

一种从明暗恢复形状的快速黏性解算法

王国琿, 韩九强, 贾洪海, 张新曼

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对传统的从明暗恢复形状(SFS)算法存在误差大、耗时长的问题,提出了一种 SFS 的快速黏性解算法(PSFS-FVS). 首先假定物体表面反射模型为朗伯模型,建立透视投影下的图像辐照度方程,然后将该方程转化为包含物体表面深度信息的静态 Hamilton-Jacobi 偏微分方程,使用非线性规划原理逼近该微分方程的黏性解,进而得到物体表面的三维形状. 合成花瓶图像的实验结果表明:与 Prados-Faugeras 算法相比,PSFS-FVS 算法在相同迭代次数时,恢复三维形状高度的平均相对误差降低了 8.7%;在相同的误差条件下,所需的 CPU 运行时间减少了 23.5%. 实际人脸图像的三维形状恢复结果表明,PSFS-FVS 算法在恢复局部细节信息时更加准确有效.

关键词: 从明暗恢复形状;黏性解;透视投影;非线性规划

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)06-0043-05

A Fast Viscosity Solution Algorithm for Shape from Shading

WANG Guohui, HAN Jiuqiang, JIA Honghai, ZHANG Xinman

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Focusing on the high error and time consuming of the algorithms for shape from shading (SFS), a fast viscosity solution algorithm of perspective SFS (PSFS-FVS) is proposed. The image irradiance equation is established on the basis of Lambertian reflectance model and perspective camera projection. Then the equation is transformed into a static Hamilton-Jacobi partial differential equation (PDE) that contains the shape information of a surface. The viscosity solution of the resulting PDE is approximated by using a nonlinear programming method, and then the surface shape is generated. Experimental results and comparisons with the Prados-Faugeras algorithm on synthetic vase image show that the mean relative error of the height of the PSFS-FVS algorithm is reduced by 8.7% with the same iterations, and the CPU time of the PSFS-FVS algorithm is decreased by 23.5% at the same error, respectively. Reconstruction results from real face image show that the PSFS-FVS algorithm is more accurate and effective than the Prados-Faugeras algorithm in dealing with the local of the surface.

Keywords: shape from shading; viscosity solution; perspective projection; nonlinear programming

从明暗恢复形状(shape from shading, SFS)是计算机视觉中三维形状恢复问题的关键技术之一,其目标就是利用单幅图像的明暗变化来恢复物体表面各点的法向量或相对高度. SFS 算法在 20 世纪 70 年代由 Horn 等人^[1]提出并发展,在此基础上,又

出现了很多新的算法^[2-4],如最小化方法、局部方法、线性化方法和演化方法等. 然而,传统的 SFS 算法存在两方面的问题:一是使用的成像模型过于简单,如摄像机模型常常使用正交投影,光源位于无穷远处等,导致重构误差较大;二是使用的数值算法求解

过程耗时较长,且往往不能得到经典意义下 SFS 问题的惟一解,因此 SFS 问题一直以来被认为是病态问题.

本文提出了一种 SFS 的快速黏性解算法(PSFS-FVS),克服了上述两方面的不足. PSFS-FVS 算法中摄像机模型采用透视投影来代替正交投影,这更接近于实际的成像模型,减少了由于模型误差导致的重构误差;将图像辐照度方程转化为相应的 Hamilton-Jacobi 偏微分方程,使用非线性规划原理逼近该微分方程的黏性解,从而加快了求解速度. 由于黏性意义下 SFS 问题存在惟一解^[5-6],因此可以认为在透视投影下 SFS 问题是良性问题.

1 透视投影下的图像辐照度方程

设成像平面 $\mathbf{x}=[x_1, x_2]^T$ 位于 $Z=-f$ 处, $f>0$ 为摄像机的焦距,摄像机的光轴与 Z 轴重合,光源位于投影中心,即光心 O 处,透视投影下的成像模型如图 1 所示.

