

用伪二叉树法则构造多目标 Pareto 最优解集的方法

胡焕耀, 董渭清

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对多目标进化算法中如何提高非支配集构造效率的问题, 提出了一种用伪二叉树法则构造多目标 Pareto 最优解集的方法. 根据多目标解的性质, 将解的比较结果分为支配、被支配以及不相关 3 种类型, 再根据解的比较结果生成排序伪二叉树. 在每一轮比较中, 从进化群体中选出一个个体, 将该个体与当前非支配集中的个体进行比较, 淘汰被支配的个体, 而未被淘汰的个体将插入到非支配集中第一个被淘汰个体的位置. 依次进行, 直到进化群体中的个体比较完毕, 从而生成排序的伪二叉树. 同时, 在理论上证明了采用该方法获取的非支配集为目标进化群体的最大非支配集, 分析得知其在最差情况下的时间复杂度为 $O(rN^2/2)$. 实验结果表明, 当目标数较大时 ($r \geq 5$), 在构造非支配集的效率上伪二叉树法要明显优于 Deb, Jensen 算法及擂台赛法则.

关键词: 多目标进化; 最优解集; 非支配集; 伪二叉树法则

中图分类号: TP301 **文献标志码:** **文章编号:** 0253-987X(2009)02-0029-04

An Approach to Constructing Multi-Objective Pareto Optimal Solutions Using Pseudo Binary Tree's Rule

HU Huanyao, DONG Weiqing

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To improve the efficiency of building a non-dominated set in multi-objective evolution algorithm, an approach called Pseudo binary tree's rule is proposed to construct the Pareto optimal solutions. The multi-objective solutions are divided into three types: dominated, non-dominated and irrelevant, based on their natures and comparison results, and then the sorting pseudo binary tree is generated according to the comparison results. An individual in the evolution group is selected in every round of comparison. Then the selected individual is compared with the individuals in the non-dominated set, and those that are dominated are eliminated. If the selected one survives, it replaces the first eliminated individual in the non-dominated set. Repeat the process successively until there is no individual left in the evolution group, and a sorting pseudo binary tree is generated. It is proved in theory that the non-dominated set obtained by the proposed method is the biggest non-dominated set in the objective evolution group, and the worst time complexity is $O(rN^2/2)$. Experimental results show that when the number of objects is comparatively large ($r \geq 5$), the efficiency of building the non-dominated set using the pseudo binary tree's rule is obviously higher than that using Deb's algorithm, Jensen's algorithm or arena's principle.

Keywords: multi-objective evolution; optimal solution; non-dominated set; pseudo binary tree's rule

多目标优化问题(MOP)^[1]是指那些同时具有多个目标优化的问题,通常具有多个目标函数,各目标涉及相同的一组决策变量,并相互制约.如果对多目标中的一个目标进行优化,则必须以其他目标作为代价,因此很难客观地评价多目标问题解的优劣.一般情况下,多目标优化问题的解不是惟一的,而是存在一个最优解集合,集合中的元素称为 Pareto 最优解或者非劣解^[2].多目标优化问题可以表示为将 n 个变量映射到 m 个目标函数的向量函数.

目前,研究者对多目标进化算法(MOEA)^[3-5]进行了深入研究,提出了多种多目标进化算法,在这些进化算法中,一般是通过 Pareto 占优比较方法获取一组非劣解作为结果.

在基于 Pareto 的方法中,每一次子代的进化操作都需要获取当前进化群体的非支配集,因此如何提高构造非支配集效率将直接影响多目标进化算法的运行效率.

在构造非支配集合的算法中,最具代表性的就是 Deb 的构造非支配集方法^[6-7],其时间复杂度均不低于 $O(rN^2)$.另外,Jensen 采用一种递归的方法构造非支配集^[8],时间复杂度为 $O(N(\lg N)^{-1})$.

文献[9]提出了一种基于擂台赛法则构造非支配集的方法,即在每一轮中选出一个个体作为擂主并同其他个体比较,败者被淘汰,胜者成为新擂主,最后的擂主即为非支配个体,依此类推,直至产生所有的非支配个体为止.该算法在最差情况下的时间复杂度为 $O(rmN)$.

本文针对多目标进化算法中如何提高非支配集构造效率的问题,提出了一种伪二叉树法则构造多目标 Pareto 最优解集的方法.

1 多目标优化群体最优解集构造及分析

1.1 用伪二叉树法则构造非支配集的方法

假设进化群体为 P , N_{ds} 为非支配集,初始时的 N_{ds} 为空.

