

用切比雪夫谱元方法求解均匀流场中的声传播问题

张荣欣, 秦国良

(西安交通大学流体机械研究所, 710049, 西安)

摘要: 利用谱元方法中的无穷光滑插值函数的高阶精度特点, 结合隐式时间推进算法的稳定性, 推导并实现了低马赫数均匀流场中声波动方程的切比雪夫谱元解法, 进而得到了流场影响下的声传播问题的数值解. 该解法对均匀流场中的声传播问题在空间上进行谱元离散, 在边界上引入 Clayton-Engquist-Majda 吸收边界条件, 在时间上利用隐式 Newmark 积分方法推进求解. 算例与解析解的对比验证表明: 该解法在空间上可以实现高阶精度, 在时间上达到 2 阶精度; 使用的隐式 Newmark 时间积分方法稳定性好, 计算工作量相对较小; 当数值解达到稳态传播时和解析解吻合得非常好. 随着计算条件的飞速发展, 加密网格并采用更高阶的切比雪夫谱逼近可以进一步提高精度, 以适应计算气动声学的精度要求, 另外可尝试采用更高精度的吸收边界条件以改善边界反射对计算声场的干扰.

关键词: 计算气动声学; 谱元方法; 吸收边界条件; 高精度

中图分类号: O42 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)07-0120-05

Chebyshev Spectral Elements Method for Acoustic Propagation Problem in a Uniform Mean Flow

ZHANG Rongxin, QIN Guoliang

(Institute of Fluid Machinery, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: High order accuracy is of great significance for computational aero-acoustics (CAA). On the basis of the high order accuracy of the infinite smooth interpolation function adopted in the spectral elements method, a Chebyshev spectral elements approximation for the acoustic propagation problem in the subsonic uniform mean flow is applied in this study. In this approach, the discretization is based on spectral elements in space with first-order Clayton-Engquist-Majda absorbing boundary conditions and the implicit Newmark method in time marching. The numerical results with sixth-order spectral accuracy in space and up to second-order in time agree well with the analytical solutions. The Newmark method in time with less computing resource consumption also has the advantages of stability. The higher order spectral approximation can be employed to further enhance the accuracy and higher order absorbing boundary conditions might be applied to improve the spectral element approach.

Keywords: computational aero-acoustics; spectral elements method; absorbing boundary condition; high order accuracy

气动声学领域的开拓是以 Lighthill^[1]非齐次波动方程及其解的提出为标志的, 是建立在气体动力学和古典声学基础上的一门交叉学科, 主要研究流动和流固作用的发声机理以及声音在流体中的传播

问题, 而计算气动声学是用数值方法来研究气动声学问题, 是气动声学领域中一个重要的研究方向. 目前的数值模拟方法仍然是有限差分^[2-4]和有限元^[5]空间离散占据着主导地位, 虽然其中一些高阶格式,

如 E-N-O (high-order essentially non-oscillatory) 格式^[6], D-R-P (dispersion-relation-preserving) 格式^[7]等已经可以达到 3 阶或者 4 阶精度,但在实际问题中,由于声场量和流场量数量级相差甚远,声音产生和传播的高精度数值求解仍然是一个十分困难的问题^[8-9]. 谱元方法由于其高精度的优点开始应用于气动声学问题. 谱元方法是 Patera^[10]在结合谱方法的精度和有限元的思想上提出的,由于在单元上采用无穷光滑的插值函数,其精度可以根据需求和计算条件进行调节,且和有限元方法有同样出色的几何区域适应性,非常适合求解气动声学问题.

在气动声学领域常常遇到介质或声源运动的情况,此时就必须考虑流速对声传播的影响. 本文应用谱元方法模拟基于线性化欧拉方程的声传播方程,着重讨论了包含流速影响的声传播问题,对亚声速流场中的声传播问题进行模拟,在单元上采用具有 6 阶精度的切比雪夫谱函数进行逼近,在边界上采用 1 阶 C-E-M 吸收边界条件消除边界反射对声场的影响,最后进行了算例的模拟并和解析解进行了对比分析.

1 控制方程

对于均匀稳定流场中的无源声波扰动问题,假设流场速度为

$$\mathbf{u} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j}$$

式中: U, V 为常数. 设 $V=0$, 应用小扰动理论可以得到远场声波扰动的线性化欧拉方程和连续方程^[11]如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho_0 U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + \rho_0 U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

式中: $\rho', \mathbf{u}' = (u', v'), p'$ 分别代表密度、速度和压力的声波扰动量. 在实际问题中,由于固体边界运动所产生的流体体积位移可以归结为单极子声源,即相当于在连续方程中引入体积流量源 Q , 设当地声速为 c_0 , 引入流场马赫数 $Ma = U/c_0$, 上述方程组可以化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + 2c_0 Ma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right) - \\ c_0^2 \left((1 - Ma^2) \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

边界条件的设置在求解计算气动声学问题时也

是至关重要的. 由于计算边界上的声反射会干扰声场的精确计算,因此在计算域 $\Omega \times (0, T)$ 的边界 $\partial\Omega$ 上同时定义第一类、第二类边界条件和吸收边界条件如下:

