

基于气泡堆积的非结构化网格生成技术

武利龙, 陈斌

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为了有效地提高网格的质量, 基于物理思想发展了一种基于气泡堆积的非结构化网格生成算法. 该算法不同于其他典型的非结构化网格生成算法, 具体步骤为: 首先按一定的规则向给定区域内添加具有虚拟质量的气泡, 使其紧密堆积以充满整个计算区域; 然后引入气泡之间的相互作用力得到各气泡的运动控制方程, 通过求解该方程来调整各气泡的位置, 反复迭代使所有气泡受力最小, 最终达到整个系统的受力平衡, 从而有效避免相邻气泡过于重叠或分离, 实现调整节点位置优化网格的目的; 最后通过 Delaunay 三角形化方法有效地联接这些气泡的中心, 生成非结构化三角形网格. 基于上述算法开发了相应的程序, 将网格生成结果与 Delaunay 划分并结合拉普拉斯光顺化方法生成的网格进行了对比, 发现网格的几何不规则度大大减小, 质量得到了明显的提高.

关键词: 气泡堆积法; 非结构化网格; Delaunay 划分

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)01-0029-05

Bubble Packing Method Based Unstructured Grid Generation

WU Lilong, CHEN Bin

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: An algorithm of bubble packing method (BPM) based unstructured grid generation was developed, which can improve the quality of unstructured grid effectively. Unlike the conventional methods of unstructured grid generation, the implementation procedure of BPM is: firstly, bubbles with virtual mass are added to the physical domain according to certain rules until it is fully filled by the closely packing bubbles; then the bubbles are moved by solving the motion equations constructed with the inter-bubble force, and this process is repeated to make the inter-bubble force minimum until the bubble system reaches equilibrium, thus the overlaps and gaps existing between bubbles can be eliminated efficiently to realize the optimization of nodes positions and improvement of grid quality; finally, the center positions of all bubbles are connected by Delaunay triangulation method (DTM) to generate an unstructured grid. Based on the present algorithm, the corresponding program was developed, and different grids generated by BPM and DTM were compared. The results show that the geometric irregularity of BPM grid decreases greatly and the grid quality improves significantly.

Keywords: bubble packing method; unstructured grid; Delaunay triangulation

数值求解流动与传热问题时, 首先要对区域进行剖分. 非结构化网格可以有效处理复杂的不规则几何区域, 其快速生成已成为计算流体力学(CFD)

与计算传热学中一个十分重要的研究领域. 自 20 世纪 80 年代以来, 非结构化网格生成技术得到了快速发展, 国内外学者提出了多种生成非结构化网格的

算法,如前沿推进法^[1-2]、Delaunay 三角化法^[2-3],以及两种方法的结合^[4]等.由于这些算法自身的限制,对复杂区域的快速生成以及生成网格质量等方面都有不足之处.因此,发展自适应性强的高效非结构化网格生成技术具有重要的意义.基于气泡堆积法(BPM)的非结构化网格生成方法最早由日本学者 Shimada 等^[5-6]针对有限元分析方法提出,具有自动生成网格和生成的网格比较规则等优点,且容易推广到三维和动态网格,近年来得到了快速发展^[7-9].本文借鉴其思想进行研究并对该算法进行改进,以期得到适用于 CFD 的高质量非结构化网格.

1 BPM 算法的思想

BPM 方法不同于其他典型的非结构化网格生成算法,其主要思想可以简要概括为 3 步:①按一定的规则向给定区域内添加具有虚拟质量的气泡,使其紧密堆积以充满整个计算区域;②引入气泡之间的相互作用力得到各气泡的运动控制方程,通过求解该方程来调整各气泡的位置,反复迭代使所有气泡受力最小,最终达到整个系统的受力平衡,从而有效避免相邻气泡的重叠或分离,实现调整节点位置优化网格的目的;③通过 Delaunay 三角形化方法有效地联接这些气泡的中心,生成非结构化三角形网格.对于二维情形,其实施流程如图 1 所示.

