

求解非定常方柱绕流的可变周期时间谱方法

张伟, 席光

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对周期性非定常流动特点, 采用时间谱方法求解了无限大区域内低雷诺数下二维不可压缩层流绕方柱流动问题. 由于方柱绕流的非定常运动周期事先未知, 在计算过程中加入了基于残差梯度的可变周期计算方法, 使变量和周期可以同时迭代计算. 研究了时间谱方法的计算精度和求解速度, 分析了不同求解参数对最终结果的影响. 计算结果表明, 时间谱方法可以准确地模拟方柱后漩涡的非定常运动现象, 而计算所需时间只是传统的基于有限差分的双时间推进方法的 10%~25%, 流体非定常运动的 Strouhal 数和方柱的阻力特性证实了这种方法的正确性. 可变周期计算方法对求解参数的变化不敏感, 可以准确地预测运动周期.

关键词: 周期性非定常流动; 不可压缩层流; 方柱; 时间谱方法; 双时间推进方法

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2009)05-0114-05

Application of Variable Period Time Spectral Method to Unsteady Flow Around Rectangular Cylinder

ZHANG Wei, XI Guang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xian 710049, China)

Abstract: Based on the characteristic of time periodic unsteady flow, the time spectral method was applied to two-dimensional incompressible laminar flow around a rectangular cylinder in infinite medium at low Reynolds numbers. A variable time period method based on residual gradients was combined to iterate the variables and time period simultaneously because of the unknown time period of flow around the cylinder. The accuracy and convergence rate of the time spectral method were investigated and the influence of different parameters on the final results was analyzed. The results show that the present method could simulate the vortex shedding phenomenon accurately and the time cost could decrease to 10%-25% of that of the conventional dual time stepping method based on the finite difference scheme. The Strouhal number and drag characteristics confirm the feasibility of the present method. Our results indicate that the variable time period method is insensitive to parameter selection and can predict the time period accurately.

Keywords: periodic unsteady flow; incompressible laminar flow; rectangular cylinder; time spectral method; dual time stepping method

周期性非定常流动是许多工程领域的热点问题. 传统方法求解非定常流动问题是基于人们对时间单向性的自然理解, 通过顺序求解时间方向上不同时刻的流场, 从而达到对流动现象时间发展过程的认识, 基于有限差分的双时间推进方法^[1]就是这

种思想的代表. 这种方法的缺点在于: 为了保证时间方向上的精度, 需要在一个周期内布置大量的计算点, 耗费很长的计算时间. 因此, 高效算法的提出就成为非定常流动求解中必须研究的问题之一.

本文采用的时间谱方法^[2-3]是基于离散傅里叶

变换的非定常流动数值计算方法,这种方法最大的特点就是将非定常方程组转化成为多个定常方程组,从而避免了非定常计算中耗费大量时间的中间过渡解的计算,极大地缩短了计算时间.为了解决钝体绕流中非定常运动周期事先未知的问题,本文将基于残差梯度的可变周期计算方法^[3]与时间谱方法相结合,使待求解的流动变量和周期耦合起来同时进行迭代计算,以实现计算时间的大幅度减小.

1 时间谱方法理论模型

1.1 流动控制方程组

控制方程组为直角坐标系下归一化二维不可压缩层流 Navier-Stokes 方程组,即

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{u}(u, v)$ 是直角坐标系 (x, y) 下的速度, x, y 轴分别平行和垂直于流向; p 是压力; $Re = U_{in} H / \nu$ 是雷诺数,其中 U_{in} 为来流速度, H 为方柱宽度, ν 为运动黏性系数; t 为时间;计算域几何布置见图1.

