

非线性最优机器人手眼标定

王君臣, 王田苗, 杨艳, 胡磊
(北京航空航天大学机器人研究所, 100191, 北京)

摘要: 提出一种基于最大似然估计的非线性最优手眼标定算法, 并采用该方法对机器人进行了手眼标定. 由于机器人系统的运动学正解及相机的外参数推定都包含误差, 因此不能满足手眼标定矩阵方程, 从而导致现有机手眼标定算法对观测噪声较为敏感. 新算法根据包含噪声的测量值来估计它们的真值, 使得测量真值满足手眼标定方程, 并且在欧拉刚性变换矩阵空间中可使真值和对应的测量值的距离最小. 通过数值仿真和真实机器人手眼标定实验, 将新算法与现有 2 种经典的手眼标定算法进行了比较, 结果表明, 新算法在估计误差、对位姿变换次数的敏感度和稳定性方面均优于经典算法.

关键词: 机器人; 手眼标定; 最大似然估计

中图分类号: TP24 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)09-0015-06

Nonlinear Optimal Robot Hand-Eye Calibration

WANG Junchen, WANG Tianmiao, YANG Yan, HU Lei
(Robotics Institute, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Nonlinear optimal robot hand-eye calibration based on maximum likelihood estimation is proposed. For the errors in both robot forward position kinematics and camera extrinsic calibration, the classical hand-eye transformation matrix equation often gets violated, thus the existing robot hand-eye calibration algorithms derived from the equation are sensitive to the measurement noise. The proposed strategy estimates the hand-eye transformation and the true measurements according to the noisy measurements to guarantee that the true measurements satisfy the hand-eye equation and the distance to the noisy measurements is minimal. Two classical hand-eye calibration methods are also implemented for comparison. Numerical simulations and real robot hand-eye calibration experiment are performed and the results show the proposed strategy has higher accuracy, sensitivity to motion numbers, and stability.

Keywords: robot; hand-eye calibration; maximum likelihood estimation

机器人手眼标定是机器人视觉的一项基本任务, 它的目的是估计机器人末端执行器上搭载的相机坐标系到末端执行器坐标系的变换矩阵. 这个变换矩阵是许多高级机器人工作任务的基础, 例如机器人手眼协调、自主导航、视觉伺服、视觉融合、三维场景重建与测量等. 机器人手眼标定的数学模型是求解 $\mathbf{AX}=\mathbf{XB}$ 这种形式的齐次矩阵方程, 其中 $\mathbf{A}$ 表

示机器人变换一次位姿后相机的相对运动, $\mathbf{B}$ 表示末端执行器的相对运动, $\mathbf{X}$ 是待求的相机到末端执行器的变换矩阵, 也称为手眼变换矩阵, 它们都是齐次刚性变换矩阵. Shiu 等人^[1]证明了对于一次位姿变换(旋转角度不等于 0 或 π)时, $\mathbf{AX}=\mathbf{XB}$ 的解 $\mathbf{X}$ 具有旋转和平移 2 个自由度, 并给出了通过 2 次旋转轴非平行的位姿变换(旋转角度不等于 0 或 π)求

解 $\mathbf{X}$ 的封闭解法. 在实际求解中, 由于测量噪声的存在, 通过对机器人进行 N 次位姿变换, 得到 N 组相机运动的 $\mathbf{A}_i$ 和末端执行器运动的 $\mathbf{B}_i$, 然后求解矩阵方程组 $\mathbf{A}_i \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{B}_i, i=1, \dots, N$, 进而得到 $\mathbf{X}$. 由于 $\mathbf{X}$ 由旋转矩阵和平移向量组成, 因此手眼标定算法可以分成两类^[2]: ①先求解旋转矩阵再求解平移向量^[3-6]; ②同时求解旋转矩阵和平移向量^[7-10]. 这些算法利用不同的数学工具(旋转向量、单位四元数、对偶四元数等)对旋转矩阵和平移向量进行参数化, 通过最小化代数误差来求解 $\mathbf{X}$. 由于代数误差对测量噪声较为敏感, 并表现在算法的估计误差随着观测噪声的增加而迅速增大, 因此这些算法的鲁棒性较差, 估计精度较低. 本文基于最大似然估计(MLE)的思想, 提出了一种新的测度函数, 并通过对它进行非线性迭代优化来估计手眼变换矩阵.

1 手眼标定矩阵方程的求解

手眼标定矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{B}$ 可以解耦为旋转和平移 2 个部分

$$\mathbf{R}_A \mathbf{R}_X = \mathbf{R}_X \mathbf{R}_B \quad (1)$$

$$(\mathbf{R}_A - \mathbf{I})\mathbf{t}_X = \mathbf{R}_X \mathbf{t}_B - \mathbf{t}_A \quad (2)$$

式中: $\mathbf{R}$ 为 3×3 旋转矩阵; $\mathbf{t}$ 为 3×1 平移向量; $\mathbf{I}$ 为 3×3 单位矩阵; 下标表示所对应的齐次矩阵.