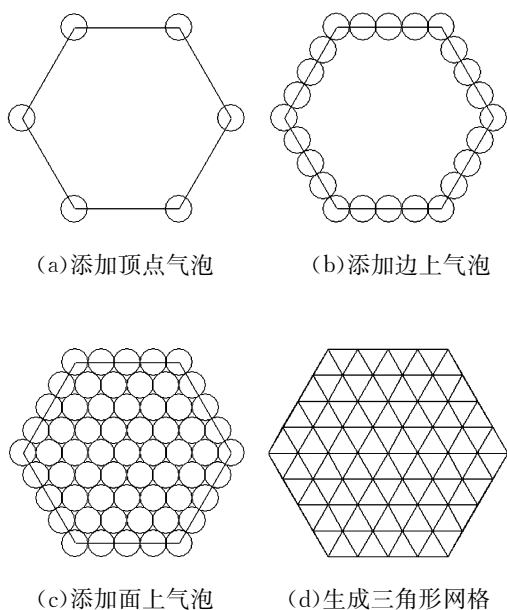


图1 BPM 算法的流程图

1.1 气泡的初始位置

如图 1 所示,算法的第 1 步是如何有效地向求解区域内添加气泡,为简单起见,本文仅考虑气泡大

小相同的情形.本文算法中采用了按空间维数分层递归添加的方法向计算区域内添加气泡,对于二维情形具体分析如下.

(1)首先向区域内各顶点添加气泡,指定其半径的大小以控制生成网格的密度.

(2)添加边上气泡时,可通过比较两气泡的中心距离 d 与其半径之和 $2r$ 的大小,作为是否需要进一步细分该线段以添加新气泡的条件. Shimada^[6]提出如果两气泡半径之和小于其中心间的距离就添加一个新气泡,这样容易导致气泡之间过于重叠.本文提出:如果两半径之和大于等于其中心间的距离,即说明这两个气泡已经近似覆盖了整个线段,无须再细分(图 2a);反之,如果两气泡中心之间的距离与两半径之和的差大于两半径的平均值(图 2b),则需在两气泡的中点处添加一个新的气泡.分别对两段新线段重复上述过程,直到完成边的初始化.采用这样的方法可以有效避免气泡的过度重叠,虽然由于初始顶点气泡半径设置的随意性会导致气泡之间存在微小的间隙,但可通过后文提到的动态移动调整以及添加新气泡等操作,消除气泡之间的间隙,使整条边被气泡完全覆盖.上述添加过程与二叉树的操作过程非常类似,程序中采用二叉树的数据结构将其实现,如图 2c 所示.

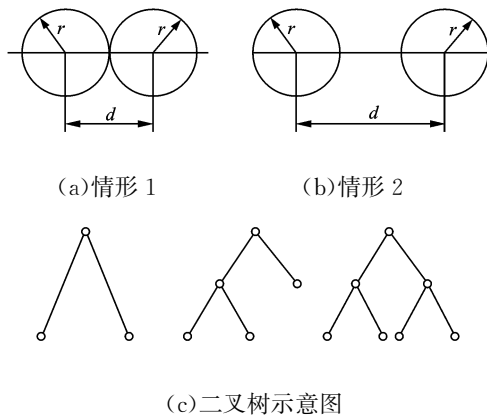


图2 边上添加气泡

(3)添加面上气泡时,为了使生成的三角形网格接近于正三角形,本文采用具有 60° 和 120° 内角的菱形单元对计算区域进行递归划分.该菱形初始设置足够大以包围整个计算区域,不断地将其一分为 4 并在菱形单元的中心以及 4 条边的中点处各添加一个气泡(如图 3a 中虚线所示),随后对新生成的 4 个菱形单元重复上述过程,直至覆盖整个计算区域.与边上的情形类似,对菱形单元的每条边做同样的判断:对于图 3a 所示的情形 1,如果菱形单元某条

边的两端点气泡的中心距离与两半径和之差大于两半径的平均值,则需要进一步细分;对于图 3b 所示的情形 2,菱形单元顶角处的 4 个气泡几乎覆盖了整个区域,无需再细分.同时,在细分添加的过程中,需要根据气泡是否在计算区域内进行删减.上述递归过程与四叉树操作类似,在程序中采用了四叉树的数据结构将其实现,如图 3c 所示.