从 P 中取一个个体 X ,依次同 N_{ds} 中所有个体 Y 比较.如果 X 支配 Y ,则在 N_{ds} 中删除 Y ,并且将 X 插入 N_{ds} 中;如果 Y 支配 X ,则放弃个体 X ,并从 P 中再取一个个体继续进行比较.依此类推,直至 P 为空.构造非支配集的具体过程见算法 1.

算法 1 伪二叉树法则构造非支配集基本算法.

假设 P 为 n 个目标的进化群体,初始时令非支配集 $N_{ds} = \emptyset$, T 为非支配解集合中解的个数,初始时 $T=0$,则进行下列步骤.

- (1)从进化群体 P 中选一个个体 X .
- (2)令 $P = P - X$, $N_{ds} = N_{ds} + X$, $T = T + 1$.
- (3)若 P 为空,则下转(6),否则从 P 中任取一个个体 Y ,令 $P = P - Y$,取 $T' = T$.
- (4)从 N_{ds} 中取 Z , $T' = T' - 1$.
- (5)若 $Z \succ Y$,则上转(3);若 $Y \succ Z$,则 $T = T - 1$, $N_{ds} = N_{ds} - Z$;若 $T' = 0$,则 $N_{ds} = N_{ds} + Y$, $T = T + 1$,上转(3);否则,上转(4).
- (6)输出非支配解集 N_{ds} 中的解.

在一轮的比较中,如果新获取的个体支配 N_{ds} 集中的个体,则将被支配个体从 N_{ds} 集中剔除,同时将新个体插入到 N_{ds} 集合中,并同 N_{ds} 中剩余个体进行比较,清除被其支配的其余个体.

由于在 N_{ds} 集合中的个体是互不可支配的,在比较过程中如果新个体 X 支配 N_{ds} 集合中的个体 Y ,则 X 不会被 N_{ds} 集合中其余个体支配,所以可将 X 直接插入到 N_{ds} 集合中.

1.2 构造方法的正确性分析

讨论本文方法构造非支配集的正确性有二:一是该方法获得的解即为 Pareto 最优解;二是不存在不属于 N_{ds} 集合的 Pareto 最优解.

证明 1 用本文方法获得的解为 Pareto 最优解.

假设存在着一个解 $X \in N_{ds}$,且 X 不是集合 P 的 Pareto 最优解,即存在 Pareto 最优解 Y 满足 $Y \succ X$,则有下列 2 种结果.

(1)当 X 先于 Y 进入解集 N_{ds} ,即从 P 中取个体 Y 时, X 已经处于集合 N_{ds} 中.

由算法 1 可知,在 N_{ds} 中取 X 时,由于 $Y \succ X$,则在 N_{ds} 中淘汰个体 X ,亦即 X 不可能存在于解集 N_{ds} 中.

(2)当 Y 先于 X 进入解集 N_{ds} ,即从 P 中取个体 X 时, Y 已经处于集合 N_{ds} 中.

由算法 1 可知,在 N_{ds} 集中取 Y 时,由于 $Y \succ X$,则淘汰个体 X ,重新在 P 中获取新的个体,亦即 X 不可能进入解集 N_{ds} 中.

综合上述 2 种情况表明,用本文方法获得的解为 P 的 Pareto 最优解.

证明 2 不存在不属于集合 N_{ds} 中的 Pareto 最优解.

假设存在一个 P 的 Pareto 最优解 X ,且解 $X \notin N_{ds}$,由于 X 为 P 的 Pareto 最优解,所以 P 中不存

在个体 Y , 满足 $Y \succ X$.

由算法 1 可得下述 2 种结果.

(1) 当从 P 中取个体 X 时, 由于 N_{ds} 中不存在个体 Y , 满足 $Y \succ X$, 所以 X 已加入 N_{ds} 集合.

(2) 当在 P 中再任取个体时, 由于 P 中不存在个体 Z , 满足 $Z \succ X$, 所以 X 不会被淘汰.

综合上述 2 种结果表明, 用本文方法获得非支配集之后, 不存在 P 的 Pareto 最优解不存在于 N_{ds} 集合中的情况.

由此可知, 按照上述方法构造的非支配集 N_{ds} 是 P 的最大非支配集.

下面讨论本文算法的时间复杂度.