1.1 旋转和平移解耦估计算法

设 $\mathbf{R}_A$ 的单位旋转轴为 $\mathbf{n}_A$, $\mathbf{R}_B$ 的单位旋转轴为 $\mathbf{n}_B$, 则 $\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B$ 分别为 $\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B$ 的单位特征值所对应的特征向量, 则式(1)可写为

$$\mathbf{R}_A \mathbf{R}_X \mathbf{n}_B = \mathbf{R}_X \mathbf{R}_B \mathbf{n}_B = \mathbf{R}_X \mathbf{n}_B \quad (3)$$

即 $\mathbf{R}_X \mathbf{n}_B$ 是 $\mathbf{R}_A$ 的单位特征值对应的特征向量, 于是有

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{R}_X \mathbf{n}_B \quad (4)$$

将式(4)写成四元数乘积的形式, 即

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{q}_X * \mathbf{n}_B * \bar{\mathbf{q}}_X \quad (5)$$

$$\min_{\mathbf{s.t.} \|\mathbf{q}_X\|=1} \delta_1 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{n}_A^i - \mathbf{q}_X * \mathbf{n}_B^i * \bar{\mathbf{q}}_X\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^N \|\mathbf{n}_A^i - \mathbf{q}_X * \mathbf{n}_B^i * \bar{\mathbf{q}}_X\|^2 \cdot \|\mathbf{q}_X\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^N \|\mathbf{n}_A^i * \mathbf{q}_X - \mathbf{q}_X * \mathbf{n}_B^i\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^N \|Q(\mathbf{n}_A^i) \mathbf{q}_X - W(\mathbf{n}_B^i) \mathbf{q}_X\|^2 = \mathbf{q}_X^T \Lambda \mathbf{q}_X \quad (6)$$

式中: $\mathbf{q}_X$ 为对应于 $\mathbf{R}_X$ 的单位四元数; $\bar{\mathbf{q}}_X$ 为 $\mathbf{q}_X$ 的共轭; 半正定对称矩阵

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N (Q(\mathbf{n}_A^i) - W(\mathbf{n}_B^i))^T (Q(\mathbf{n}_A^i) - W(\mathbf{n}_B^i)) \quad (7)$$

$$Q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$W(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

根据简单的线性代数知识, 式(6)的解 $\mathbf{q}_X$ 就是 Λ 最小特征值对应的单位特征向量, 即求出了 $\mathbf{X}$ 的旋转矩阵 $\mathbf{R}_X$. 于是, 式(2)就成为关于 $\mathbf{t}_X$ 的线性方程组, 即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_A^1 - \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_A^2 - \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_A^N - \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{t}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_X \mathbf{t}_B^1 - \mathbf{t}_A^1 \\ \mathbf{R}_X \mathbf{t}_B^2 - \mathbf{t}_A^2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_X \mathbf{t}_B^N - \mathbf{t}_A^N \end{bmatrix} \quad (10)$$

1.2 旋转和平移同步估计算法

将式(2)移项并写成四元数乘积的形式

$$\mathbf{q}_X * \mathbf{t}_B * \bar{\mathbf{q}}_X - (\mathbf{R}_A - \mathbf{I})\mathbf{t}_X - \mathbf{t}_A = \mathbf{0} \quad (11)$$

定义

$$\delta_2 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{q}_X * \mathbf{t}_B^i * \bar{\mathbf{q}}_X - (\mathbf{R}_A^i - \mathbf{I})\mathbf{t}_X - \mathbf{t}_A^i\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^N \|\mathbf{q}_X * \mathbf{t}_B^i * \bar{\mathbf{q}}_X - (\mathbf{R}_A^i - \mathbf{I})\mathbf{t}_X - \mathbf{t}_A^i\|^2 \cdot \|\mathbf{q}_X\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^N \|\mathbf{q}_X * \mathbf{t}_B^i - (\mathbf{R}_A^i - \mathbf{I})\mathbf{t}_X * \mathbf{q}_X - \mathbf{t}_A^i * \mathbf{q}_X\|^2 \quad (12)$$

求解下式非线性最优化问题, 就可以同时求解

$\mathbf{R}_X, \mathbf{t}_X$

$$\min \delta(\mathbf{q}_X, \mathbf{t}_X) = \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_2 + \lambda(1 - \mathbf{q}_X^T \mathbf{q}_X)^2 \quad (13)$$

一般取 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda = 10^6$. 令

$$F_i(\mathbf{q}_X, \mathbf{t}_X) = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} (\mathbf{n}_A^i * \mathbf{q}_X - \mathbf{q}_X * \mathbf{n}_B^i) \\ \lambda_2^{1/2} (\mathbf{q}_X * \mathbf{t}_B^i - (\mathbf{R}_A^i - \mathbf{I})\mathbf{t}_X * \mathbf{q}_X - \mathbf{t}_A^i * \mathbf{q}_X) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_X, \mathbf{t}_X) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N \\ \lambda^{1/2} (1 - \mathbf{q}_X^T \mathbf{q}_X) \end{bmatrix} \quad (15)$$