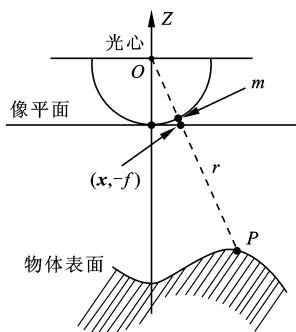


图 1 透视投影下的成像模型

给定图像中的物体表面形状可以用函数 $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ 表示^[6]

$$F(\mathbf{x}) = \frac{f u(\mathbf{x})}{(\|\mathbf{x}\|^2 + f^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -f \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: Ω 为图像的大小,是定义在实数集 $\mathbf{R}^2$ 上的一个开集.

物体表面上任意一点 P 处的法向量为

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f \nabla u(\mathbf{x}) - \frac{f u(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2 + f^2} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + \frac{f u(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2 + f^2} f \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $\nabla u(\mathbf{x})$ 为 $u(\mathbf{x})$ 的梯度. 过 P 点的投射光线方向向量为

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\|\mathbf{x}\|^2 + f^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} -\mathbf{x} \\ f \end{bmatrix} \quad (3)$$

光心到点 P 处的距离为

$$r = f u(\mathbf{x}) \quad (4)$$

透视投影下图像的辐照度方程为

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

将式(2)~式(4)代入式(5),得

$$I(\mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x}) / [(f^2 \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 + (\mathbf{x} \cdot \nabla u(\mathbf{x}))^2) / Q(\mathbf{x})^2 + u(\mathbf{x})^2]^{1/2}}{f^2 u(\mathbf{x})^2} \quad (6)$$

式中: $Q(\mathbf{x}) = f / (\|\mathbf{x}\|^2 + f^2)^{1/2}$. 令 $v(\mathbf{x}) = \ln u(\mathbf{x})$, $J(\mathbf{x}) = f^2 I(\mathbf{x}) / Q(\mathbf{x})$, 对式(6)进行变量代换有

$$-e^{-2v(\mathbf{x})} + J(\mathbf{x}) (f^2 \|\nabla v(\mathbf{x})\|^2 + (\mathbf{x} \cdot \nabla v(\mathbf{x}))^2 + Q(\mathbf{x})^2)^{1/2} = 0 \quad (7)$$

显然,式(7)是一阶偏微分方程,将 $v(\mathbf{x})$ 、 $\nabla v(\mathbf{x})$ 分别简记为 v 、 $\mathbf{p}$,可以得到相应的 Hamiltonian 函数^[6]

$$H(\mathbf{x}, v, \mathbf{p}) = -e^{-2v} + J(\mathbf{x}) (f^2 \|\mathbf{p}\|^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 + Q(\mathbf{x})^2)^{1/2} \quad (8)$$

考虑 Dirichlet 边界条件后,上式可以写成静态 Hamilton-Jacobi 方程

$$\left. \begin{aligned} -e^{-2v} + J(\mathbf{x}) (f^2 \|\mathbf{p}\|^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 + Q(\mathbf{x})^2)^{1/2} &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ v(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: $\varphi(\mathbf{x})$ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的实值连续函数. 若存在实数 $\eta > 0$ 和 N , 满足 $\eta < I(\mathbf{x}) < N$, 且 $\|\nabla I(\mathbf{x})\| \leq N$, Prados 和 Faugeras^[6] 证明了式(9)在黏性意义下存在惟一解.