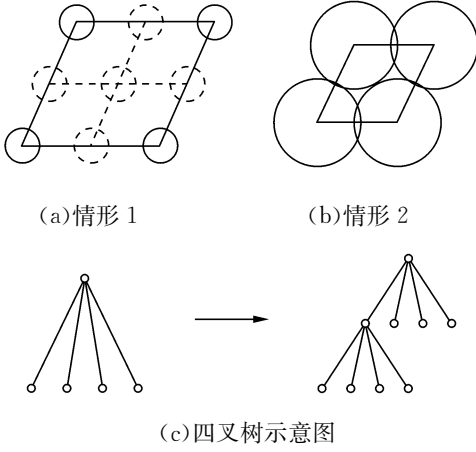


图 3 面上气泡的初始化

1.2 气泡间的相互作用力

如上所述,初始化完成后的气泡位置不可能非常理想,气泡之间存在部分重叠或间隙.为了使气泡的位置尽量规则,可为每个气泡定义一个相互作用力,当相邻两个气泡彼此相切时为平衡距离,此时相互作用力为 0;当相邻气泡中心之间的距离小于两半径之和时表现为斥力,相反大于两半径之和时为引力.在力的作用下,系统中每个气泡会自动移动,最终整个系统的受力最小达到平衡,这样可以有效地消除气泡之间的重叠或间隙.

该力可仿照分子间的范德瓦耳力^[10]来定义,由于无须关注它的精确形式,Shimada^[6]和 Bossen^[8]都对该力做了近似,其对比如图 4 所示.

为了求解的方便,在本文算法中采用 Shimada^[6]提出的三次多项式近似地表示该力

$$f(l) = \begin{cases} al^3 + bl^2 + cl + d, & 0 \leq l \leq 1.5l_0 \\ 0, & l < 0, l > 1.5l_0 \end{cases} \quad (1)$$

边界条件满足

$$\begin{aligned} f(l_0) &= 0, f(1.5l_0) = 0 \\ f'(0) &= 0, f'(l_0) = -k_0 \end{aligned}$$

式中: l_0 为平衡时的中心距离; l 为气泡中心距离; k_0 为在平衡距离 l_0 处相应的线性弹性系数.通过与范德瓦耳力进行比较,该力有如下特点:①作用范围为 $1.5l_0$,大于等于 $1.5l_0$ 则认为作用力为 0;②在 $l=0$

处作用力为有限值而不是无限大.这样,可以有效地减少相互作用力的计算时间.引入 $\lambda = l/l_0$ 将其归一化,上述方程表达式及其边界条件就转化为

$$f(\lambda) = \begin{cases} a^* \lambda^3 + b^* \lambda^2 + c^* \lambda + d^*, & 0 \leq \lambda \leq 1.5 \\ 0, & \lambda < 0, \lambda > 1.5 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(1) = 0; f(1.5) = 0$$

$$f'(0) = 0; f'(1) = -l_0 k_0$$

代入边界条件后,可解得

$$a^* = \frac{5}{4} l_0 k_0; b^* = -\frac{19}{8} l_0 k_0; c^* = 0; d^* = \frac{9}{8} l_0 k_0$$

于是原方程进一步转化为

$$f(\lambda) = \begin{cases} l_0 k_0 \left(\frac{5}{4} \lambda^3 - \frac{19}{8} \lambda^2 + \frac{9}{8} \right), & 0 \leq \lambda \leq 1.5 \\ 0, & \lambda < 0, \lambda > 1.5 \end{cases} \quad (3)$$

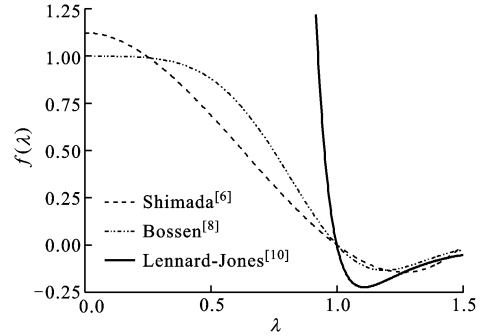


图 4 气泡间力的 3 种近似表达式比较

1.3 气泡位置的动态调整

得到每个气泡的相互作用力后,可为每个气泡假定一个虚拟质量 m ,以通过牛顿第二定律得到其运动方程.为了加快系统的收敛速度,假定每个气泡在运动过程中还要受到一个阻尼力 $\mathbf{h}(t)$,简化起见假定该力和气泡运动速度成正比,引入阻尼系数 c ,得到

$$\mathbf{h}(t) = c \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad (4)$$