第一类边界条件

$$p'(x, y, t) \Big|_{\Gamma_1} = f(x, y, t) \quad (2)$$

第二类边界条件

$$\frac{\partial p'}{\partial n}(x, y, t) \Big|_{\Gamma_2} = g(x, y, t) \quad (3)$$

吸收边界条件^[12-14]

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \quad (4)$$

这里, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

定义初始条件如下

$$\begin{aligned} p'(x, y, 0) &= p'_0(x, y) \\ \frac{\partial p'}{\partial t}(x, y, 0) &= p'_1(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

2 数值方法

对于式(1)~式(5)的初边值问题,本文采用基于切比雪夫谱逼近的谱元方法进行数值模拟,为了便于推导,将源项 $\frac{\partial Q}{\partial t}$ 写作 S , 通过如下方法可以得到相应的拟变分形式:

寻找 $p \in H_0^1(\Omega)$, 且初始时刻在边界上有

$$p'_0(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = f(x, y, 0)$$

并使得下式成立

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} v d\Omega + 2c_0 Ma \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right) v d\Omega + \\ c_0^2 \iint_{\Omega} \left[(1 - Ma^2) \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega = \\ \iint_{\Omega} S v d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial p'}{\partial n} v d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

对于上述变分问题,本文采用切比雪夫谱逼近对其进行离散. 将求解域 Ω 分解成 N 个互不重叠的求解单元 Ω_i , 即 $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$. 将第 i 个单元通过坐标变换转换为标准单元 e , 在标准单元 e 内,选取切比雪夫多项式的极值点作为插值点,则标准元内的试探函数和检验函数可以表示为

$$\begin{aligned} p'^i(\xi, \eta) &= \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_y^i} h_j^i(\xi) h_k^i(\eta) u_{jk}^i \\ v^i(\xi, \eta) &= \sum_{p=0}^{N_x^i} \sum_{q=0}^{N_y^i} h_p^i(\xi) h_q^i(\eta) v_{pq}^i \end{aligned}$$

插值函数可表示为

$$\begin{aligned} h_j^i(\xi) &= \frac{2}{N_x^i} \sum_{j=0}^{N_x^i} \frac{1}{c_j c_m} T_m(\xi_j^i) T_m(\xi) \\ h_k^i(\eta) &= \frac{2}{N_y^i} \sum_{k=0}^{N_y^i} \frac{1}{c_k c_n} T_n(\eta_k^i) T_n(\eta) \\ h_p^i(\xi) &= \frac{2}{N_x^i} \sum_{p=0}^{N_x^i} \frac{1}{c_p c_l} T_l(\xi_p^i) T_l(\xi) \\ h_q^i(\eta) &= \frac{2}{N_y^i} \sum_{q=0}^{N_y^i} \frac{1}{c_q c_r} T_r(\eta_q^i) T_r(\eta) \end{aligned}$$

式中: T_m 、 T_n 、 T_l 、 T_r 为切比雪夫多项式;在标准单元外, $h_j^i(\xi)$ 、 $h_k^i(\eta)$ 、 $h_p^i(\xi)$ 、 $h_q^i(\eta)$ 为 0; c_m 满足

$$c_m = \begin{cases} 2 & m = 0, N_x^i \\ 1 & m \neq 0, N_x^i \end{cases}$$

在标准单元上对式(6)进行离散,分别以 $\ddot{u}$ 、 $\dot{u}$ 表示

$\frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2}$ 、 $\frac{\partial u_e}{\partial t}$, 考虑到 v_{kq}^i 的任意性, 方程可以写作

$$\mathbf{M}_e \cdot \ddot{\mathbf{u}}^i(t) + \mathbf{C}_e \cdot \dot{\mathbf{u}}^i(t) + \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^i(t) = \mathbf{S}_e$$

式中的单元质量矩阵、单元阻尼矩阵和单元刚度矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= B_{jp}^i B_{kq}^i \\ \mathbf{C}_e &= 2c_0 Ma C_{jp}^i B_{kq}^i + c_0 (B_{jp}^i B_{kq}^i)_\Gamma \\ \mathbf{K}_e &= c_0^2 (1 - Ma^2) A_{jp}^i B_{kq}^i + c_0^2 B_{jp}^i A_{kq}^i \\ \mathbf{S}_e &= B_{jp}^i B_{kq}^i S_{jk}^i \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{jp}^i &= \frac{8}{L_x^i (N_x^i)^2} \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{p=0}^{N_x^i} \frac{1}{c_j c_m c_p c_l} T_m(\xi_j) T_l(\eta_p) \cdot \\ &\quad \int_{-1}^1 \frac{\partial(T_m(\xi))}{\partial \xi} \frac{\partial(T_l(\eta))}{\partial \xi} d\xi \\ A_{kq}^i &= \frac{8}{L_y^i (N_y^i)^2} \sum_{k=0}^{N_y^i} \sum_{q=0}^{N_y^i} \frac{1}{c_k c_n c_q c_r} T_n(\eta_k) T_r(\eta_q) \cdot \\ &\quad \int_{-1}^1 \frac{\partial(T_n(\eta))}{\partial \eta} \frac{\partial(T_r(\eta))}{\partial \eta} d\eta \\ B_{jp}^i &= \frac{2L_x^i}{(N_x^i)^2} \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{p=0}^{N_x^i} \frac{1}{c_j c_m c_p c_l} T_m(\xi_j) T_l(\eta_p) \cdot \\ &\quad \int_{-1}^1 [T_m(\xi) T_l(\eta)] d\xi \\ B_{kq}^i &= \frac{2L_y^i}{(N_y^i)^2} \sum_{k=0}^{N_y^i} \sum_{q=0}^{N_y^i} \frac{1}{c_k c_n c_q c_r} T_n(\eta_k) T_r(\eta_q) \cdot \\ &\quad \int_{-1}^1 [T_n(\eta) T_r(\eta)] d\eta \\ C_{jp}^i &= \frac{4}{(N_x^i)^2} \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{p=0}^{N_x^i} \frac{1}{c_j c_m c_p c_l} T_m(\xi_j) T_l(\eta_p) \cdot \\ &\quad \int_{-1}^1 \frac{\partial(T_m(\xi))}{\partial \xi} T_l(\eta) d\xi \end{aligned}$$