2 基于非线性规划原理的逼近算法

应用最优控制理论,式(8)可以转换为^[6]

$$H(\mathbf{x}, v, \mathbf{p}) = -e^{-2v} + \sup_{\mathbf{a} \in \bar{B}_2(0,1)} \{-f_c(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{p} - l_c(\mathbf{x}, \mathbf{a})\} \quad (10)$$

式中: $f_c(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = -J(\mathbf{x}) \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{R}(\mathbf{x}) \mathbf{a}$; $l_c(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = -f^2 I(\mathbf{x}) (1 - \|\mathbf{a}\|^2)^{1/2}$; $\mathbf{a}$ 为集合 $\bar{B}_2(0,1)$ 中的点; $\bar{B}_2$ 为定义在 $\mathbf{R}^2$ 上以 $\mathbf{x}$ 为中心的单位圆面; $\mathbf{R}$

($\mathbf{x}$)与 $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ 满足^[7]

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} x_2 / \|\mathbf{x}\| & -x_1 / \|\mathbf{x}\| \\ -x_1 / \|\mathbf{x}\| & x_2 / \|\mathbf{x}\| \end{bmatrix} & \|\mathbf{x}\| \neq 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \|\mathbf{x}\| = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & (\|\mathbf{x}\|^2 + f^2)^{1/2} \end{bmatrix}$$
(11)

为了求解方程(10), Prados 和 Faugeras^[6]提出了逼近算法 $T(\rho, \mathbf{x}, t, v) = 0$, 定义

$$W(\rho, \mathbf{x}, t, v) = \begin{cases} T(\rho, \mathbf{x}, t, v) & \mathbf{x} \in X \\ t - \varphi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial X \end{cases} \quad (12)$$

式中: $X = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \forall i \in \{1, 2\}, (\mathbf{x} \pm h_i e_i) \in \Omega\}$; $\partial X = \Omega - X$; $\rho = (h_1, h_2)$ 定义了数值算法中离散网格的大小; e_i 是单位基坐标

$$T(\rho, \mathbf{x}, t, v) = -e^{-2t} + \sup_{\mathbf{a} \in B_2(0,1)} \left\{ \sum_{i=1}^2 (-f_i(\mathbf{x}, \mathbf{a})) \cdot \frac{t - v(\mathbf{x} + s_i(\mathbf{x}, \mathbf{a})h_i e_i) - l_c(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{-s_i(\mathbf{x}, \mathbf{a})h_i} \right\} \quad (13)$$

其中 $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ 是 $f_c(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ 的第 i 个分量, $s_i(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ 是它的符号. 显然, $T(\rho, \mathbf{x}, t, v)$ 关于 t 是非减函数, 而关于 v 是非增函数.

一个考虑图像大小 $\Omega = (0, m) \times (0, n)$ 的一致离散域: $\mathbf{x}_{i,j} = (ih_1, jh_2)$, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$. 我们的目标就是求解未知函数 $v(\mathbf{x})$ 的离散近似解 $V_{i,j} = v(\mathbf{x}_{i,j})$, 对于 $T(\rho, \mathbf{x}, t, v)$, 需要计算以下最优问题

$$M = \sup_{\mathbf{a} \in B_2(0,1)} \{ -(-J(\mathbf{x}_{i,j})\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_{i,j})\mathbf{D}(\mathbf{x}_{i,j})\mathbf{R}(\mathbf{x}_{i,j})\mathbf{a}) \cdot \mathbf{P} + f^2 I(\mathbf{x}_{i,j})(1 - \|\mathbf{a}\|^2)^{1/2} \} \quad (14)$$

式中: $\mathbf{P} = \left[\frac{t - V_{i+s_1,j}}{-s_1 h_1}, \frac{t - V_{i,j+s_2}}{-s_2 h_2} \right]^T$, 且有 $s_i = s_i(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, $i \in \{1, 2\}$. 由于 $s_1 \in \{\pm 1\}$, $s_2 \in \{\pm 1\}$, 于是将集合 $\bar{B}_2(0, 1)$ 划分为 4 个子集

$$A_{s_1, s_2} = \{ \mathbf{a} \in \bar{B}_2(0, 1) \mid (s_1(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{a}), s_2(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{a})) = (s_1, s_2) \} \quad (15)$$

计算每个子集 A_{s_1, s_2} 上的最优值 M_{s_1, s_2} , 其中的最大值为 M .