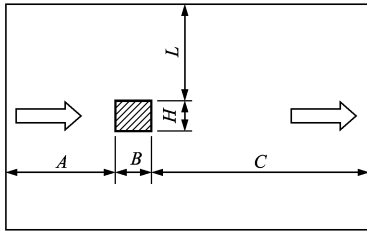


图1 计算域几何布置

1.2 时间谱方法

对于方柱绕流问题,假设所有流动变量 (p, u, v) 在时间方向上呈周期性变化,时间谱方法选择傅里叶级数作为求解变量的基函数^[4],将一个周期 T 分为 N 等份(N 为奇数),式(1)中的速度可以表示为

$$\mathbf{u}^n = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \hat{\mathbf{u}}_k e^{ik \frac{2\pi}{T} n \Delta t} \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{u}^n e^{-ik \frac{2\pi}{T} n \Delta t} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{u}^n$ 为时域内 $n \Delta t$ 时刻的速度; $\hat{\mathbf{u}}_k$ 为频域内波数为 k 时的速度幅值; i 为虚数单位.上述两式表示速度分量在时域和频域之间作正/逆离散傅里叶变换.速度的时间导数项表示为

$$\frac{d\mathbf{u}^n}{dt} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} ik \hat{\mathbf{u}}_k e^{ik \frac{2\pi}{T} n \Delta t} \quad (4)$$

将式(3)代入式(4),经过化简该导数项可以表示为

$$\frac{d\mathbf{u}^n}{dt} = \frac{2\pi}{T} \sum_{j=0}^{N-1} d_n^j \mathbf{u}^j \quad (5)$$

$$d_n^j = \begin{cases} \frac{1}{2} (-1)^{n-j} \operatorname{cosec}(\frac{\pi(n-j)}{N}) & n \neq j \\ 0 & n = j \end{cases} \quad (6)$$

时间谱方法实质上是时间导数项的特殊差分格式,这种格式利用流动的时间周期性特点,将某时刻变量的时间导数项解析地表示为同一周期内所有计算时刻该变量的加权平均值,将非定常问题中顺序排列先后求解的多个时间点转化为并列排列同时求解的时间点形式,非定常方程组转化为多个相互耦合的定常方程组,避免了非定常求解过程中过渡解的计算,在一定程度上减少了求解时间.

1.3 人工压缩方法

采用人工压缩方法^[5]解决连续方程中压力与速度失耦问题,并用虚拟时间推进方法求解方程组,用于计算的方程组最终形式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p^n}{\partial \tau} + \nabla \cdot \mathbf{u}^n &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial \tau} + \frac{2\pi}{T} \sum_{j=0}^{N-1} d_n^j \mathbf{u}^j + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n &= \\ -\nabla p^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n & \end{aligned} \quad (7)$$

式中: β^2 表示人工压缩系数,该系数的选取需要在计算精度和速度之间取得平衡,本文的所有计算中 $\beta^2=5$; τ 表示虚拟时间.

1.4 可变周期计算方法

钝体绕流的非定常流动是自发形成的,在不同的几何布置和流动参数下,绕方柱流动的非定常运动周期事先未知,由式(7)可以看出,只有正确的周期 T 才满足周期性非定常流动方程组,才能反映正确的流动现象.本文采用基于残差梯度的可变周期计算方法解决这一问题,在时间推进对方程进行积分的过程中,将 y 方向动量方程的残差记为

$$\begin{aligned} I_n^m &= \frac{2\pi}{T} \sum_{j=0}^{N-1} d_n^j \mathbf{v}^j + (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \\ \nabla p^n - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}^n & \end{aligned} \quad (8)$$

计算的目的是寻找到合适的 T ,使 I_n 趋近于0,这是单变量单目标函数的无约束最小值问题,采用以下定步长最速下降法

$$\frac{\partial |I_n^m|^2}{\partial T} = 2I_n^m \frac{-2\pi}{T^2} \sum_{j=0}^{N-1} d_n^j \mathbf{v}^j \quad (9)$$

$$T^{k+1} = T^k - \Delta T \frac{\partial |I_n^m|^2}{\partial T} \quad (10)$$

式中: m 表示虚拟时间层中的迭代步. 选取合适的初值 T^0 和时间步长 ΔT , 运动周期和计算变量可以同时迭代求解并达到收敛.