将各单元矩阵合成为总体矩阵, 得到一般形式的动力学运动方程

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{S} \quad (7)$$

此式即为关于时间的二阶常微分线性方程组。

3 时间积分方法

式(7)在时域上的求解一般有隐式和显式两种逐步积分途径^[15]。显式积分方法有中心差分法等, 但一般是条件稳定的; 隐式逐步积分方法有 Newmark 方法等。考虑到算法的稳定性, 这里选择隐式 Newmark 方法。

在 $t \sim t + \Delta t$ 的时间区域内, Newmark 积分方法采用如下假设

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}_t + [(1 - \delta)\ddot{\mathbf{u}}_t + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}]\Delta t \\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \end{aligned}$$

式中: α 和 δ 是按积分精度和稳定性要求决定的参数。结合式(7)可得到 Newmark 方法的递推公式

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{K} + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M}\right) \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{S}_{t+\Delta t} + \\ \mathbf{M} \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{u}_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right] + \\ \mathbf{C} \left[\frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{u}_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right) \dot{\mathbf{u}}_t + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_t \right] \quad (8) \end{aligned}$$

起始步的 $\ddot{\mathbf{u}}_0$ 可由下式得到

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{S}_0 - \mathbf{K} \mathbf{u}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_0) \quad (9)$$

由式(8)和式(9)即可逐步求解各节点的值。

4 算 例

为了方便研究, 本文采用具有解析解的单极子声源, 其表达式如下

$$S(x, y, t) = \epsilon \exp\{-\alpha[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\} \sin(\omega t)$$

式中: ϵ 为声源振幅; α 为衰减系数; ω 为角频率; 声源位置坐标为 (x_0, y_0) 。取单极子声源中 $\epsilon = 0.5$, $\alpha = (\ln 2)/2$, 声源放置于原点, 即 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 角频率取 $\omega = 20\pi$ 。计算区域为

$$\Omega = \{(x, y) : -100 \text{ m} \leq x \leq 100 \text{ m}, -100 \text{ m} \leq y \leq 100 \text{ m}\}$$

在人工边界 $\partial\Omega$ 上面加有 1 阶 C-E-M 吸收边界条件, 将计算区域划分为 11×11 的网格, 在每个网格上采用 6 阶切比雪夫多项式进行逼近。

取流场马赫数 $Ma = 0$, 时间步长为 $\Delta t = 0.001$, 计算 800 步。可得到静止流场中由单极子声源产生的辐射声场云图(见图 1)。沿 y 轴的声压型线与稳

态解析解的对比见图 2。稳态解析解可以看作是达到稳态的声传播,即时间趋于无穷时的情况。可以看出,当计算时间足够长达到稳态传播的时候,数值解和解析解吻合得非常好。

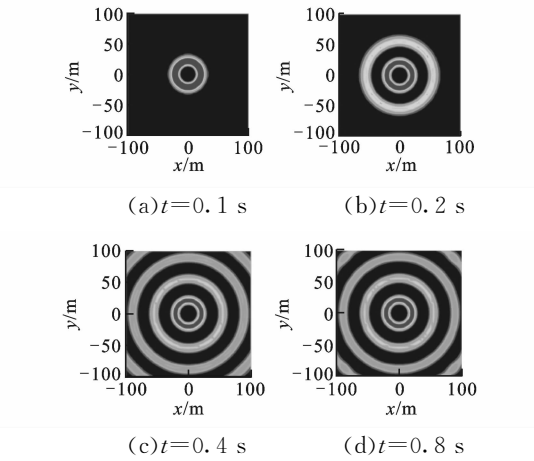


图 1 $Ma=0$ 时的声场云图

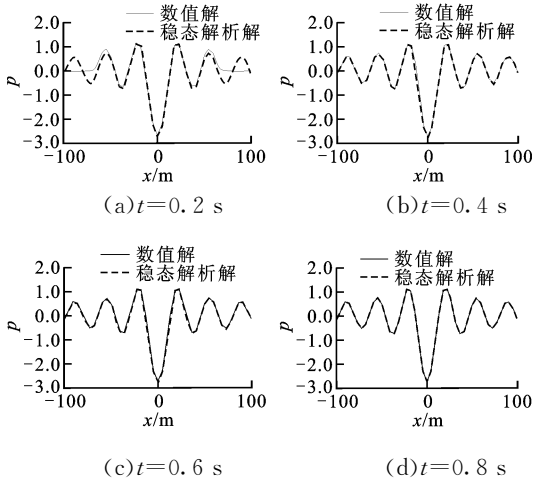


图 2 $Ma=0$ 时沿 y 轴的声压型线

取流场马赫数 $Ma=0.5$,其余参数不变,可得到均匀稳定流场中单极子声源产生的声场云图(见图 3)。从图 4 可以看出,随着计算时间的推进,数值解和稳态解析解吻合得越来越好。