为了简便, 定义 $\mathbf{F}_x = -J(\mathbf{x}_{i,j})\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_{i,j})\mathbf{D}(\mathbf{x}_{i,j}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}_{i,j})$, $\delta = f^2 I(\mathbf{x}_{i,j})$. 对于每个子集 A_{s_1, s_2} , 式(14)可以转换为如下约束问题^[8]

$$\begin{aligned} \max \{ & -(\mathbf{F}_x \mathbf{a}) \cdot \mathbf{P} + \delta(1 - \|\mathbf{a}\|^2)^{1/2} \} \\ \text{s. t. } & \mathbf{a} \in A_{s_1, s_2} \end{aligned} \quad (16)$$

非线性规划原理常常被视为一种求解约束问题

或无约束问题最优解的有效方法. 利用非线性规划原理, 可得到式(16)的等价约束问题

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \{ & L(\mathbf{a}, \lambda) = -(\mathbf{F}_x \mathbf{a}) \cdot \mathbf{P} + \delta(1 - \|\mathbf{a}\|^2)^{1/2} + \lambda \cdot (\mathbf{S} \mathbf{F}_x \mathbf{a}) \} \\ \text{s. t. } & \frac{\partial L(\mathbf{a}, \lambda)}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad \lambda = [\lambda_1, \lambda_2]^T \\ & \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (17)$$

式中: $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$, 于是有 $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$. 由约束条件 $\frac{\partial L(\mathbf{a}, \lambda)}{\partial \mathbf{a}} = 0$, 得

$$\mathbf{a}^* = \frac{(\mathbf{S} \mathbf{F}_x)^T (\lambda - \mathbf{S} \mathbf{P})}{(\delta^2 + (\lambda - \mathbf{S} \mathbf{P})^T (\mathbf{S} \mathbf{F}_x) (\mathbf{S} \mathbf{F}_x)^T (\lambda - \mathbf{S} \mathbf{P}))^{1/2}} \quad (18)$$

于是, 约束问题式(17)变成

$$\min_{\lambda} \{ L(\mathbf{a}^*, \lambda) = (\delta^2 + (\lambda - \mathbf{S} \mathbf{P})^T (\mathbf{S} \mathbf{F}_x) (\mathbf{S} \mathbf{F}_x)^T (\lambda - \mathbf{S} \mathbf{P}))^{1/2} \} \quad (19)$$

由于 $(\lambda - \mathbf{S} \mathbf{P})^T (\mathbf{S} \mathbf{F}_x) (\mathbf{S} \mathbf{F}_x)^T (\lambda - \mathbf{S} \mathbf{P}) \geq 0$, 因此存在 $\lambda^* \geq 0$, 使得式(19)取得最小值 $M(t) = L(\mathbf{a}^*, \lambda^*)$. 于是, 式(13)变为

$$T(\rho, \mathbf{x}, t, v) = -e^{-2t} + M(t) = 0 \quad (20)$$

式(20)是关于 t 的非线性方程, 可利用牛顿法求解 t 值.

PSFS-FVS 算法流程如下.

(1) 初始化(第 $n=0$ 步): 赋 $V_{i,j}^0$ 为黏性上解, 如 $V_{i,j}^0 = -0.5 \ln(f^2 I(\mathbf{x}_{i,j}))$.

(2) 迭代过程(第 $n+1$ 步): $V_{i,j}^{n+1} = \{t \mid T(\rho, \mathbf{x}_{i,j}, t, V_{i,j}^n) = 0\}$.

(3) 迭代停止准则: 当 $\|V^{k+1} - V^k\|_1 \leq \epsilon$, 算法停止迭代, 否则返回(2). 其中 $\|\cdot\|_1$ 为定义在 L^1 上的范数, $\epsilon > 0$ 为收敛阈值.

