g(s)$ 的不同,模型(1)确定了不同的非线性扩散滤波器.

当图像含有大的噪声时,由于 P-M 模型采用梯度检测图像边缘,常常不能区分图像的真边缘和噪声引起的假边缘. 解决该问题的一个办法自然是对处理图像做 Gauss 滤波. 通过用 $g(|G * \nabla u|^2)$ (这里 G 为 Gauss 函数)代替 $g(|\nabla u|^2)$ 的方法改进的 P-M 模型,称为 Catte 模型^[3]. 显然, Catte 模型能有效地克服噪声对扩散滤波的干扰,但其扩散函数不能充分提取对应不同尺度的图像边缘信息.

由此可见,如何检测图形边缘是非线性扩散的一个基本问题. 我们知道,图像的边缘信息可以被小波变换的系数反映,并随着尺度 a 的增加而快速衰减. 于是,自然考虑用小波变换的模式代替梯度模,这样做的好处是考虑了图像边缘的多尺度效应. 文献[1]用 $g(M_a^2 u)$ 代替 $g(|\nabla u|^2)$,给出基于小波变换的扩散滤波模型

$$u_t = \operatorname{div}(g(M_a^2 u) \cdot \nabla u); \quad u(0, x) = u_0 \quad (2)$$

这里 $M_a^2 u$ 是小波变换的模平方,反映了图像的灰度变化. 具体地说,在图像缓变的区域 $M_a^2 u$ 的值较小,而在图像的边缘处, $M_a^2 u$ 的值较大. 换言之,不同点中的扩散量取决于该点处小波变换的模.

小波变换的模平方 $M_a^2 u$ 的计算过程如下: 设 $\phi(x, y)$ 是二维基本小波,记二维函数 $f(x, y) \in L^2(R^2)$ 的连续小波变换为下面的卷积

$$\begin{aligned} W_a f(x, y) &= \\ \iint_{R^2} f(u, v) \overline{\phi_a}(x-u, y-v) du dv &= \\ f * \overline{\phi_a}(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $\phi_a(u, v) = \frac{1}{a} \phi(u/a, v/a)$, $a > 0$ 表示尺度. 通常,二维小波变换有 3 个方向上的分量,这里主要用小波变换检测图像的边缘,因此只用到水平与垂直方向的小波 $\psi^1(x, y)$ 与 $\psi^2(x, y)$. 我们记 $W_a^k f(x, y) = f * \overline{\psi_a^k}(x, y)$ ($k=1, 2$),则在点 (x, y) 处小波变换的模平方为

$$M_a^2 f(x, y) = |W_a^1 f(x, y)|^2 + |W_a^2 f(x, y)|^2 \quad (4)$$

在 Catte 模型中,扩散量是由梯度做 Gauss 滤波后确定的. 对于包含不同结构和纹理的图像来说,这种方法可能丢失一些小的边缘. 在基于小波变换的扩散滤波模型中,不同点中的扩散量取决于该点处小波变换的模. 扩散量可以通过单一尺度或几个

尺度上的小波系数来计算,由此确定的扩散量很好地反映了图像的奇异性,从而也降低了噪声对扩散过程的干扰.

当所选取的基本小波为 Gauss 波时,对图像做小波变换等价于用 Gauss 函数与 ∇u 做卷积,所以 Catte 模型是基于小波变换的扩散模型的特例.

为用数值方法求解扩散方程(2)的近似解,我们考虑如下半隐迭代格式

$$\left. \begin{aligned} u_t^{k+1} - \operatorname{div}(g(M_a^2 u^k) \nabla u^{k+1}) &= 0 & \Omega \times (0, T] \\ \frac{\partial u^k}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} &= 0 & \partial \Omega \times (0, T] \\ u^{k+1}(0) &= u_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: $u^0 = u_0$; $k=0, 1, 2, \dots$; Ω 表示平面上的区域 $(0, 1; 0, 1)$; n 表示 Ω 的外法线方向. $g(s^2)$ 是定义在 R^+ 上的光滑单调递减函数,且满足 $g(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s^2) = 0$.