从图 3 可以看出,在声波到达人工边界以后,声压云图出现了一些振荡,这是由于本文所采用的 1 阶 C-E-M 吸收边界吸收精度较低所致^[16]。图 3 中声波未到达计算边界时,振荡并未发生,而声波到达计算边界时,由于低精度的吸收边界条件并不能完全消除反射,从而对主声场形成干扰。可见,声场对边界上非常微小的反射十分敏感,因此今后可尝试更高阶精度的吸收边界条件,如 Perfectly Matched Layer 吸收边界条件等,以便更好地消除边界反射

引起的振荡。

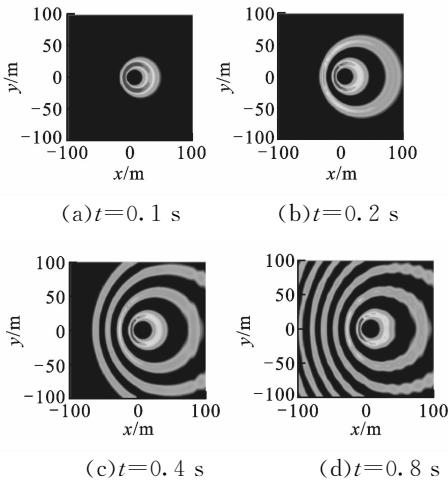


图 3 $Ma=0.5$ 时的声场云图

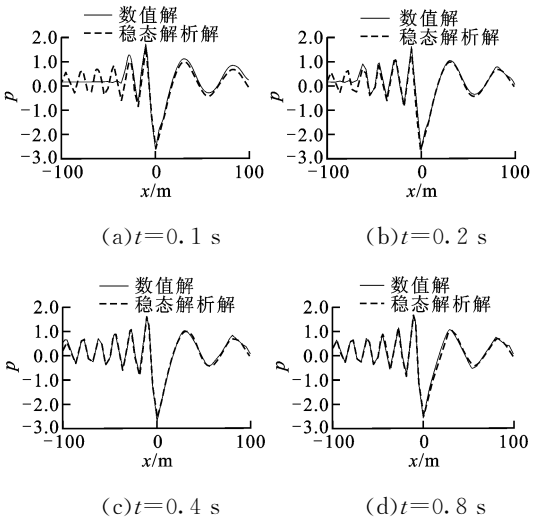


图 4 $Ma=0.5$ 时沿 y 轴的声压型线

5 结 论

应用谱元方法模拟基于线性化欧拉方程的声传播问题,着重讨论了包含流速影响的声波方程的谱元逼近解法,对声音速均匀流场中的声传播问题进行数值模拟。在单元上采用具有 6 阶精度的切比雪夫谱函数进行逼近,在边界上采用 1 阶 C-E-M 吸收边界条件消除边界反射对声场的影响,并对由于流场流速作用而形成的阻尼矩阵项进行了精确积分,以保证高阶精度特点。分别模拟了单极子声源在均匀静止介质和亚声速均匀流场中的辐射声场,结果表明:空间谱元离散结合隐式时间推进的算法具有很好的稳定性,且算法收敛速度较快;通过与稳态解析解的对比可以看出,在非常有限的网格剖分下采

用了6阶切比雪夫谱逼近仍能得到相当的精度,数值结果在空间上具有6阶精度,在时间上达到2阶精度,充分体现了谱元方法在求解气动声学问题中的高精度特点;使用的隐式Newmark时间积分方法具有绝对稳定性,时间步长只影响计算精度而不影响算法稳定性,计算工作量相对较小.随着计算条件的飞速发展,加密网格并采用更高阶的切比雪夫谱逼近,可以获得更高精度的解以适应计算气动声学的精度要求,另外可尝试采用更高精度的吸收边界条件以改善边界反射对计算声场的干扰,与谱元方法的高精度特点相匹配.