3 实 验

3.1 合成图像的三维形状恢复

本文实验的运行环境如下: CPU 为 AMD Athlon64 X2 5000+, 频率为 2.6 GHz, RAM 为 2 GB, 软件为 Windows XP 及 Matlab 7.7. 使用如下花瓶函数

$$Z(x_1, x_2) = (f(x_1)^2 - x_2^2)^{1/2} \quad (21)$$

式中: $f(x_1) = 0.15 - 0.025(2x_1 + 1)(3x_1 + 2)^2(2x_1 - 1)^2(6x_1 - 1)$, $(x_1, x_2) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$. 采用图 1 所示的成像模型生成灰度图像, 图像的分辨率为 120×120 像素(将图像区域 (x_1, x_2) 扩展到 $[-59, 60] \times [-59, 60]$). 图 2 是合成花瓶图像

的三维形状恢复结果.

表 1 是本文算法和文献[6]算法误差的定量比较. 由表 1 可以看出, 在相同的迭代次数时, 本文算法在恢复三维形状高度的平均相对误差和均方根误差上均有较大幅度的减少. 在迭代次数为 39 时, 本文算法恢复高度的平均相对误差和均方根误差比文献[6]算法分别降低了 8.7% 和 36.3%.

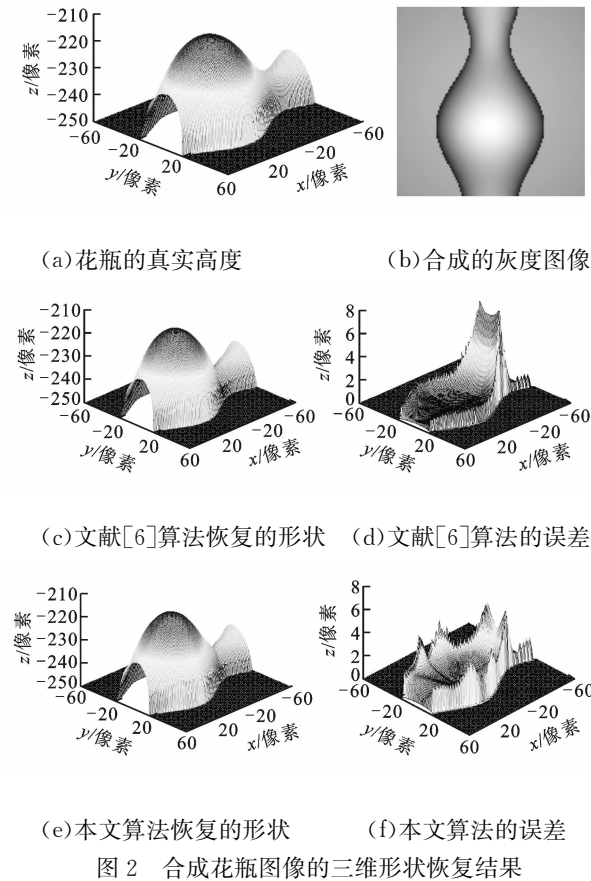
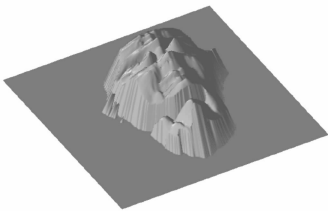


图 2 合成花瓶图像的三维形状恢复结果

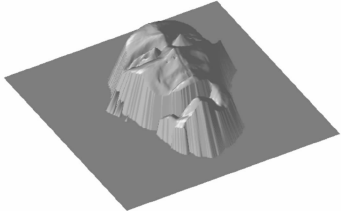
表 2 是本文算法和文献[6]算法的速度比较. 由表 2 可以看出, 在相同的误差条件下, 本文算法的 CPU 运行时间有较大幅度的减少. 在高度平均相对误差约为 0.5% 时, 本文算法的 CPU 运行时间比文