则 $\mathbf{F}: \mathbf{R}^7 \rightarrow \mathbf{R}^{8N+1}$, 式(13)等价于如下的非线性最小二乘问题

$$\min_{(\mathbf{q}_X, \mathbf{l}_X)} \|\mathbf{F}\|^2 \tag{16}$$

式(16)可由 Levenberg-Marquardt 算法^[11]求解。为了有效地进行优化迭代,需要提供 $\mathbf{F}$ 的雅克比矩阵,它的推导过程略长,因此在本文中省略。

另外,值得提出的是 Daniilidis^[7]使用对偶四元数^[12]及螺旋理论^[13]将 $\mathbf{AX}=\mathbf{XB}$ 表示成数学上最为简洁的形式

$$\hat{\mathbf{l}}_A' = \hat{\mathbf{q}}_X \hat{\mathbf{l}}_B * \bar{\hat{\mathbf{q}}}_X \tag{17}$$

式中: $\hat{\mathbf{q}}_X$ 为矩阵 $\mathbf{X}$ 的对偶四元数形式,它同时包含了旋转矩阵和平移向量的信息; $\bar{\hat{\mathbf{q}}}_X$ 为 $\hat{\mathbf{q}}_X$ 的共轭;对偶向量 $\hat{\mathbf{l}}_A, \hat{\mathbf{l}}_B$ 分别为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的螺旋轴线。式(17)的几何意义为:对 $\hat{\mathbf{l}}_A$ 进行旋转和平移变换,使其和 $\hat{\mathbf{l}}_B$ 重合,因此手眼标定问题就转化成为变换矩阵螺旋轴线的拟合问题。文献[7]中给出了基于奇异值分解(SVD)的封闭求解法,这种方法虽然在数学上很完美,但是在实际测量数据中因存在噪声而导致 $\mathbf{AX}=\mathbf{XB}$ 并不严格成立。由于文献[7]中解的推导过程是基于 $\mathbf{AX}=\mathbf{XB}$ 严格成立的条件,因此该算法对于噪声非常敏感^[14],通过测试发现它的估计结果并不稳定。

2 基于 MLE 的最优估计

2.1 旋转与变换矩阵

使用旋转向量 $\mathbf{r}=\theta\mathbf{n}$ 表示旋转矩阵 $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$ 的方向为单位旋转轴, $\mathbf{r}$ 的模为 θ , $\theta\in[0, \pi]$ 为旋转角度, $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{R}$ 的关系由 Rodrigues 公式给出

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \cos(\theta)\mathbf{I} + \sin(\theta)\mathbf{S}_n + (1 - \cos\theta)\mathbf{nn}^T \tag{18}$$

式中: $\mathbf{S}_n=[\mathbf{n}]_{\times}$ 为 $\mathbf{n}$ 的斜对称矩阵。

使用 $\mathbf{f}=(\mathbf{r}^T, \mathbf{t}^T)^T$ 表示 4×4 刚性欧拉变换矩阵,即

$$\mathbf{T}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{r}) & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

2.2 四元数与对偶四元数

用 $\mathbf{q}=(a, \mathbf{v}^T)^T$ 表示一个四元数,其中 a 为标量, $\mathbf{v}$ 为 3×1 向量。四元数的共轭为 $\bar{\mathbf{q}}=(a, -\mathbf{v}^T)^T$ 。将四元数的乘法定义为

$$\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + a_1 \mathbf{v}_2 + a_2 \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

乘积的雅可比矩阵为

$$\frac{\partial(\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_1} = \mathbf{W}(\mathbf{q}_2); \quad \frac{\partial(\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_2} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_1) \tag{21}$$

若 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{r}$ 对应同一个旋转矩阵,则有

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \text{sign}(a)2\arcsin(\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| \tag{22}$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{n}^T)^T \tag{23}$$

$\mathbf{q}, \mathbf{r}$ 与相互的雅可比矩阵为^[15]

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} = (-2\mathbf{v}, \text{sign}(a)\boldsymbol{\tau}\mathbf{I}_{3\times 3} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \tag{24}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{v}^T/2 \\ \frac{1}{\tau}\mathbf{I}_{3\times 3} - \lambda\mathbf{r}\mathbf{r}^T \end{bmatrix} \tag{25}$$

式中: $\tau=\theta/\sin(\theta/2)$; $\mathbf{v}=(2a - \text{sign}(a)\tau)/\|\mathbf{v}\|^2$; $\lambda=\sin(\theta/2)/\theta^3 - \cos(\theta/2)/2\theta^2$