参考文献:

- [1] LIGHTHILL M J. On sound generated aerodynamically: general theory [J]. Proc Roy London Soc; Mathematical and Physical Science; 1952, 211(1107): 564-587.
- [2] LELE S K. Compact finite difference schemes with spectral like resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103(1): 16-42.
- [3] JAE W K, DUCK J L. Optimized compact finite difference schemes with maximum resolution [J]. AIAA Journal, 1996, 34(5): 887-893.
- [4] 傅德薰,马延文.高精度差分格式及多尺度流场特性的数值模拟[J].航空动力学报,2003,18(1):24-35.
FU Dexun, MA Yanwen. High order accurate schemes and numerical simulation of multi scale structures in complex flow fields [J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(1): 24-35.
- [5] WU S W, LIAN S H, HSU L H. A finite element model for acoustic radiation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 215(3): 489-498.
- [6] HARTEN A, ENGQUIST A, OSHER S, et al. Uniformly high-order accuracy essentially non-oscillatory schemes: III[J]. Journal of Computational Physics, 1987, 71(2): 231-323.
- [7] TAM C K W, WEBB J C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107(2): 262-281.
- [8] TAM C K W. Computational aeroacoustics: issues and methods[J]. AIAA Journal, 1995, 33(10): 1788-1796.
- [9] LELE S K. Computational aeroacoustics: a review[C/OL]. Aerospace Science Meeting and Exhibit. [2008-09-05]. <http://www.aiaa.org/content.cfm?pageId>.
- [10] PATERA A T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion[J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54(3): 468-488.
- [11] 孙晓峰,周盛.气动声学[M].北京:国防工业出版社,1992:135-137.
- [12] CLAYTON R, ENGQUIST B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations[J]. Bull Seism Soc Am, 1977, 67(6): 1527-1540.
- [13] ENGQUIST B, MAJDA A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves [J]. Mathematics of Computation, 1977, 31(139): 629-651.
- [14] 许靖,秦国良,朱昌允.谱元方法求解含有吸收边界的声学问题[J].西安交通大学学报,2007,41(7): 875-878.
XU Jing, QIN Guoliang, ZHU Changyun. Chebychev spectral elements method for wave equation with absorbing boundary conditions[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, 41(7): 875-878.
- [15] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社,2000:476-495.
- [16] 邱志伟.谱元方法求解基于二阶吸收边界条件的气动声学问题[D].西安:西安交通大学能源与动力工程学院,2007.

(编辑 王焕雪)

[本刊相关文献链接]

离心风机气动噪声的数值预测.西安交通大学学报,2009,43(3):65-69
改变蜗壳宽度对离心风机气动噪声影响的数值计算与试验研究.2008,42(11):1429-1434.
一般相关噪声下线性系统定区间平滑估计算法.西安交通大学学报,2008,42(8):954-957.
谱元方法求解含吸收边界的声学问题.西安交通大学学报,2007,41(7):875-878.
谱元方法求解波动方程及影响其数值精度的相关因素.西安交通大学学报,2008,42(1):56-59.
前向离心风机吸声蜗壳降噪的试验研究.西安交通大学学报,2009,43(3):92-96.

沙粒跃移击溅函数的高速数字摄像研究

王大伟¹, 王元¹, 杨斌¹, 张玮²

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安; 2. 韩国浦项工科大学
实验流体控制与生物流体实验室, 790-839, 韩国浦项)

摘要: 采用高速 CMOS 数字相机拍摄的方法记录沙粒与床面的碰撞过程, 通过分段图像叠加的算法对获得的实验图像进行处理, 提取出沙粒运动时序位置, 并计算其入射以及反射的速度和角度. 通过统计分析得出跃移沙粒与沙床碰撞过程中的控制参数——碰撞平面角、速度和能量恢复系数的分布, 都近似满足正态分布. 实验结果表明, 沙粒与沙床碰撞过程中损失的动能超过总能量的一半, 且由于碰撞平面角大于 0° 的比例达到 70%, 即使沙粒在碰撞过程中能量有所损失, 沙粒与沙床碰撞后垂直分速度增加的现象仍比较普遍, 使得沙粒在与气流相互作用的过程中获取更多的能量, 从而为沙粒的持续跃移提供了保证.

关键词: 沙粒跃移; 高速数字相机; 击溅函数; 碰撞平面角

中图分类号: O359 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)07-0125-04

Research on Sand Saltation Splash Function by High Speed Digital Camera

WANG Dawei¹, WANG Yuan¹, YANG Bin¹, ZHANG Wei²

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Experimental Flow Control & Biofluid Laboratory, Pohang University of Science and Technology, Pohang 790-839, Korea)

Abstract: A high speed CMOS digital camera was used to record the process of sand grain collision with the sand bed. With the subsection addition image processing method, the temporal position of saltating sand grain was extracted from the experimental images, and the speed and angles of impacting and rebounding were also calculated. With the statistical method, some parameters of the collision process were presented, including the distributions of speed, energy recoverable coefficients and collision angles and these parameters displayed normal distribution. The results show that, during the period of collision between the sand grain and the sand bed, the lost kinetic energy is more than half of the total energy. Moreover, because the percentage of collision angles with more than 0° is up to 70%, the vertical speed of sand increases even if the kinetic energy decreases, which ensures that the sand particles can receive more energy from the air to keep on the saltation movement.