(a) 实际人脸的灰度图像



(b) 文献[6]算法恢复的形状



(c) 本文算法恢复的形状

图 3 实际人脸图像的三维形状恢复结果

表 1 本文算法与文献[6]算法的误差比较

迭代次数	高度平均相对误差/%		高度均方根误差/像素	
	文献[6]算法	本文算法	文献[6]算法	本文算法
1	7.722 7	2.436 4	0.829 7	0.349 3
10	2.127 8	1.346 7	0.293 4	0.218 3
20	1.061 5	0.770 3	0.180 5	0.125 6
30	0.621 1	0.475 2	0.111 0	0.068 1
39	0.396 7	0.362 2	0.068 4	0.043 6

表 2 本文算法与文献[6]算法的速度比较

高度平均相对误差/%	CPU 运行时间/s	
	文献[6]算法	本文算法
2.0	7.8	1.8
1.5	9.9	5.0
1.0	15.1	8.9
0.5	23.8	18.2

3.2 真实图像的三维形状恢复

图 3 是对 Prados 和 Faugeras 等人^[6-7,9-10]提供的一幅实际拍摄的人脸图像进行三维形状恢复的结果. 图 3a 是原始的图像, 由于光源采用相机自带的闪光灯, 因此符合图 1 所示的成像模型. 图像的分辨率为 192×256 像素, 每个像素大小为 $0.036\text{ mm}\times 0.036\text{ mm}$. 由图 3b 及图 3c 可见, 本文算法较文献[6]算法, 在上额、鼻梁、下额及颧骨等处恢复的结果更加逼真. 总体而言, 本文算法恢复的三维形状的局部细节信息更加准确.

4 结 论

本文在前人研究的基础上, 提出了一种 SFS 的快速黏性解算法. 将基于透视投影模型下的图像辐照度方程, 转化为包含物体表面深度信息的静态 Hamilton-Jacobi 偏微分方程, 使用非线性规划原理逼近该微分方程的黏性解, 进而得到目标物体的三

维高度. 实验结果表明,本文算法比 Prados-Faugeras 算法在重构误差、运算速度等性能上均有所改善.

参考文献:

- [1] HORN B K P. Height and gradient from shading [J]. International Journal of Computer Vision, 1990, 5 (1): 37-75.
- [2] ZHANG R, TSAI P S, CRYER J E, et al. Shape from shading: a survey [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21 (8): 690-706.
- [3] DUROU J D, FALCONE M, SAGONA M. Numerical methods for shape-from-shading: a new survey with benchmarks [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2008, 109 (1): 22-43.
- [4] 杨磊, 韩九强. 一种由明暗恢复形状的改进变分算法 [J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(4): 418-422.
YANG Lei, HAN Jiuqiang. Improved variational algorithm of shape-from-shading [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42 (4): 418-422.
- [5] ROUY E, TOURIN A. A viscosity solutions approach to shape-from-shading [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29 (3): 867-884.
- [6] PRADOS E, FAUGERAS O. Shape from shading: a well-posed problem? [C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society, 2005: 870-877.
- [7] PRADOS E, FAUGERAS O, CAMILLI F. Shape from shading: a well-posed problem, RR-5297 [R]. Paris, France: INRIA, 2004.
- [8] JIA Honghai, WANG Ying, HAN Jiuqiang, et al. Research on a new sfs shape recovery method based on perceptive model [C]// Proceedings of the 10th Meeting on Image Recognition and Understanding. Tokyo, Japan: IEICE Information and System Society, 2007: 649-653.
- [9] PRADOS E, FAUGERAS O. A rigorous and realistic shape from shading method and some of its applications, RR-5133 [R]. Paris, France: INRIA, 2004.
- [10] PRADOS E, CAMILLI F, FAUGERAS O. A unifying and rigorous shape from shading method adapted to realistic data and applications [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006, 25 (3): 307-328.

(编辑 刘杨)