2 主要结果

定义整数阶 Soblev 空间^[4] (其中 m 是非负整数, $1 \leq p \leq \infty$) 如下

$$H^m(\Omega) = \{u; u \in L^2(\Omega), \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

其中 $\partial^\alpha u$ 是 u 的弱导数,且 $0 \leq |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq m$. 给定此空间中元素的范数为 $\|u\|_{m, \Omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$, 则 $H^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 当 $m=0$ 时,则 $H^m(\Omega) = L^2(\Omega)$.

设 X 是实 Banach 空间,其范数为 $\|\cdot\|$, 空间 $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p < \infty$) 定义为 $\{u(x, t): \text{对几乎处处的 } t \in (0, T), u(t) \in X\}$, 其范数为

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u\|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

定义赋范线性空间 $C([0, T]; X) = \{u(x, t): u(t) \in X, \forall t \in [0, T]\}$, 其范数为

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|$$

下面,我们给出一些假定: 设 $u_0 \in L^2(\Omega)$, 对某个固定的尺度 a 和固定的小波 $\phi(x) \in L^2(\Omega)$, 模型(2)存在惟一的弱解 u , 并有

$$\begin{aligned} u(x, t) &\in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \\ \|u\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))} &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (6)$$

此时我们有定理 1 成立.

定理 1 在上述条件下,假设 $\{u^k\}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 是式(5)的解(这里 u^0 表示 u_0), 并且 u^k 满足式(6), 则

u^k 在 $C([0, T]; L^2(\Omega))$ 中收敛于原方程的严格弱解 u .

为证明定理,我们先给出引理 1.

引理 1 设区域 Ω 、尺度 a 和函数 $g, \phi(x)$ 如上所述,假定 $u, w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, 则下面结论在 $\Omega \times [0, T]$ 中几乎处处成立.

(1) 存在仅与 g, ϕ_a 和 $\|w\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}$ 有关的常数 $\delta > 0$, 使 $g(M_a^2 w) \geq \delta$.

(2) 存在仅与 g, ϕ_a 有关的常数 C , 使 $|g(M_a^2 u)(t) - g(M_a^2 w)(t)| \leq C \|u(t) - w(t)\|_{L^2(\Omega)}$.

证明 设 $t_0 \in (0, T]$, 则 $u(t_0), w(t_0) \in L^2(\Omega)$. 因为 $\phi_a \in L^2(R^2)$, 由式(3)得 $W_a^k w(t_0, x) = w(t_0) * \phi_a^k$ ($k=1, 2$), 则有

$$\sup_{x \in \Omega} |W_a^k w(t_0, x)| = \|w(t_0) * \phi_a^k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w(t_0)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_a^k\|_{L^2(R^2)}$$

由式(4)及上式可得

$$\begin{aligned} M_a^2 w(t_0, x) &\leq \\ (\|\phi_a^1\|^2 + \|\phi_a^2\|^2) \|w(t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \\ (\|\phi_a^1\|^2 + \|\phi_a^2\|^2) \|w\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 & \end{aligned}$$

因为 g 是光滑的严格递减函数, 取 $\delta = g((\|\phi_a^1\|^2 + \|\phi_a^2\|^2) \|w\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2)$, 可以得到结论(1).

下面证明结论(2), 因为 $|u(t_0) * \phi_a^k - w(t_0) * \phi_a^k| \leq \|\phi^k\|_{L^2(\Omega)} \|(u-w)(t_0)\|_{L^2(\Omega)}$, 故由 g 是光滑函数及式(4), 得

$$\begin{aligned} |g(M_a^2 u)(t_0) - g(M_a^2 w)(t_0)| &\leq \\ C |M_a^2 u(t_0) - M_a^2 w(t_0)| &\leq \\ C \|(u-w)(t_0)\|_{L^2(\Omega)} & \end{aligned}$$

其中 C 是仅依赖于 g 和 ϕ_a 的常数, 可以得到结论(2). 证毕.

定理 1 的证明 取 $t_0 \in (0, T]$, 不妨设 $u(t_0, x) \in L^2(\Omega)$ (由式(6)). 设 $G(t) = g(M_a^2 u(t, x))$, $G^k(t) = g(M_a^2 u^k(t, x))$, 由引理 2 得

$$G(t) \geq \delta; \quad G^k(t) \geq \delta \quad (7)$$

式中: δ 是仅与 $g, \phi_a, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ 有关的常数.

$$\|G^k(t) - G(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|(u^k - u)(t)\|_{L^2(\Omega)} \quad (8)$$

式中: C 是仅依赖于 g 和 ϕ_a 的常数.