假设初始进化群体集合 P 的大小为 N , P 中共有 m 个非支配个体, K_i 为第 i 轮比较操作前 N_{ds} 集合中非支配解的个数, $K_1 = 0$. 算法总共执行了 N 轮比较操作, 在第 i 轮比较操作中可能会生成一个临时的非支配解并插入 N_{ds} 之中, 同时也会淘汰 N_{ds} 中 H 个被支配的个体 (H 不小于 0, 且不大于 K_i), 因此在第 $i+1$ 轮比较前 N_{ds} 集合中非支配解个数 $K_{i+1} \leq K_i + 1$, 即 $K_{i+1} \leq i$. 由此可得, 第 $i+1$ 轮的比较次数 K_{i+1} 不大于 $i+1$. 所以, 最坏情况下的时间复杂度为

$$T(N) = \sum_{i=1}^N K_i \leq \sum_{i=1}^N (i-1) = \frac{N(N-1)}{2} \leq \frac{N^2}{2}$$

即最坏情况下算法的时间复杂度为 $O\left(\frac{rN^2}{2}\right)$, 其中 r 为优化目标数.

已知擂台赛法则在最差情况下的时间复杂度为 $O(rmN)$. 在多目标优化问题中, 实际测试环境下的每一代非支配个体比率一般会保持在 $60\%^{[9]}$, 即 m/N 的值保持在 0.6. 由此可见, 在时间复杂度上, 伪二叉树法则的性能要优于擂台赛法则.

1.3 构造非支配集实例

本文采用的伪二叉树法则借鉴了二叉树排序的基本思想, 其根据个体之间的 Pareto 优劣关系生成伪二叉树, 这样在树节点之间保存了个体优劣关系的性质, 从而在构造非支配集合时能有效降低个体之间的比较次数.

文献[9]中设计了具体实例, 下面用伪二叉树法则来构造该实例的非支配集, 具体描述如下.

如果 $C_1 = (9, 1)$, $C_2 = (7, 2)$, $C_3 = (5, 4)$, $C_4 = (4, 5)$, $C_5 = (3, 6)$, $C_6 = (2, 7)$, $C_7 = (1, 9)$, $C_8 = (10, 1)$, $C_9 = (8, 5)$, $C_{10} = (7, 6)$, $C_{11} = (5, 7)$, $C_{12} = (4, 8)$, $C_{13} = (3, 9)$, $C_{14} = (10, 5)$, $C_{15} = (9, 6)$, $C_{16} =$

$(8, 7)$, $C_{17} = (7, 9)$, $C_{18} = (10, 6)$, $C_{19} = (9, 7)$, $C_{20} = (8, 9)$, 给定集合 $\{C_{15}, C_{16}, C_{11}, C_6, C_8, C_{13}, C_1, C_9, C_{17}, C_{10}, C_7, C_3, C_{12}, C_2, C_{14}, C_{18}, C_4, C_{20}, C_5, C_{19}\}$, 再用伪二叉树法则来构造非支配集, 最终经过 20 轮共 50 次比较后, 得到非支配集 $\{C_1, C_6, C_3, C_7, C_2, C_4, C_5\}$. 同此可见, 它的比较次数均比 Deb 和 Jensen 算法要少.

2 实验结果

本文通过实验来获取构造非支配集的比较次数, 以此验证上述分析. 实验环境为 Intel(R) Pentium(R) CPU 3.0 GHz, 512 MB 内存. 在实验中, 子目标数 $r = 2, 5, 8, 10$. 针对不同的子目标, $m/N = 20\%, 50\%, 80\%$, 其中 N 为群体的规模, m 为进化群体中实际的非支配个体数目. 实验结果是 100 次重复实验的统计结果, 如图 1 所示.

从图 1 的实验比较结果发现:

(1) 在相同目标数、不同非支配个体比率下, Jensen 算法的比较次数基本上是一致的, 而擂台赛、Deb 和伪二叉树算法随着非支配个体比率的增加, 比较次数显著增加;

(2) 当子目标数比较少时 ($r=2$), Jensen 算法性能明显最优, 但是其时间复杂度随着子目标数增加而显著增大, 特别是当子目标数 r 较大时 ($r=8$), 擂台赛、Deb 和伪二叉树算法的性能均优于 Jensen 算法, 而在 $r>5$ 的情况下, 伪二叉树算法的比较次数最少, 并且随着目标数的增加这种优势更加明显.

3 结 论

采用进化算法解决多目标优化问题是一种有效的方法, 但目前很多算法都比较复杂, 时间复杂度较高. 基于 Pareto 最优的多目标优化, 通过在每一步进化迭代中构造进化群体的非支配集, 并使之不断逼近 True Pareto 最优解集来实现. 因此, 构造非支配集的方法直接影响多目标进化算法的运行效率. 本文讨论了用伪二叉树法则构造多目标进化群体的 Pareto 最优解集方法, 论证了该方法的正确性, 并分析获得了其时间复杂度为 $O\left(\frac{rN^2}{2}\right)$, 最终通过实验比较发现, 当目标数较大时, 在构造非支配集的效率上, 伪二叉树算法则要明显优于 Deb、Jensen 的算法以及擂台赛法则.