用 $\hat{\mathbf{q}}=(\hat{a}, \hat{\mathbf{v}}^T)^T$ 表示一个对偶四元数,其中 $\hat{a}=a+a'\epsilon$ 是对偶数, $\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{v}+\mathbf{v}'\epsilon$ 是对偶向量。 $\hat{\mathbf{q}}$ 又可以写成 $\hat{\mathbf{q}}=\mathbf{q}+\mathbf{q}'\epsilon$ 的形式,因此本文使用一个 8×1 的向量来表示对偶四元数,即 $\hat{\mathbf{q}}=(\mathbf{q}^T, \mathbf{q}'^T)^T$, 则 $\hat{\mathbf{q}}$ 的共轭 $\bar{\hat{\mathbf{q}}}=(\bar{\mathbf{q}}^T, \bar{\mathbf{q}}'^T)^T$ 。对偶四元数的乘法定义为

$$\hat{\mathbf{q}}_1 * \hat{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2' + \mathbf{q}_1' * \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

乘积的雅可比矩阵为

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1 * \hat{\mathbf{q}}_2}{\partial \hat{\mathbf{q}}_1} = \begin{bmatrix} \partial(\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2)/\partial \mathbf{q}_1 & \mathbf{0} \\ \partial(\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2')/\partial \mathbf{q}_1 & \partial(\mathbf{q}_1' * \mathbf{q}_2)/\partial \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1 * \hat{\mathbf{q}}_2}{\partial \hat{\mathbf{q}}_2} = \begin{bmatrix} \partial(\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2)/\partial \mathbf{q}_2 & \mathbf{0} \\ \partial(\mathbf{q}_1' * \mathbf{q}_2)/\partial \mathbf{q}_2 & \partial(\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2')/\partial \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

若 $\hat{\mathbf{q}}$ 和 $\mathbf{f}$ 对应同一个 $\mathbf{T}$, 则有

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{q}) \\ 2\mathbf{q}' * \bar{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \tag{29}$$
$$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{2}\mathbf{t} * \mathbf{q}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{q}}} =$$

$$\begin{pmatrix} \partial \mathbf{r}/\partial \mathbf{q} & \mathbf{0} \\ 2\partial(\mathbf{q}' * \bar{\mathbf{q}})/\partial \bar{\mathbf{q}} \cdot \partial \bar{\mathbf{q}}/\partial \mathbf{q} & 2\partial(\mathbf{q}' * \bar{\mathbf{q}})/\partial \mathbf{q}' \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{f}} =$$

$$\begin{bmatrix} \partial \hat{\mathbf{q}}/\partial \mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\partial(\mathbf{t} * \mathbf{q})/\partial \mathbf{q} \cdot \partial \mathbf{q}/\partial \mathbf{r} & \frac{1}{2}\partial(\mathbf{t} * \mathbf{q})/\partial \mathbf{t} \end{bmatrix} \tag{31}$$

定义 $\mathbf{f}^{-1}=\mathbf{f}(\bar{\hat{\mathbf{q}}})$, 即 $\mathbf{f}^{-1}$ 表示 $\mathbf{T}$ 的逆矩阵。

2.3 矩阵变换测度函数

定义矩阵变换

$$f_1 \circ f_2 \equiv f(\hat{q}_1 * \hat{q}_2) \quad (32)$$

则有

$$T(f_1 \circ f_2) = T(f_1)T(f_2) \quad (33)$$

式中: $f_1 \circ f_2$ 表示它们各自对应的变换矩阵的乘积.

根据 2.1 节的定义, $A_i X = X B_i$ 可以写成

$$f_A^i \circ f_X = f_X \circ f_B^i \quad (34)$$

先定义如下 2 个函数

$$F_B^i = D_B \cdot (\hat{f}_B^i - f_B^i) \quad (35)$$

$$F_A^i = D_A \cdot (f_X \circ \hat{f}_B^i \circ f_X^{-1} - f_A^i) \quad (36)$$

式中: D_B, D_A 为 6×6 加权矩阵. 定义以下函数作为手眼标定的测度函数

$$F_{MLE}(f_X, \hat{f}_B^{1:N}) = \begin{bmatrix} F_B^{1:N} \\ F_A^{1:N} \end{bmatrix} \quad (37)$$

其中

$$F_A^{1:N} = \begin{bmatrix} F_A^1 \\ \vdots \\ F_A^N \end{bmatrix}; \quad F_B^{1:N} = \begin{bmatrix} F_B^1 \\ \vdots \\ F_B^N \end{bmatrix} \quad (38)$$