Keywords: sand saltation; high speed digital camera; splash function; collision flat angle

沙粒对沙床表面的冲击过程是沙粒跃移中最重要
的物理过程之一, 而击溅函数是描述这一过程
的有效形式. 早在 1941 年 Bagnold^[1] 就曾指出: “沙
的运动这一主题属于物理学比属于地貌学更为恰
当,

而若想推进我们在这方面的知识, 就必须从研究
单一沙粒在风中的运动着手”. 自从那时开始, 作为
风沙流中沙粒三种主要运动形式之一的跃移, 就
一直受到广大风沙物理学研究者的重视^[1-9]. 贺
大良等人

采用人工判读高速摄影胶片的方式研究了跃移沙粒的运动^[4]. Anderson 等人采用数值模拟的方法给出了 80 个碰撞样本的速度和方向分布,建立了击溅函数的模型^[5]. 邹学勇等人研究了风沙流结构中起跃沙粒垂直初速度分布^[6]. Lee 等人采用低速 CCD 相机(30 帧/s)记录了沙粒在水中的跃移轨迹和碰撞过程参数^[7-8]. 董志宝等人利用相位多普勒测速仪(PDA)单点测量的方法得到沙粒起跳速度的数据^[9],何丽红等人利用该数据给出了沙粒起跳满足 Weibull 分布的结论^[10]. 然而受技术手段的限制,碰撞过程沙粒的起跳速度(即反射速度)与入射速度的关系至今没有进行过确切的研究. 本文采用高速 CMOS 数字相机(2 000 帧/s)拍摄的方法记录沙粒与床面的碰撞过程,从图像处理得到的沙粒位置参数来计算其入射以及反射的速度和角度,并通过统计的方法给出沙粒碰撞后速度和能量恢复系数以及碰撞平面角的分布,达到给定入射速度和角度得到相应的反射速度和角度的目的,确定了击溅函数,同时在实验过程中发现,由于碰撞平面角大于 0°的比例达到 70%,使得沙粒与沙床碰撞后垂直分速度增加的现象比较普遍.

1 实验设计及数据处理方法

实验在韩国浦项工科大学实验流体控制与生物流体实验室的大气边界层风洞(测试段长为 6.75 m,宽为 0.72 m,高为 0.6 m)中进行. 沙床采用 300~500 μm 的沙粒铺成,尺寸为 1.00 m $\times$ 0.20 m $\times$ 0.02 m. 为了准确重现沙粒与沙床碰撞过程,实验在一种弱跃移的状况下进行,来流风速为 8.5 m/s. 采用日本 Photron 公司的 Ultima-APX 高速 CMOS 数字相机进行图像捕捉,光源采用连续冷光源片光垂直向下投射. 相机分辨率设为 1 024 $\times$ 512 像素,速度设为 2 000 帧/s,曝光时间为 1/3 000 s.

实验得到的结果为数字图像,可以对沙粒的位置进行精确定位. 由于每张图像上只有沙粒在某时刻的位置且图像数目巨大,给数据处理带来了麻烦. 因此,在处理图像的过程中采取了时序分段图像叠加的方法:

- (1)将某一碰撞过程的图像序列进行定位;
- (2)对该序列图像进行局部加法运算得到碰撞的离散轨迹图,见图 1,其中图 1a~图 1e 为序列中某时刻的图像,图 1f 为整个序列图像相加后的结果, T 为碰撞过程的初始时刻;
- (3)利用标记算法得到沙粒碰撞过程中不同时

刻的位置坐标;
(4)利用沙粒位置坐标计算碰撞过程的入射及反射各参数,并进行统计分析.

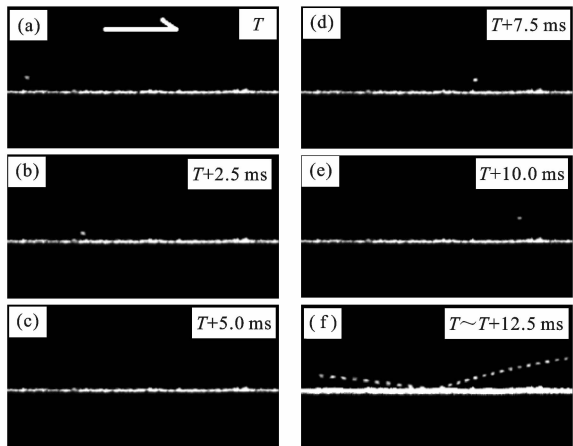


图 1 沙粒沙床碰撞离散轨迹图

2 实验结果与分析

2.1 碰撞结果分类

通过对实验图像的分析发现,沙粒与沙床碰撞后通常有 3 种结果:①沙粒由跃移变为蠕移;②沙粒反弹继续跃移;③沙粒本身反弹继续跃移并引起其他沙粒的溅射起跳. 尽管部分跃移沙粒反弹带有溅射颗粒同时出现,但由于溅射颗粒的速度比较小,无法达到反弹颗粒运动的高度和距离,故可以利用这个特点来区分它们. 通过对图像进行分析处理,共得到了 108 个碰撞样本,按照上述分类,可得统计数据如表 1 所示.

表 1 沙粒碰撞结果分类的数据统计

碰撞结果	出现次数	频率/%
跃移变蠕移	10	9.3
跃移反弹无溅射	64	59.3
跃移反弹有溅射	34	31.4

由表 1 可知,沙粒与沙床碰撞后产生反弹的比例高于 90%,且反弹沙粒与溅射沙粒图像区别比较明显,因此本文针对反弹沙粒进行研究.