2 数值方法

2.1 计算方法

对于所求解的问题, 时间谱方法(TS)中采用有限体积法, 对流和扩散项均为中心差分格式, 加入四阶常系数人工黏性项抑制波动. 采用低存储量四阶龙格-库塔法求解代数方程组式(7), 其中虚拟时间导数项为一阶向前差分格式. 借助当地时间步长、隐式残差光顺和 V 循环四重网格加速收敛. 为了检验时间谱方法的计算精度和速度, 采用传统的基于有限差分的双时间推进方法(BDF)求解同一问题进行对比, 物理时间导数项采用 3 点向后隐式差分格式, 时间步长 $\Delta t=0.1$, 空间差分格式、代数方程组求解方法和加速手段均与时间谱方法相同.

2.2 定解条件

进口处来流均匀, $u=1, v=0, \partial p/\partial n=0$; 出口处 $\partial u/\partial n=0, \partial v/\partial n=0$, 指定压力 $p=0$; 上下边界处采用对称边界条件模拟无摩擦的壁面, $\partial u/\partial n=0, v=0, \partial p/\partial n=0$; 方柱表面速度无滑移, 压力由流场内部二阶外推得到. 初始流场假设均匀, 全场压力与速度均与来流相同.

3 计算结果及分析

3.1 网格参数

计算假定在无限大区域内进行, 图 1 中各个参数的选取见表 1. 网格系统对结果有重要的影响, 结合文献[5]和本文数值实验, 沿 x 和 y 方向生成 144×104 结构化网格, 网格线按照双曲正切规律分布, 在靠近方柱区域加密, 方柱附近局部网格见图 2.

表 1 计算域几何参数

H	$A \cdot H^{-1}$	$B \cdot H^{-1}$	$C \cdot H^{-1}$	$L \cdot H^{-1}$
1	10	1	30	10

3.2 收敛准则

计算残差为全场流动参数变化的均方根值. 时间谱方法中残差定义为

$$R = \frac{\max_{n=0}^{N-1}(\sum_{j=1}^{M_{\text{total}}} \sum_{i=1}^3 (\Delta \varphi_{ij}^2))}{M_{\text{total}}}$$

(11)

式中: M_{total} 表示总网格数; $\varphi=(p, u, v)$. 双时间推进法中残差定义为

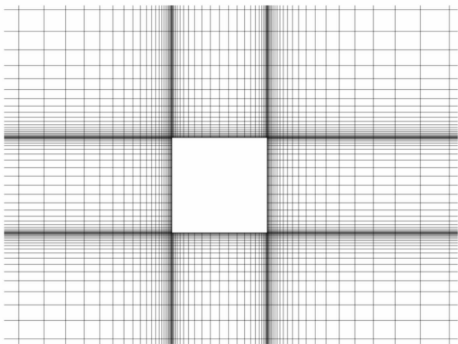


图 2 局部网格

$$R = \frac{\sum_{j=1}^{M_{\text{total}}} \sum_{i=1}^3 (\Delta \varphi_{ij}^2)}{M_{\text{total}}}$$

(12)

实际应用中采用残差的相对值判断收敛

$$\epsilon = R/R^0$$

(13)

式中: R^0 为本次循环初次迭代残差. 时间谱方法中, $\epsilon=10^{-3}$, 并且 T 波动不大即认为收敛; 双时间推进法中, $\epsilon=10^{-3}$ 或者迭代 1 000 步后推进到下一个物理时间层.

3.3 计算结果

为了验证本文方法的准确性, 以 Sohankar^[6-7]、Okajima^[8-9]等人对方柱绕流问题进行的实验和数值模拟内容为参考对象进行了计算. 图 3 为表征非定常运动周期特征的 Strouhal 数随雷诺数的变化曲线, 图 4 为方柱平均阻力系数 C_D 随雷诺数的变化曲线. 文献[6-9]中的实验和数值计算结果表明, 方柱绕流是一个对外界环境比较敏感的问题, 由于计算参数和实验环境的差异, 不同结果之间差别较大, 但对于低雷诺数流动, $Re=100 \sim 200$ 时得到的结果基本接近^[6]. 由图 3 和图 4 看出, 与文献中的实验和计算结果对比, 双时间方法和时间谱方法均得到了与文献数据相符的结果.