式中: F_{MLE} 为一个 $R^{6N+6} \rightarrow R^{12N}$ 的映射矩阵, 它以 f_X 和 $\hat{f}_B^i (i=1, \dots, N)$ 为参数; $\hat{f}_B^i$ 为 f_B^i 的真值; $\hat{f}_A^i = f_X \circ \hat{f}_B^i \circ f_X^{-1}$, $\hat{f}_A^i$ 为 f_A^i 的真值. 如果测量值满足高斯分布, 即 $f_A^i \sim N(\hat{f}_A^i, \Sigma_A)$, $f_B^i \sim N(\hat{f}_B^i, \Sigma_B)$, 则 $f_A^{1:N}$ 和 $f_B^{1:N}$ 的联合概率密度为

$$P(f_A^{1:N}, f_B^{1:N} | f_X) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\|f_A^i - \hat{f}_A^i\|_{\Sigma_A}^2 + \|f_B^i - \hat{f}_B^i\|_{\Sigma_B}^2 \right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \|F_{MLE}\|^2\right) \quad (39)$$

即 $D_B = \Sigma_B^{-1/2}$, $D_A = \Sigma_A^{-1/2}$. 最小化 $\|F_{MLE}\|^2$ 就得到了 f_X 的最大似然估计.

2.4 测度函数的雅克比矩阵

采用 Levenberg-Marquardt 算法求解非线性最小二乘问题, 得

$$\min_{f_X, \hat{f}_B^{1:N}} \|F_{MLE}\|^2 \quad (40)$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{q}_X} = \frac{\partial(\hat{q}_X * \hat{q}_B * \bar{q}_X)}{\partial \hat{q}_X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(q_X * q_B * \bar{q}_X)}{\partial q_X} & 0 \\ \frac{\partial(q_X * q_B * \bar{q}'_X + q_X * q'_B * \bar{q}_X + q'_X * q_B * \bar{q}_X)}{\partial q_X} & \frac{\partial(q_X * q_B * \bar{q}'_X + q'_X * q_B * \bar{q}_X)}{\partial q'_X} \end{bmatrix} \quad (49)$$

为了进行有效的迭代, 需要给出 F_{MLE} 的雅克比矩阵, 本节给出了 F_{MLE} 的雅克比矩阵的推导过程. 在不失一般性的同时, 为了保持符号的简洁性, 以下推导过程中将加权矩阵 D 视为单位矩阵. F_B^i 的雅克比矩阵为

$$\frac{\partial F_B^i}{\partial \hat{f}_B^j} = \begin{cases} I_{6 \times 6}; & i = j \\ 0_{6 \times 6}; & i \neq j \end{cases} \quad \frac{\partial F_B^i}{\partial f_X} = 0_{6 \times 6} \quad (41)$$

F_A^i 的雅克比矩阵

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_A^i}{\partial \hat{f}_B^j} &= \frac{\partial(f_X \circ \hat{f}_B^j \circ f_X^{-1})}{\partial \hat{f}_B^j} \\ \frac{\partial F_A^i}{\partial f_X} &= \frac{\partial(f_X \circ \hat{f}_B^j \circ f_X^{-1})}{\partial f_X} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

为了保持符号的简洁性, 式(42)就是求解下列形式的雅克比矩阵, 即

$$\frac{\partial(f_X \circ f_B \circ f_X^{-1})}{\partial f_X}; \quad \frac{\partial(f_X \circ f_B \circ f_X^{-1})}{\partial f_B} \quad (43)$$

因为 $f_X \circ f_B \circ f_X^{-1} = f(\hat{q}_X * \hat{q}_B * \bar{q}_X)$, 所以令

$$\hat{q} = \hat{q}_X * \hat{q}_B * \bar{q}_X \quad (44)$$

根据链式求导法, 则有

$$\frac{\partial f}{\partial f_X} = \frac{\partial f}{\partial \hat{q}} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{q}_X} \cdot \frac{\partial \hat{q}_X}{\partial f_X} \quad (45)$$

$$\frac{\partial f}{\partial f_B} = \frac{\partial f}{\partial \hat{q}} \cdot \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{q}_B} \cdot \frac{\partial \hat{q}_B}{\partial f_B} \quad (46)$$

将式(44)展开得

$$\hat{q} = \hat{q}_X * \hat{q}_B * \bar{q}_X = \begin{bmatrix} q_X * q_B * \bar{q}_X \\ q_X * q_B * \bar{q}'_X + q_X * q'_B * \bar{q}_X + q'_X * q_B * \bar{q}_X \end{bmatrix} \quad (47)$$

其相关的雅可比矩阵为

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{q}_B} = \frac{\partial(\hat{q}_X * \hat{q}_B * \bar{q}_X)}{\partial \hat{q}_B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(q_X * q_B * \bar{q}_X)}{\partial q_B} & 0 \\ \frac{\partial(q_X * q_B * \bar{q}'_X)}{\partial q_B} + \frac{\partial(q'_X * q_B * \bar{q}_X)}{\partial q_B} & \frac{\partial(q_X * q'_B * \bar{q}_X)}{\partial q'_B} \end{bmatrix} \quad (48)$$