2.2 反弹沙粒的速度和能量恢复系数

在由入射速度得到反射速度的过程中,采用沙粒的速度和能量(动能)恢复系数($C_U=U_2/U_1$, $C_E=U_2^2/U_1^2$)来给出反射速度和入射速度之间关系. 图 2 分别给出了沙粒 u 速度、 v 速度、合速度 U 的恢复

系数及能量恢复系数 C_E 的分布. 由分布图可看出, 沙粒 u 速度、 v 速度、合速度的恢复系数及能量恢复系数的分布近似呈正态分布. 对能量恢复系数分布进行拟合得到如下表达式

$$f_{C_E}(x) = C_0 + \frac{A}{w(\pi/2)^{1/2}} e^{-2(\frac{x-x_c}{w})^2} \tag{1}$$

式中: $f_{C_E}(x)$ 为能量恢复系数分布拟合函数; 拟合常量 $C_0=0.01, A=0.09, w=0.41, x_c=0.38$, 相似度为 94%. 由于能量恢复系数为 U 速度恢复系数的平方, 所以可知由其中任一种分布就可得到另一种分布.

能量恢复系数除了能表征沙粒与沙床碰撞前后速度大小的变化外, 同时还能反映沙床对入射沙粒动能的吸收程度. 实验中能量恢复系数平均值为 0.455, 碰撞后沙粒超过一半的能量都被沙床吸收. 可见, 沙粒与沙床的碰撞过程是沙粒间能量传递的重要途径. 以前的相关研究都没有对能量恢复系数进行过分析, 但可以从平均反弹速度和入射速度推算得到. 对 Nalpanis 等人^[3]得到的沙粒跃移数据进行推算, 发现当沙粒粒径在 90~300 μm 时, 得到的能量恢复系数为 0.31~0.44. 这与本文实验所得结果吻合.

2.3 反弹沙粒碰撞平面角

根据碰撞理论, 反射角总是与入射角大体相等, 而在实际沙粒与床面的碰撞实验过程中, 反射角与入射角相差较大, 且 v 速度恢复系数在大多数情况下大于 1 (即沙粒反射速度的垂直分量大于入射速

度的垂直分量), 究其原因是因为沙床表面并不是平面, 即碰撞平面与沙床平面不重合. 这里给出碰撞平面角的定义, 用来表征碰撞平面与沙床平面的偏离程度. 如图 3 所示, 沙床表面法线 (OY) 与碰撞平面法线 (OY') 的夹角 θ 为碰撞平面角, 以逆时针方向为正. 根据碰撞理论有

$$\alpha + \theta = \beta - \theta$$

可得

$$\theta = \frac{(\beta - \alpha)}{2}, \quad \beta = \alpha + 2\theta$$

式中: α 为入射角; β 为反射角. 由上式可知, 对于给定的人射角, 给出碰撞平面角的分布就可以求得反射角的分布. 对实验数据进行了统计, 得到碰撞平面角的分布如图 4 所示, 对其进行拟合得

$$f_{\theta}(x) = C_0 + \frac{A}{w(\pi/2)^{1/2}} e^{-2(\frac{x-x_c}{w})^2} \tag{2}$$

式中: $f_{\theta}(x)$ 为碰撞平面角分布拟合函数; 拟合常量 $C_0=0.02, A=2.15, w=6.90, x_c=3.56$, 相似度为 98%. 由图 3 可知, 有约 70% 的沙粒碰撞平面角大于 0° . 因此, 尽管沙粒在碰撞过程中能量有所损失, 但由于碰撞平面角的存在且大于 0° 的分布占很大的比例, 导致沙粒碰撞后垂直方向的速度增加. 从图 2 中发现, v 速度恢复系数大于 1 的现象很普遍. 垂直方向速度的增加会延长沙粒在气流中的滞留时间, 使得沙粒在与气流相互作用的过程中获取更多的能量, 从而为沙粒的持续跃移提供了保证.