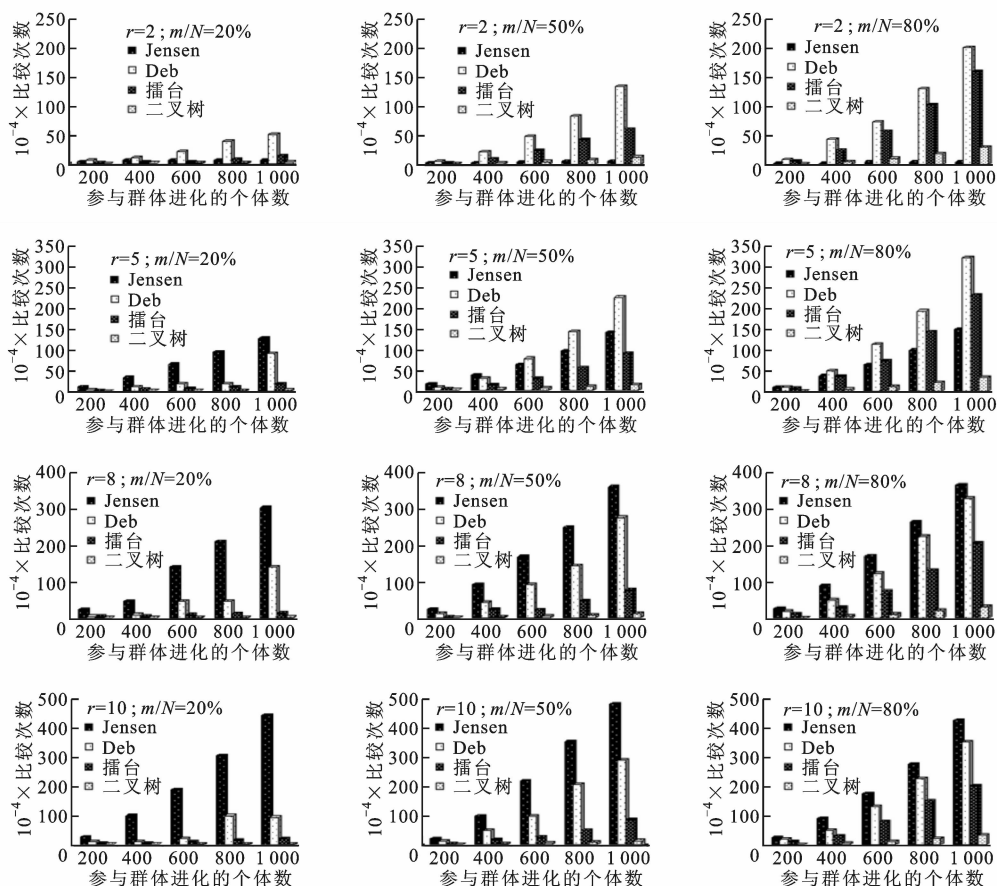


图1 获取构造非支配集的比较次数

参考文献:

- [1] SAWARAGI Y, NAKAYAMA H, TANINO T. Theory of multiobjective optimization [M]. New York, USA: Academic Press, 1985.
- [2] PARETO V. Cours D' economie politique: I, II [M]. Lausanne, Switzerland: F. Rouge, 1896.
- [3] CEOLLO C A, VAN VELDHUIZEN D A, LAMOUNT G B. Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems [M]. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [4] ATASHKARI K, NARIMAN-ZADEH N, PILECHI A, et al. Thermodynamic Pareto optimization of turbojet engines using multi-objective genetic algorithm [J]. International Journal of Thermal Sciences, 2005, 44 (11):1061-1071.
- [5] YEN G, LU H. Dynamic multiobjective evolutionary algorithm: adaptive cell-based rank and density estimation [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2003, 7(3):253-274.
- [6] DEB K, PRATAP A, AGRAWAL S, et al. A fast

and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(2):182-197.

- [7] DEB K, AGRAWAL S, PRATAB A, et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization NSGA-II, KanGAL Report, 200001 [R]. Kanpur, India: Indian Institute of Technology, 2000.
 - [8] JENSEN M T. Reducing the run-time complexity of multiobjective EAs: the NSGA-II and other algorithms [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2003, 7(5):503-515.
 - [9] 郑金华, 蒋浩, 邝达, 等. 用擂台赛法则构造多目标 Pareto 最优解集的方法 [J]. 软件学报, 2007, 18(6): 1287-1297.
- ZHENG Jinhua, JIANG Hao, KUANG Da, et al. An approach of constructing multi-objective pareto optimal solutions using arena's principle [J]. Journal of Software, 2007, 18(6):1287-1297.

(编辑 苗凌)