式(48)、(49)中除了 $\partial(\mathbf{q}_X * \mathbf{q}_B * \mathbf{q}'_X)/\partial \mathbf{q}_X$ 这种形式的雅克比矩阵外,其他均已给出了求解方式.通过四元数乘法可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_X * \mathbf{q}_B * \bar{\mathbf{q}}_X = & \\ \left[\begin{array}{c} a_X^2 a_B + a_B \mathbf{v}_X^T \mathbf{v}_X \\ a_X^2 \mathbf{v}_B + (\mathbf{v}_B^T \mathbf{v}_X) \mathbf{v}_X - 2a_X \mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_X - \mathbf{v}_X \times \mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_X \end{array} \right] & \quad (50) \end{aligned}$$

则 $\partial(\mathbf{q}_X * \mathbf{q}_B * \mathbf{q}_X)/\partial \mathbf{q}_X$ 可通过对式(50)中的各项分步求解得到.求出构成 $\mathbf{F}_{\text{MLE}}$ 雅克比矩阵的全部分量后,手眼标定线性解法的结果可以作为本文非线性迭代算法的初值.

3 实验与结果

3.1 数值模拟实验

为了测试和比较,对算法的性能进行了数值模拟实验,数值模拟的步骤如下:①随机生成 $\mathbf{X}$ 的真值 $\hat{\mathbf{f}}_X = (\hat{\mathbf{r}}_X; \hat{\mathbf{t}}_X)$;②随机生成的 $\hat{\mathbf{f}}_B^i = (\hat{\mathbf{r}}_B^i; \hat{\mathbf{t}}_B^i)$, $i=1, \dots, N$;③计算 $\hat{\mathbf{f}}_A^i = \hat{\mathbf{f}}_X \circ \hat{\mathbf{f}}_B^i \circ \hat{\mathbf{f}}_X^{-1} = (\hat{\mathbf{r}}_A^i; \hat{\mathbf{t}}_A^i)$, $i=1, \dots, N$;④加入高斯噪声模拟测量数据

$$\mathbf{r}_A^i = \hat{\mathbf{r}}_A^i + d\Delta\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_B^i = \hat{\mathbf{r}}_B^i + d\Delta\mathbf{r}$$

$$\mathbf{t}_A^i = \hat{\mathbf{t}}_A^i + d\Delta\mathbf{t}, \quad \mathbf{t}_B^i = \hat{\mathbf{t}}_B^i + d\Delta\mathbf{t}$$

其中 d 为噪声水平, $\Delta\mathbf{r}$ 服从均值为 $\mathbf{0}$ 、方差为 $\text{diag}(0.01^2, 0.01^2, 0.01^2)$ 的高斯分布, $\Delta\mathbf{t}$ 服从均值为 $\mathbf{0}$ 、方差为 $\text{diag}(0.2^2, 0.2^2, 0.2^2)$ 的高斯分布,即给旋转向量的各个分量加上标准差为 $0.01d$ 的高斯噪声,给平移向量各个分量加上标准差为 $0.2d$ 的高斯噪声;⑤对包含噪声的测量数据 $\mathbf{f}_A^i$ 和 $\mathbf{f}_B^i$ ($i=1, \dots, N$)分别使用线性解耦估计算法(LCM)、非线性同步估计算法(NCM)和本文提出的最优估计算法(OCM)对机器人的手眼进行标定.

将标定过程重复500次(实验中取 $N=20$),每次加入同分布但不同的噪声,将第 k 次的标定结果记为 $\mathbf{f}_X^k = (\mathbf{r}_X^k; \mathbf{t}_X^k)$, $k=1, \dots, M$.相对旋转误差和相对平移误差为

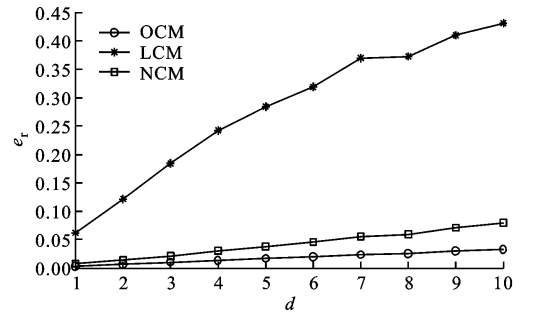
$$e_t = \frac{\left[\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|\mathbf{r}_X^k - \hat{\mathbf{r}}_X\|^2 \right]^{1/2}}{\|\hat{\mathbf{r}}_X\|} \quad (51)$$

$$e_r = \frac{\left[\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|\mathbf{t}_X^k - \hat{\mathbf{t}}_X\|^2 \right]^{1/2}}{\|\hat{\mathbf{t}}_X\|} \quad (52)$$

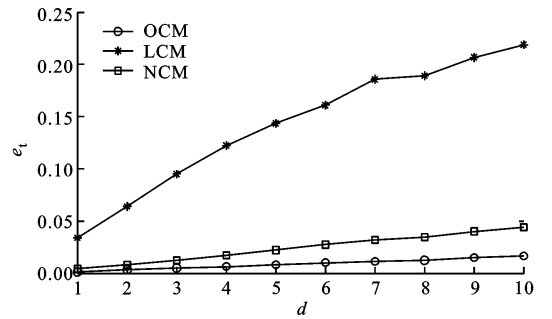
即得到了在噪声水平 d 下的3种算法的估计误差.