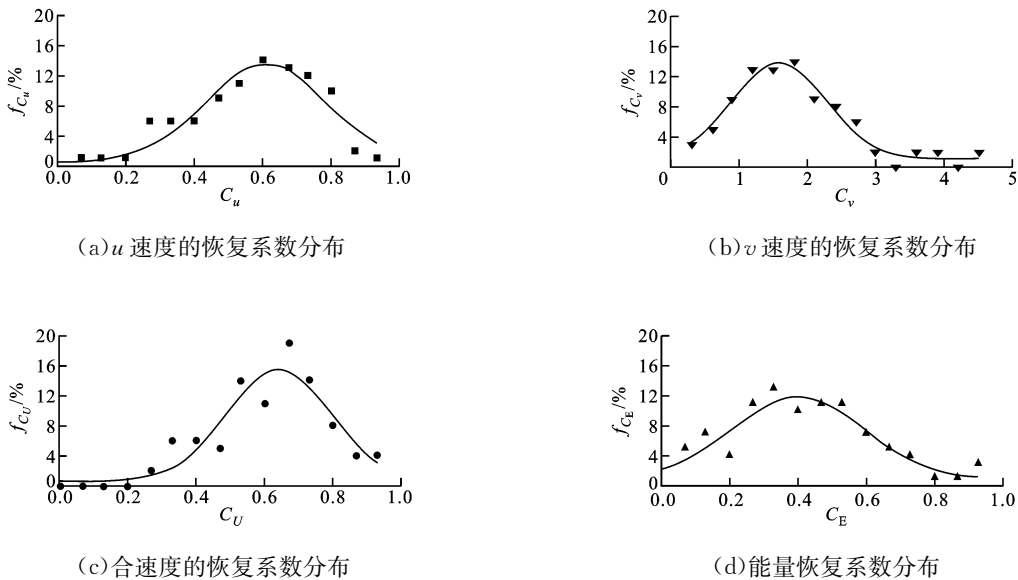


图 2 沙粒速度及能量恢复系数的分布

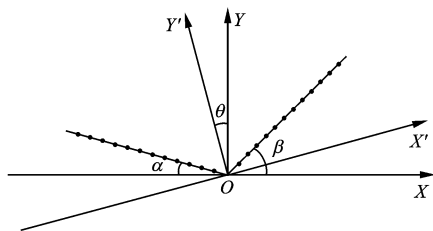


图3 碰撞平面角示意图

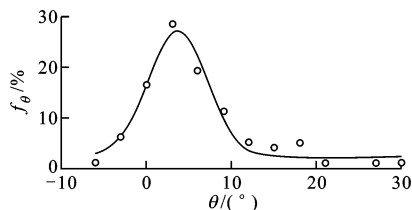


图4 碰撞平面角分布图

3 结 论

(1)时序分段图像叠加的图像处理算法可以有效处理高速 CMOS 相机拍摄的大量数字图像,简化处理过程。

(2)跃移沙粒与沙床碰撞过程中的控制参数,碰撞平面角、速度和能量恢复系数都近似满足正态分布。能量恢复系数实验结果表明,沙粒与沙床碰撞过程中损失的动能超过总能量的一半。

(3)由于碰撞平面角大于 0° 的分布占据很大的比例,即使沙粒在碰撞过程中能量有所损失,沙粒与沙床碰撞后垂直分速度增加的现象仍比较普遍,使得沙粒在与气流相互作用的过程中获取了更多的能量,为沙粒的持续跃移提供了保证。

参考文献:

- [1] BAGNOLD R A. The physics of blown sand and desert dunes [M]. London, UK: Mathuen & Co Ltd., 1941;3.
- [2] OWEN P R. Saltation of uniform grains in air [J]. J

Fluid Mech, 1964, 20(2): 225-242.

- [3] NALPANIS P, HUNT J C R. Saltating particles over flat beds [J]. J Fluid Mech, 1993, 251: 661-685.
- [4] 贺大良, 高有广. 沙粒跃移运动的高速摄影研究 [J]. 中国沙漠, 1988, 8(1): 18-29.
HE Daliang, GAO Youguang. The study of sand saltation movement with high velocity cinecamera [J]. Journal of Desert Research, 1988, 8(1): 18-29.
- [5] ANDERSON R S, HAFF P K. Simulation of eolian saltation [J]. Science, 1988, 241(4867): 820-823.
- [6] 邹学勇, 朱久江, 董光荣, 等. 风沙流结构中起跃沙粒垂直初速度分布函数 [J]. 科学通报, 1992, 37(23): 2175-2177.
ZOU Xueyong, ZHU Jiujiang, DONG Guangrong, et al. The distribution function of the vertical lift-off speeds of saltating particles in the blown sand flow structure [J]. Chinese Science Bulletin, 1992, 37(23): 2175-2177.
- [7] LEE Hongyuan, CHEN Yenhsu, YOU Jiingyun, et al. Investigation of continuous bed load saltation process [J]. J Hydraulic Engineering, 2000, 126(9): 691-700.
- [8] LEE Hongyuan, YOU Jiingyun, LIN Yingtien. Continuous saltation process of multiple sediment particles [J]. J Hydraulic Engineering, 2002, 128(4): 443-450.
- [9] DONG Zhibao, LIU Xiaoping, LI Fang, et al. Impact-entrainment relationship in a saltating cloud [J]. Earth Surf Process Landforms, 2002, 27(6): 641-658.
- [10] 何丽红, 郑晓静, 武建军. 跃移沙粒起跳垂直速度分布函数的统计分析[J]. 兰州大学学报, 2004, 40(2): 31-35.
HE Lihong, ZHENG Xiaojing, WU Jianjun. A statistical analysis of the distribution function of the vertical lift-off speeds of saltating particles [J]. Journal of Lanzhou University, 2004, 40(2): 31-35.

(编辑 王焕雪)

[本刊相关文献链接]

风水流中沙粒相输移的测量. 西安交通大学学报, 2006, 40(7): 846-850.

微通道内流的微尺度粒子图像测速技术实验研究. 西安交通大学学报, 2007, 41(11): 1355-1359.

粗糙元特征对风洞中大气表面层模拟的影响. 西安交通大学学报, 2009, 43(3): 87-91.

一种新的测定流体质扩散系数的全息干涉图像处理方法. 西安交通大学学报, 2008, 42(11): 1350-1355.

一种基于小波的 Contourlet 变换的图像压缩算法. 西安交通大学学报, 2007, 41(4): 479-483.

基于双密度双树复数小波变换的图像去噪. 西安交通大学学报, 2006, 40(2): 246-248.