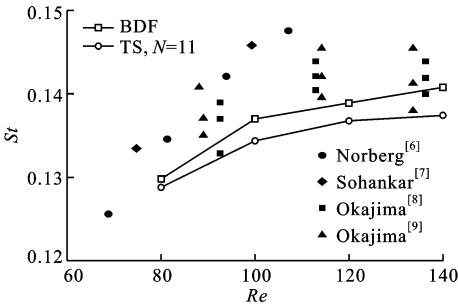


图 3 Strouhal 数随 Re 变化的曲线

图 5 表示在时间谱方法中, 一个周期内取不同

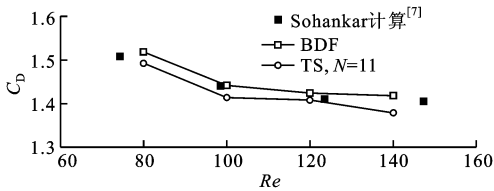


图 4 平均阻力系数 C_D 随 Re 变化的曲线

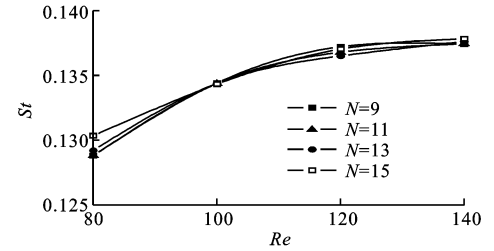


图 5 不同 N 对 Strouhal 数的影响

数量的计算时间点 N 对 Strouhal 数的影响. 在本问题中,在 $N=9\sim 15$ 时均得到了非常接近的结果,说明 $N=9$ 已经可以准确地模拟绕方柱流动的非定常运动过程.

图 6 所示为 2 种方法得到周期性非定常解所需的 CPU 时间 t_{CPU} ,其中双时间推进方法所用时间为阻力系数得到第二个周期规律运动所需时间. 计算时间与 N 并不是完全的单调关系, N 增大后进行一次迭代所需的计算量增大,但同时导数项的数值差分计算更加准确,因此两者之间关系比较复杂. 在本问题中,不同 N 计算所需时间仅为双时间推进方法的 10%~25%. 对于运动规律复杂的问题,需要较大的 N 才能得到正确的结果,也即变量在时间方向上的真实值是由多个不同波长的谐波叠加而成的,这会增加计算所需存储空间,对计算速度也有一定程度的影响.

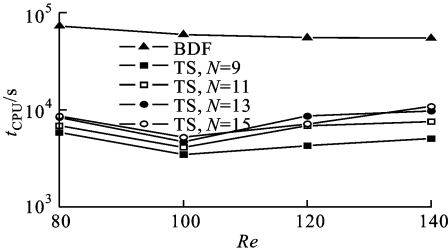


图 6 不同方法所用 CPU 时间比较

图 7 是在 $Re=100$ 、 $N=9$ 的情况下,由不同的初始猜测值 T^0 和时间步长 ΔT 组合得到的运动周期. 不同参数组合对最终结果没有影响,非定常运动周期最终收敛到同一个值,证明了可变周期计算方法的准确性和稳定性. 图 8 是 3 个等间隔时刻的流