令 $d=1, 2, \dots, 10$,对每一个 d 重复以上步骤,

求出3种算法的估计误差.数值模拟的结果如图1所示,图中给出了 e_t 和 e_r 与 d 的关系.从图中可以看出,在相同的噪声水平下,本文算法的估计误差最小,并且本文算法的估计误差对于噪声水平的增长速度最慢,因此稳定性最高.由于 N 的取值将影响算法的估计精度,因此数值模拟实验中还给出了3种估计算法对 N 的敏感度,即在相同的噪声水平下由式(51)和式(52)定义的估计误差与 N 的关系.具体做法如下:随机生成一个 $\mathbf{X}$ 的真值 $\hat{\mathbf{f}}_X$,在 $d=5$ 时,取 $N=5, 6, \dots, 20$ 中的每一个值,分别对3种估计算法进行蒙特卡洛误差分析($M=500$),得到的 e_t 和 e_r 与 N 的关系如图2所示.



(a) 相对平移误差



(b) 相对旋转误差

图1 2种相对估计误差与噪声水平的关系

从图2中可以看到,对于相同的 N ,本文算法的估计误差最小.随着 N 的增大,3条曲线逐步收敛到水平方向,并且收敛的速度越来越慢.在实际应用中不可能无限地增大 N ,因此根据图2的结果,选择 $N=20$ 是合理的.

3.2 实际机器人的手眼标定

为了验证本文算法的有效性和精度,对机器人的手眼进行了标定实验,标定对象为北航机器人研究所研发的内窥镜导航机器人原型,如图3所示.将安装有反射式光学定位传感器S的内窥镜固定在机器人手臂的前端,S的位置和姿态可以通过光学定

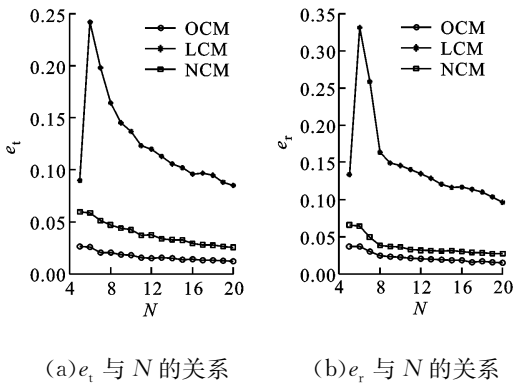


图2 2种误差与位姿变换次数的关系

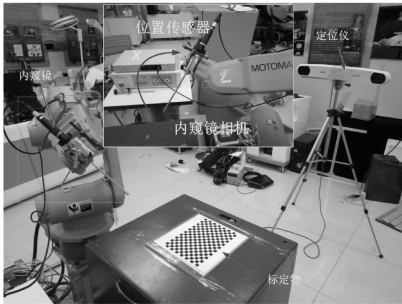


图3 机器人手眼标定实验场景

位设备 NDI Polaris(加拿大, NDI 公司)实时追踪, 但作为内窥镜导航技术中图像融合的基础, 必须要标定出内窥镜相机 C 和与它固联的 S 之间的刚性转换矩阵。

实验过程如下: 机器臂带动内窥镜在 $N+1$ 个位置上以不同姿态对标定图案拍摄 $N+1$ 幅图像, 在第 $i(i=0, \dots, N)$ 个位置上推定相机的外参数 f_i^E , 记录 S 相对于定位仪的位姿 f_i^W , 则有 $f_A^i = f_i^E \circ (f_{i-1}^E)^{-1}$, $f_B^i = (f_i^W)^{-1} \circ f_{i-1}^W$, $i=1, \dots, N$. 使用 LCM, NCM 及 OCM 估计算法分别标定从 C 到 S 的转换矩阵, 结果分别记为 f_X^L, f_X^N, f_X^O . 由于实际标定的真值无法得知, 因此为了评价和比较 3 种估计算法的精度, 采用以目的为向导的评价模式。

在基于内窥镜图像的三维重建技术中需要估计两幅图像拍摄时的相对位姿, 也就是通过 f_X 和光学定位设备提供的 f_B^i 计算 f_A^i , 令 $\bar{f}_A^i = f_X \circ f_B^i \circ f_X^{-1} = (\bar{r}_A^i; \bar{t}_A^i)$, 定义旋转和平移的估计误差

$$e_R = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \| \bar{r}_A^i - \bar{r}_A^i \| ^2 \right)^{1/2} \quad (53)$$

$$e_T = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \| \bar{t}_A^i - \bar{t}_A^i \| ^2 \right)^{1/2} \quad (54)$$