由牛顿第二定律得到每个气泡的运动方程为

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{h}(t) \quad (5)$$

进一步可得第 i 个气泡的运动控制方程为

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i(t)}{dt^2} + c_i \frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} = \mathbf{f}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

式中: m_i 为第 i 个气泡指定的质量; c_i 为其阻尼系数; $\mathbf{x}_i$ 为其在空间上的坐标位置矢量; $\mathbf{f}_i$ 为所有与其相邻的气泡作用在第 i 个气泡上的合力; n 是气

泡的总个数. 通过求解上述的运动方程, 得到每个气泡的移动距离. 在求解运动方程时, 为了减少截断误差, 采用了四次龙格库塔方法进行求解, 并且在求解过程中无须关心气泡轨迹随时间的变化, 得到最终的气泡平衡位置即可.

1.4 非结构化网格的生成

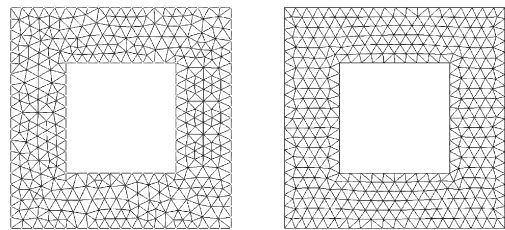
在获得了气泡的平衡位置后, 将其中心作为网格的节点即可联结成三角形非结构化网格. Delaunay 三角形化方法所联接成的各三角形具有以下特点: ①所形成的三角形互不重叠; ②所形成的三角形可以覆盖整个平面区域; ③每一个点均不位于不包含该点的三角形的外界圆内, 同时可保证三角形的最小角是对给定的这一组点的各种联结方案中的最大者, 并且这一结果也是惟一的. 本文借鉴本课题组开发的 Delaunay 非结构化网格快速生成技术^[3], 采用 Delaunay 三角形化的方法可将气泡中心快速地联接成三角形网格.

2 与 Delaunay 划分方法结果对比分析

在上述算法的基础上, 针对矩形腔、矩形、正三角形等不同的几何区域分别使用气泡堆积方法与 Delaunay 划分结合 Laplace 光顺化方法生成了不同的非结构化网格, 并用网格单元规则度^[5] p (即三角形内切圆半径与外接圆半径值之比, 对正三角此值最大为 0.5) 和网格几何不规则度 (所有网格单元的规则度与最大值 0.5 之差的绝对值求和再比上总网格单元数) 作为指标对两种网格的质量进行了对比. 如图 5~7 所示, 很明显采用气泡堆积方法生成的三角形网格质量得到了很大的提高.

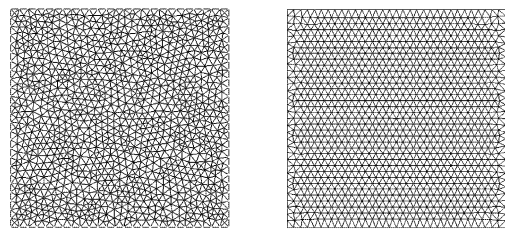
如表 1 所示, 对于采用 BPM 方法生成的网格, 有相当一部分的网格接近于或达到正三角形 ($p \geq$

0.48), 同时也减少了偏离正三角形程度较大的网格 ($p \leq 0.4$) 数. 例如, 对于矩形腔和矩形区域, 接近或达到正三角形的网格所占百分比分别由 65.52% 和 57.42% 增加到了 75.45% 和 88.49%, 而对于正三角形区域, 接近或达到正三角形的网格数由 581 个增加到了 1 024 个, 所占百分比由 56.68% 增加到了