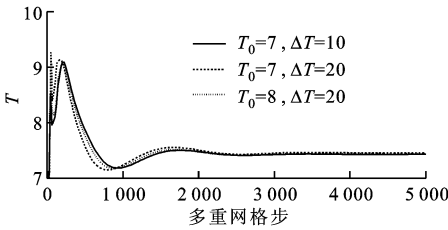


图 7 不同 T^0 和 ΔT 对计算结果的影响

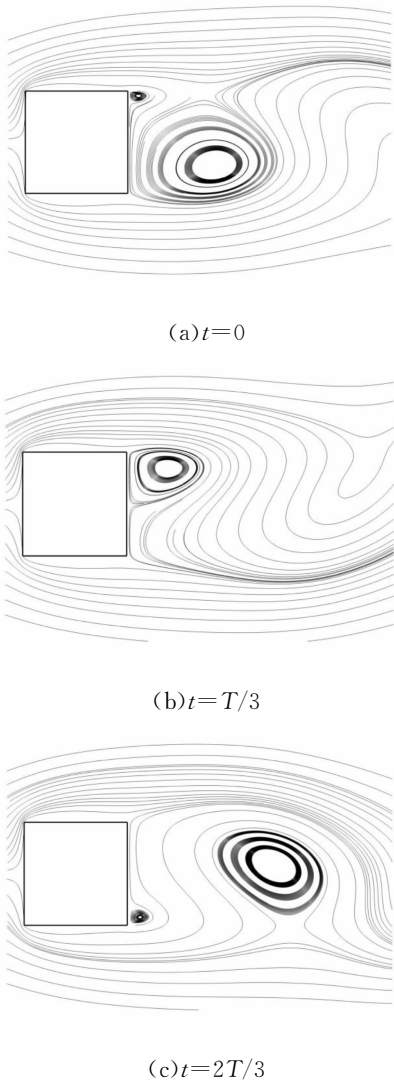


图 8 $Re=100$ 、 $N=9$ 条件下不同时刻的流线图

线图,表现出方柱后缘交替产生分离漩涡并逐渐发展的过程.

4 结 论

应用时间谱方法计算了低雷诺数二维不可压缩绕方柱的周期性非定常流动,计算结果表明:

(1)时间谱方法可以准确地模拟周期性非定常

流动的整个过程,本文计算得到的 Strouhal 数和方柱阻力系数表明该方法有较高的精度.在本问题中, $N=9$ 已经可以得到准确的结果.

(2)针对非定常运动周期事先未知的问题,采用基于残差梯度的可变周期计算方法,使变量和周期的求解同时进行,计算结果表明这种方法切实可行,同时稳定性很好.

(3)与传统的双时间推进方法相比,时间谱方法求解周期性非定常流动问题的最大优势在于其大大缩短了计算时间.本算例中,时间谱方法所需的 CPU 时间仅为双时间推进方法的 $10\% \sim 25\%$,是一种很有前途的计算方法.

参考文献:

- [1] JAMESON A. Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings [C/OL]. Proceedings of AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference. [2008-07-20]. <http://aero-comlab.stanford.edu/jameson/publication-list.html>.
- [2] GOPINATH A K, JAMESON A. Time spectral method for periodic unsteady computations over two- and three-dimensional bodies [C/OL]. 43rd AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. [2008-07-20]. <http://aero-comlab.stanford.edu/jameson/publication-list.html>.
- [3] GOPINATH A K, JAMESON A. Application of the time spectral method to periodic unsteady vortex shedding [C/OL]. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. [2008-07-20]. <http://aero-comlab.stanford.edu/jameson/publication-list.html>.
- [4] HESTHAVEN J S, GOTTLIEB S, GOTTLIEB D. Spectral methods for time-dependent problems [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007: 48-52.
- [5] CHORIN A J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems[J]. Journal of Computational Physics, 1967, 2(1):12-26.
- [6] SOHANKAR A, NORBERG C, DAVIDSON L. Numerical simulation of unsteady low-Reynolds number flow around rectangular cylinders at incidences [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1997, 69/71:189-201.
- [7] SOHANKA A, NORBERG C, DAVIDSON L. Numerical simulation of unsteady flow around a square two-dimensional cylinder[C/OL]. Proceedings of the 12th Australian Fluid Mechanics Conference. [2008-07-20]. <http://www.tfd.chalmers.se/~lada/projects/ahmad/proright.html>.
- [8] OKAJIMA A. Strouhal numbers of rectangular cylinders[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1982, 123(10): 379-398.
- [9] OKAJIMA A. Numerical analysis of the flow around an oscillating cylinder[C]//Bearman P W. Proceedings of 6th International Conference of Flow-Induced Vibration. Rotterdam, Holland: Balkema, 1995: 1-7.

(编辑 王焕雪)