再由式(6)得

$$\|(u^0 - u)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \quad (9)$$

式中: C_0 是仅依赖于 u_0, g 和 ϕ_a 的常数. 分别把 u^{k+1}, u 代入式(5), 再相减得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u^{k+1} - u)(t) - \operatorname{div}(G^k(t) \nabla(u^{k+1} - u)(t)) &= \\ \operatorname{div}((G^k - G)(t) \nabla u(t)) & \\ \text{两边同乘 } u^{k+1} - u, \text{ 得} & \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(u^{k+1} - u)(t)]^2 - & \\ \operatorname{div}(G^k(t) \nabla(u^{k+1} - u)(t))(u^{k+1} - u)(t) &= \\ \operatorname{div}((G^k - G)(t) \nabla u(t))(u^{k+1} - u)(t) & \quad (10) \end{aligned}$$

对等式两端积分, 左边第二项即

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(G^k(t) \nabla(u^{k+1} - u)(t))(u^{k+1} - u)(t) dx &= \\ - \int_{\partial\Omega} G^k(t) \nabla(u^{k+1} - u)(t) \frac{\partial}{\partial n}(u^{k+1} - u)(t) ds &+ \\ \int_{\Omega} G^k(t) |\nabla u^{k+1}(t) - \nabla u(t)|^2 dx &= \\ \int_{\Omega} G^k(t) |\nabla u^{k+1}(t) - \nabla u(t)|^2 dx & \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}((G^k - G)(t) \nabla u(t))(u^{k+1} - u)(t) dx &= \\ - \int_{\Omega} (G^k - G)(t) \nabla u(t) \nabla(u^{k+1} - u)(t) dx & \end{aligned}$$

则式(10)可化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |(u^{k+1} - u)(t)|^2 dx &+ \\ \int_{\Omega} G^k(t) |\nabla(u^{k+1} - u)(t)|^2 dx &= \\ - \int_{\Omega} (G^k - G)(t) \nabla u(t) \nabla(u^{k+1} - u)(t) dx & \\ \text{由式(7)、式(8), 并对右端用 Holder 不等式, 得} & \\ \frac{d}{dt} (\|(u^{k+1} - u)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) &+ \\ \delta \|\nabla(u^{k+1} - u)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \\ \|(G^k - G)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u^{k+1} - & \\ u)(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|(u^k - \\ u)(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u^{k+1} - u)(t)\|_{L^2(\Omega)} & \\ \text{即} \quad \frac{d}{dt} (\|(u^{k+1} - u)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) &\leq \\ \frac{4}{\delta} C \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|(u^k - u)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 & \quad (11) \end{aligned}$$

记 $\alpha(s) = \frac{4}{\delta} C \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$, 则由式(9)和式(11), 可得

$$\|(u^1 - u)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t C_0 \alpha(s) ds \quad (12)$$

再由式(11)和式(12), 得

$$\frac{d}{dt} (\|(u^2 - u)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq C_0 \alpha(t) \int_0^t \alpha(s) ds$$

即

$$\| (u^2 - u)(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \frac{1}{2} \left(\int_0^t \alpha(s) ds \right)^2 \quad (13)$$

经过迭代即得

$$\| (u^{k+1} - u)(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \frac{1}{(k+1)!} \left(\int_0^t \alpha(s) ds \right)^{k+1} \quad (14)$$

由式(14)即可推出 u^k 在 $C([0, T]; L^2(\Omega))$ 中收敛于式(2)的严格的弱解 u . 证毕.

参考文献:

[1] LIU Feng. Diffusion filtering in image processing

based on wavelet transform[J]. Science in China(series F), 2006, 49(4): 494-503.

[2] PERONA P, MALIK J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE TPAMI, 1990, 12(7): 629-639.

[3] CATTE F, LIONS P L, MOREL J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. SIAM J Num, 1992, 29(1): 182-193.

[4] EVANCE L C. Partial differential equations [M]. Providence, Rhode Island, USA: American Mathematical Society Prov., 1998.

(编辑 杜秀杰)