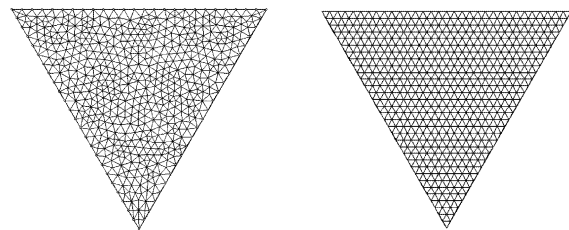
(a)Delaunay 方法 (b)气泡堆积方法

图 5 矩形腔区域(网格数 668)



(a)Delaunay 方法 (b)气泡堆积方法

图 6 矩形区域(网格数 2 276)



(a)Delaunay 方法 (b)气泡堆积方法

图 7 三角形区域(网格数 1 024)

表 1 BPM 与 Delaunay 划分生成的非结构化网格比较

区域 形状	方法	网格数								网格 总数	几何 不规则度
		$p=0$	$p=0.3$	$p=0.4$	$p=0.42$	$p=0.44$	$p=0.46$	$p=0.48$	$p=0.5$		
		~ 0.3	~ 0.4	~ 0.42	~ 0.44	~ 0.46	~ 0.48	~ 0.5			
矩形腔	DTM	0	17	6	37	43	128	439	0	670	0.021 32
	BPM	0	14	16	18	42	74	504	0	668	0.016 57
矩形	DTM	0	29	11	63	221	646	1 308	0	2 278	0.021 26
	BPM	0	16	12	24	64	146	704	1 310	2 276	0.006 31
正三角形	DTM	0	39	22	41	89	253	581	0	1 025	0.025 39
	BPM	0	0	0	0	0	0	500	524	1 024	1.490×10^{-1}

100%, 偏离正三角形程度较大的网格数减少为 0.

3 结 论

本文提供了一种有效提高非结构化三角形网格质量的气泡堆积方法,该方法引入具有虚拟质量的气泡,按照一定规则向计算区域添加气泡,由假定的气泡间作用力以及运动控制方程移动气泡,使系统平衡从而调整气泡位置,再通过 Delaunay 三角形化方法将气泡中心联接成三角形非结构化网格. 通过与 Delaunay 三角形化方法进行对比,可以看出 BPM 方法生成的非结构化网格绝大部分都比较规则,三角形的不规则度大大降低,网格质量得到了较大的提高.

参考文献:

[1] ITO Y, SHIH A M, ERUKALA A K, et al. Parallel unstructured mesh generation by an advancing front method [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2007, 75: 200-209.

[2] 陶文铨. 计算传热学的近代进展 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[3] 陈斌, 郭烈锦. 非结构化网格快速生成技术[J]. *西安交通大学学报*, 2000, 34(1): 18-21.
CHEN Bin, GUO Liejin. Quick generation of unstructured grid [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2000, 34(1): 18-21.

[4] 徐明海, 张俨彬, 陶文铨. 一种改进的 Delaunay 三角形化剖分方法[J]. *石油大学学报*, 2001, 25(2): 100-

105.

XU Minghai, ZHANG Yanbin, TAO Wenquan. A modified Delaunay mesh generation method for 2-D domain [J]. *Journal of the University of Petroleum*, 2001, 25(2): 100-105.

[5] SHIMADA K, GOSSARD D C. Bubble mesh: automated triangular meshing of non-manifold geometry by sphere packing[C]//*Proceedings of the Third Symposium on Solid Modeling and Applications*. New York, USA: ACM Press, 1995: 409-419.

[6] SHIMADA K, GOSSARD D C. Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1998, 15: 199-222.

[7] ČINGOSKI V, MURAKAWA R, KANEDA K, et al. Automatic mesh generation in finite element analysis using dynamic bubble system [J]. *Applied Physics*, 1997, 81(8): 4085-4087.

[8] DIBBEN D C. 3D mesh generation using bubble meshing for microwave applications [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2000, 36(4): 1514-1518.

[9] KIM J H, KIM H G, LEE B C, et al. Adaptive mesh generation by bubble packing method [J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2003, 15(1): 135-149.

[10] MAITLAND G C, RIGBY M, SMITH E B, et al. Intermolecular forces: their origin and determination [M]. Oxford, UK: Clarendon Press, 1981.

(编辑 荆树蓉)