实验中取 $N=20$, 并进行了 $(M=5)$ 完全独立的重复

标定, 误差计算结果如图 4 所示. 每一种算法采用 5 个点代表 5 次标定的误差, 越靠近原点表示误差越小. 从图中可以看出, OCM 和 NCM 有着相当的精度(从误差数值上看 OCM 略优于 NCM)和较高的稳定性(分布集中), 而 LCM 的精度和稳定性最差。

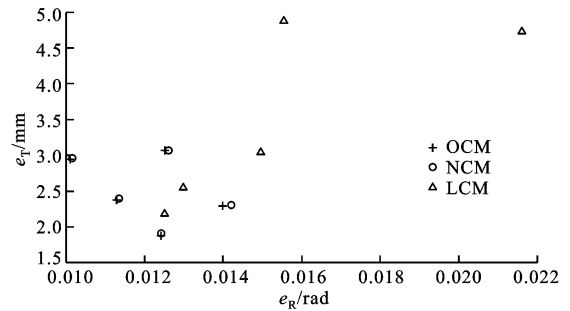


图4 实际机器人的手眼标定结果

4 结 论

本文提出了一种非线性最优机器人的手眼标定算法, 基于最大似然估计的思想, 估计测量值的真值, 使其严格满足手眼标定矩阵方程. 由于现有的机器人手眼标定算法中测度函数的数学推导都是基于齐次变换矩阵方程, 而较大的观测噪声会破坏这个方程, 这就导致了现有算法对观测噪声比较敏感. 本文通过数值模拟和实际手眼标定实验, 验证了本文算法优于现有的 2 种经典手眼标定算法, 但需要具备的条件是: 高斯噪声模型和较准确的噪声方差估计. 本文算法是一种加权非线性最小二乘法, 加权矩阵的确定需要估计测量噪声的方差, 而测量噪声的特性可以通过测量仪器的标定误差估计, 也可以通过数值实验的方法测定. 如果噪声特性的估计较为准确, 本文算法的确是一种最优的估计算法。

参考文献:

- [1] SHIU Y C, AHMAD S. Calibration of wrist-mounted robotic sensors by solving homogeneous transform equations of the form $AX=XB$ [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1989, 5(1): 16-29.
- [2] HORAUD R, DORNAIKA F. Hand-eye calibration [J]. International Journal of Robotics Research, 1995, 14(3): 195-210.
- [3] TSAI R Y, LENZ R K. A new technique for fully autonomous and efficient 3D robotics hand/eye calibration [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1989, 5(3): 345-358.
- [4] CHOU J C K, KAMEL M. Finding the position and

- orientation of a sensor on a robot manipulator using quaternions [J]. The International Journal of Robotics Research, 1991,10(3): 240-254.
- [5] WANG C C. Extrinsic calibration of a robot sensor mounted on a robot [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1992,8(2):161-175.
- [6] PARK F C, MARTIN B J. Robot sensor calibration; solving $AX=XB$ on the Euclidean group [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1994, 10(5): 717-721.
- [7] DANIILIDIS K. Hand-eye calibration using dual quaternions [J]. The International Journal of Robotics Research, 1999,18(3): 286-298.
- [8] STROBL K H, HIRZINGER G. Optimal hand-eye calibration [C]// Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and System. Piscataway, NJ, USA; IEEE, 2006:4647-4653.
- [9] 王颖,董再励,孙茂相,等. 一种基于线性模型的机器人手眼标定新方法 [J]. 模式识别与人工智能, 2005, 18(4): 491-495.
- WANG Ying, DONG Zaili, SUN Maoxiang, et al. A new approach for robot hand-eye calibration based on linear prototype [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2005,18(4): 491-495.
- [10] 刘峰,孙茂相,董竹新,等. 一种基于投影矩阵 M 的机器人手眼标定线性化方法 [J]. 机器人, 2005, 27(4): 301-305.
- LIU Feng, SUN Maoxiang, DONG Zhuxin, et al. A linear approach for robot hand-eye calibration based on the projection matrix M [J]. Robot, 2005, 27(4):301-305.
- [11] MORE J J. The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory [C]// Lecture Notes in Mathematics: Numeric Analysis. Berlin, Germany: Springer, 1978:105-116.
- [12] GU Y L, LUH J. Dual-number transformation and its application to robotics [J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1987,(3):615-623.
- [13] CHEN H H. A screw motion approach to uniqueness analysis of head-eye geometry [C]// Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway, NJ, USA; IEEE, 1991:145-151.
- [14] MALTI A, BARRETO J P. Robust hand-eye calibration for computer aided medical endoscopy [C]// Proceedings of 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway, NJ, USA; IEEE, 2010:5543-5549.
- [15] PENNEC X, THIRION J P. A framework for uncertainty and validation of 3-D registration methods based on points and frames [J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 25(3): 203-229.

(编辑 管咏梅)